Introducción al Método de los Elementos Finitos: un enfoque matemático

(Propuesta de curso para la XXIV Escuela Venezolana de Matemáticas 2011)

Giovanni Calderón Silva
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes
Mérida 5101, Venezuela
e-mail: giovanni@ula.ve teléfono: 0426-5773189

Motivación

El modelado de distintos procesos físicos, cuya correcta comprensión, predicción y control son importantes para las ciencias y la ingeniería, se hace a través de ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Entre tales procesos se pueden citar: los problemas de la mecánica de fluidos, reacciones químicas, deformación de los cuerpos sólidos, campos electromagnéticos y muchas más. En la mayoría de los casos la solución exacta de estos modelos es desconocida y a veces ni siquiera se sabe si existe una solución única. Por estas razones, en general, la única manera de resolver las EDP que se plantean en estos modelos es recurriendo a métodos numéricos para definir una solución aproximada. Hoy en día, los métodos numéricos para EDP constituyen una parte indivisible de la ciencia y la ingeniería moderna. Es común, debido a su potencial y versatilidad, que el método de elementos finitos (MEF) sea frecuentemente el más utilizado para obtener una solución aproximada a cualquiera de estos problemas.

Aunque el MEF, históricamente surge de la resolución de problemas estructurales complejos (con mentalidad práctica ingenieril) tiene hondas raíces matemáticas, en la línea del procedimiento de Ritz para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales (el método de Ritz data de 1909) o dentro de los llamados métodos de residuos ponderados. Esta generalidad empezó a atraer el interés de los matemáticos, los cuales contribuyeron decisivamente a explicar con rigor las bases del MEF. Sin embargo, debe hacerse notar que la contribución de los matemáticos al MEF ha ido siempre muy por detrás de las aplicaciones prácticas. El MEF nació como una herramienta ingenieril y sus líneas básicas de desarrollo han estado siempre muy vinculadas a la presión de la industria por resolver problemas. En muchas etapas de su evolución se ha concebido y aplicado con éxito una determinada técnica numérica antes de encontrar su justificación matemática rigurosa.

Resulta común que un curso de introducción al MEF siga una vertiente netamente informática, dejando de lado los fundamentos matemáticos. Este hecho produce un perfil exclusivo de usuario y limita al estudiante a iniciarse en campos de investigación relacionados con las propiedades y evolución del MEF. Ahora bien, la forma más elegante de explicar los fundamentos matemáticos del MEF parte de la teoría de espacios normados y utiliza los conceptos del análisis funcional; este es el marco en el que hay que situarse si se quiere estudiar con rigor las bases del MEF e investigar sobre sus propiedades matemáticas. Sin embargo, desde un punto de vista pedagógico, iniciar el estudio del MEF situándose en este marco puramente matemático tiene serios inconvenientes. Pues, se corre el riesgo de desanimar a los estudiantes que se acercan por primera vez al MEF y de fomentar entre ellos la idea de que el método es sólo una gran teoría matemática, difícil de entender, y sin relación aparente con la forma en que luego se resuelven los problemas reales. Por tal razón, el enfoque del curso se realizará buscando una doble vertiente. Por una parte se sigue una descripción rigurosa en el formalismo matemático que fundamenta el MEF. Por otra, se hará énfasis en la implementación del método y el postproceso de lo resultados en aplicaciones prácticas.

Objetivos del curso

El objetivo general que busca el curso es el de proporcionar al estudiante las bases matemáticas e informáticas en el uso del MEF para la resolución de problemas de las ciencias y la ingeniería. Así, se siguen dos objetivos fundamentales:

- Formalizar la teoría matemática básica del Método de Elementos Finitos.
- Proveer al estudiante de las estrategias generales que se siguen en la implementación del MEF.

Al final del curso, el estudiante debe ser capas de comprender tanto los aspectos teóricos como los aspectos prácticos de la implementación del MEF para resolver problemas de campos escalares (EDP elípticas y parabólicas) y vectoriales (problemas mecánicos).

A quien esta dirigido

El curso esta pensado para estudiantes de los distintos postgrados en matemáticas (o estudiantes avanzados en la carrera). Es supuesto entonces, que el estudiante posee conocimientos básicos de Análisis Numérico, Análisis Funcional y de un lenguaje de programación (para efectos prácticos del curso preferiblemente MATLAB). Sin embargo, dado que sigue la filosofía de un texto del curso lo más autocontenido posible, el curso podrá ser seguido por ingenieros (o estudiantes avanzados en la carrera de ingeniería) que deseen obtener una formación más sólida y profunda en lo que aspectos matemáticos del método se refiere.

Programa del curso

1. Introducción
   - 1.1 Orígenes, evolución y presente del MEF.
   - 1.2 El método de los residuos ponderados: métodos de colocación por puntos, por subdominios, método de los mínimos cuadrados, método de Galerkin (Bubnov Galerkin).
   - 1.3 Características generales de los métodos de los residuos ponderados.
   - 1.4 Fundamentos del análisis funcional.
2. El Método de los Elementos Finitos
   - 2.1 El problema de frontera unidimensional. La forma fuerte y débil del problema de fronteras.
   - 2.2 Condiciones de frontera esencial y naturales.
   - 2.3 Existencia y unicidad de la solución débil. Teorema de Lax-Milgram.
   - 2.4 Aproximación de soluciones débiles. Discretización de la forma débil.
   - 2.5 Las funciones base: lineales y cuadráticas. La transformación isoparamétrica.
   - 2.6 Integración numérica (cuadraturas gaussiana).
   - 2.7 Algunas familias de funciones de forma (elementos rectangulares y elementos triangulares).
3. Implementación del método
   - 3.1 Matriz de rigidez, vector de carga, flujo general de un programa de elementos finitos.
   - 3.2 Solución de grandes sistemas de ecuaciones lineales: métodos directos y métodos iterativos.

4 MEF para problemas elípticos 2D
   - 4.1 Formulación variacional, condiciones de frontera, discretización, funciones de forma.
   - 4.2 Interpretación geométrica del MEF.
   - 4.3 Implementación del método.
   - 4.4 Generación de mallas. Malladores (software Ez4u).
   - 4.5 Estima del error para MEF de problemas elípticos.
   - 4.6 Consideraciones matemáticas: requerimientos de regularidad, normas, estimas a priori y a posteriori del error.
   - 4.7 Código en 2D del MEF.
   - 4.8 Aplicaciones prácticas.

5 MEF para problemas parabólicos
   - 5.1 Introducción: un problema modelo unidimensional.
   - 5.2 Discretización en la componente espacio; métodos de resolución.
   - 5.3 Discretización espacio y tiempo.
   - 5.4 El método de Galerkin discontinuo.
   - 5.5 Estimas del error.

6 Problemas de elasticidad bidimensional
   6.1 Introducción a la mecánica de los medios continuos.
   6.2 Obtención del principio de los trabajos virtuales.
   6.3 Discretización del campo de desplazamientos, campo de deformaciones y campo de tensiones. Relaciones de equilibrio. Ensamblaje.
   6.4 Aplicación del MEF a problemas de elasticidad bidimensional.

7 Temas de investigación

Resumen Bibliográfico

- Pavel Solín, *Partial Differential Equations and the Finite Element Method*, Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2006.
- S. C. Brenner and L. Ridgway Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, 1994.
- Claes Jonson, *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Cambridge University Press, 1990.
- Mark Ainsworth and J.T. Oden, *A Posteriori Error Estimation In Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000.
- B. Dayanand Reddy, *Functional Análisis and Boundary-value Problems: an Introctory Treatment*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.
- E.B. Becker, G.F. Carey and J.T. Oden, Finite Elements – An Introduction. Prentice-Hall, vol. I, 1983.
- J.T. Oden and G.F. Carey, Finite Elements – Mathematical Aspects. Prentice-Hall, vol. IV, 1983.
- Vidal Thomée, Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. Lecture Notes in Mathematics 1054. Springer-Verlag, 1984.
- Béatrice Rivière, *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equation*, SIAM, 2008.
- B.Q. Li, *Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer*, Springer-Verlag, 2006.

Recursos requeridos

El curso será dictado mediante el uso de un proyector de video (video beam) conectado a un computador. Al mismo tiempo que se usa la pizarra para las explicaciones adicionales. Dado el enfoque computacional del curso, se hace necesario el uso de un computador por cada dos estudiantes (como máximo).

Mérida, 14 de junio de 2010.