

**XXX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA-VENEZUELA 2017**

**COMBINATORIA SIMBÓLICA
Y ANALÍTICA**

José Heber Nieto Said

MÉRIDA, VENEZUELA, 03 al 08 de septiembre de 2017

XXX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA-VENEZUELA 2017

COMBINATORIA SIMBÓLICA Y ANALÍTICA

José Heber Nieto Said

Universidad del Zulia

jhnieto@gmail.com

MÉRIDA, 3 AL 8 DE SEPTIEMBRE DE 2017

XXX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana.

La XXX Escuela Venezolana de Matemáticas recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), FUNDACITE–Mérida, Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) y Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA).

2010 Mathematics Subject Classification: 05-01, 05A15, 05A16, 05E18.

©Ediciones IVIC

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Rif: G-20004206-0

Combinatoria Simbólica y Analítica

José Heber Nieto Said

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas

Depósito legal DC2017001936

ISBN 978-980-261-179-9

Caracas, Venezuela

2017

Índice general

Prefacio	VII
1. Preliminares	1
1.1. Notación	1
1.2. Funciones aritméticas	3
1.3. Probabilidad discreta	5
1.4. Combinatoria básica	6
1.5. Grafos	9
1.6. Enumeración bajo acción de grupos	11
2. Series de potencias formales	17
2.1. Definiciones	17
2.2. Inversa multiplicativa	19
2.3. Topología formal	20
2.4. Composición	22
2.5. Inversión	23
2.6. Derivación	24
3. Clases combinatorias ordinarias	25
3.1. Introducción	25
3.2. Producto cartesiano	27
3.3. Suma combinatoria	28
3.3.1. Triangulaciones	29
3.3.2. Árboles ordenados binarios	31
3.4. Secuencias	33
3.4.1. Composiciones	34
3.4.2. Árboles ordenados	34

3.4.3.	Árboles unario-binarios	36
3.4.4.	Florestas ordenadas	37
3.4.5.	Números de Fibonacci.	37
3.4.6.	Lenguajes y expresiones regulares.	38
3.4.7.	Autómatas finitos	41
3.4.8.	Lenguajes que incluyen o excluyen un patrón . . .	44
3.4.9.	Frecuencias y tiempos de espera	45
3.5.	Potencias	47
3.6.	Multiconjuntos	48
3.6.1.	Particiones de un entero	49
3.7.	Ciclos	51
3.8.	Punteo y composición	53
3.9.	Resumen de construcciones admisibles	53
3.10.	Ecuaciones con clases	53
4.	Clases multivariadas	55
4.1.	Definiciones	55
4.2.	Construcciones con número de componentes restringido .	56
4.3.	Algunos ejemplos	58
5.	Clases etiquetadas	61
5.1.	Introducción	61
5.2.	Permutaciones, urnas y ciclos	62
5.3.	Clases etiquetadas versus no etiquetadas	64
5.4.	Construcciones admisibles	65
5.5.	Secuencias, conjuntos y ciclos	67
5.6.	Resumen de construcciones etiquetadas	68
5.7.	Funciones sobreyectivas y particiones	69
5.8.	Permutaciones y ciclos	71
5.8.1.	Aplicación al análisis de algoritmos	72
5.9.	Desarreglos	75
5.10.	La paradoja de los cumpleaños	76
5.11.	El problema del coleccionista de cupones	78
5.12.	Árboles etiquetados	79
5.12.1.	Caso ordenado	79
5.12.2.	Caso no ordenado	80

6. Combinatoria Analítica	81
6.1. Conceptos básicos	81
6.2. Asintótica de coeficientes	86
6.2.1. Primer Principio	86
6.2.2. Segundo Principio	88
6.3. Ecuaciones funcionales y singularidades	91
7. Respuestas a los ejercicios	93
Bibliografía	99
Índice alfabético	102

Prefacio

La *combinatoria* es el estudio de las estructuras discretas, es decir de las configuraciones que se pueden obtener a partir de un conjunto de objetos simples, combinándolos mediante un conjunto finito de reglas. Por ejemplo, a partir de un conjunto finito A se pueden construir los subconjuntos de A , los pares ordenados de elementos de A , las secuencias finitas de elementos de A , las biyecciones de A en A (permutaciones), los grafos que tienen a los elementos de A como vértices, etc. Generalmente esas configuraciones se pueden clasificar de acuerdo a uno o más parámetros, como por ejemplo el tamaño de un subconjunto, la longitud de una secuencia, el número de vértices o de aristas de un grafo. La combinatoria clásica resolvió muchos problemas de enumeración de estructuras finitas, en función de sus parámetros. Sin embargo en general lo hizo mediante métodos *ad hoc*, apropiados solamente para resolver un tipo particular de problemas. Y los resultados obtenidos guardaban pocas relaciones entre sí o con otras ramas de la matemática, lo cual hizo que la combinatoria estuviese un poco al margen de las grandes corrientes del pensamiento matemático. Sin embargo durante la segunda mitad del siglo XX la combinatoria se reveló como la herramienta más apropiada para enfrentar los problemas planteados por la naciente ciencia de la computación. Esto le dió un gran impulso, que dura hasta el presente. Un reflejo de la importancia que hoy se le asigna a la combinatoria es el hecho de que es una de las cuatro áreas fundamentales (las otras son Geometría, Álgebra y Teoría de Números) sobre las cuales versan la mayoría de los problemas propuestos en las Olimpiadas Matemáticas en todo el mundo (ver por ejemplo [20, 21]). Este impulso provocó la aparición de nuevos enfoques unificadores y el desarrollo de numerosas relaciones con otras ramas de la matemática.

Uno de esos enfoques unificadores es la *combinatoria simbólica*, que per-

mite obtener la función generatriz de una clase combinatoria a partir de las de las clases utilizadas para definirla, mediante una especie de cálculo operacional basado en un conjunto de constructores estándar. En realidad las funciones generatrices ya se habían utilizado ocasionalmente en la combinatoria clásica, por ejemplo Euler las empleó para calcular el número de triangulaciones de un polígono regular. Pero el enfoque consistía en establecer primero una relación de recurrencia que permitiese luego hallar una expresión explícita de la función generatriz. El enfoque moderno tiene sus orígenes en un artículo de Joyal [17], en el que expone una elegante teoría de *especies combinatorias*. Si \mathcal{B} es la categoría de los conjuntos finitos, con las biyecciones como morfismos, una *especie combinatoria* es un funtor de \mathcal{B} en \mathcal{B} . A cada especie se le asocia una función generatriz, y operaciones con especies se reflejan en operaciones con sus respectivas funciones generatrices. Una introducción a esta teoría puede verse en [19] y un estudio más amplio en el excelente libro de Bergeron, Labelle y Leroux [3]. En esta obra se sigue sin embargo otro camino, más cercano al de [11], el cual esperamos que sea más amigable para aquellos lectores cuya lengua materna no es la teoría de categorías.

En la *combinatoria analítica* las funciones generatrices se interpretan como funciones analíticas en el campo complejo. Las gráficas de estas funciones de \mathbb{C} en \mathbb{C} son superficies en un espacio de dimensión 4 (superficies de Riemann), cuyas singularidades están relacionadas con el comportamiento asintótico de los coeficientes de la función generatriz. La combinatoria simbólica y la analítica guardan una estrecha relación, dado que es posible analizar el efecto que los constructores básicos de la combinatoria simbólica tienen sobre la asintótica de los coeficientes.

Estas técnicas tienen muchas aplicaciones, por ejemplo al análisis de algoritmos, lenguajes formales, teoría de probabilidades, teoría de la información, física estadística, biología computacional, teoría analítica de números, etc.

Esta obra es una introducción tanto a la combinatoria simbólica como a la analítica, desarrollando sus principios básicos y mostrando diversos ejemplos y aplicaciones.

José H. Nieto S.
Maracaibo, mayo 2017.

Capítulo 1

Preliminares

EN este capítulo se reúnen definiciones y resultados que serán utilizados en el resto del libro. Salvo en unos pocos casos no se incluyen demostraciones, pero sí referencias a la literatura. El capítulo no está pensado para ser leído secuencialmente: recomendamos leer la primera sección sobre notación y continuar con el capítulo siguiente, para luego volver aquí cuando sea necesario.

1.1. Notación

Se usará la notación habitual de la teoría de conjuntos. En particular $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ y $A \times B$ representan la unión, intersección, diferencia y producto cartesiano de los conjuntos A y B . B^A es el conjunto de las funciones de A en B .

Un *multiconjunto* M es como un conjunto pero en el cual se admite que haya elementos repetidos. Hay varias maneras de formalizar este concepto, una de ellas consiste en asociar a cada elemento x de un conjunto A un entero positivo $m(x)$ (la *multiplicidad* de x). Así, el multiconjunto sería el par formado por el conjunto A y la función $m : A \rightarrow N_+$. Para multiconjuntos se usa la misma notación que para conjuntos, lo que puede causar confusión si no se aclara de qué se está hablando. Así $\{1, 2, 3\}$ y $\{1, 1, 1, 2, 3, 3\}$ como conjuntos son idénticos, pero como multiconjuntos son diferentes.

Se denotará como es usual por \mathbb{Z} al anillo de los números enteros y por \mathbb{Q} , \mathbb{R} y \mathbb{C} a los cuerpos de números racionales, reales y complejos,

respectivamente. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ es el conjunto de los enteros no negativos y $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ es el conjunto de los enteros positivos. $\mathbb{N}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ es el conjunto de los enteros no negativos y menores que n .

Si $n \in \mathbb{N}_+$ y $m \in \mathbb{Z}$, denotaremos por $m \bmod n$ al resto de la división entera de m entre n , es decir al único entero r tal que $0 \leq r < n$ y $m = qn + r$ para cierto $q \in \mathbb{Z}$.

Si $x \in \mathbb{R}$, el *piso* $\lfloor x \rfloor$ y el *techo* $\lceil x \rceil$ de x se definen como

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}, \quad \lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}.$$

A $\lfloor x \rfloor$ también se le llama *parte entera* de x .

Si $z \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{N}_+$, se definen los k -factoriales inferior y superior de z (también llamados factorial descendente y factorial ascendente) como

$$z^{\underline{k}} = z(z-1) \cdots (z-k+1),$$

$$z^{\overline{k}} = z(z+1) \cdots (z+k-1).$$

Seguiremos la convención según la cual una suma con un único sumando es igual a ese sumando, una suma sin sumandos es 0, un producto con un solo factor es igual a ese factor y un producto sin factores es 1. Así

$$z^{\underline{1}} = z^{\overline{1}} = z, \quad z^{\underline{0}} = z^{\overline{0}} = 1.$$

Observe que si $k = n \in \mathbb{N}$ entonces $n^{\underline{n}} = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ es el factorial ordinario.

El *semifactorial* $n!!$ (también llamado *factorial doble* de $n \in \mathbb{N}$ es

$$n!! = \prod_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (n-2j).$$

En particular

$$(2n)!! = (2n)(2n-2) \cdots 4 \cdot 2, \quad (2n+1)!! = (2n+1)(2n-1) \cdots 3 \cdot 1.$$

Sean X un conjunto y a un punto de X con un sistema de entornos \mathcal{U} que permita definir la noción de límite cuando x tiende a a (ejemplos: $X = \mathbb{R}$ o $X = \mathbb{C}$ con cualquier $a \in X$ y la topología usual; $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con $a = \infty$ y entornos $U_k = \{\infty\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n > k\}$ para $k \in \mathbb{N}$).

Sean f y g funciones de $X \setminus \{a\}$ en \mathbb{R} o \mathbb{C} . Entonces escribiremos

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$$

si existen una constante real $C > 0$ y un entorno U de a tales que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ para todo $x \in U \setminus \{a\}$. Intuitivamente esto significa que la razón $f(x)/g(x)$ permanece acotada cuando x tiende a a . En este caso se suele decir que f es de orden a lo sumo g , o que f es O grande de g , cuando x tiende a a .

Escribiremos

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$$

si la razón $f(x)/g(x)$ tiende a 0 cuando x tiende a a . Más precisamente: si dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un entorno U_ϵ de a tal $|f(x)| \leq \epsilon|g(x)|$ para todo $x \in U_\epsilon \setminus \{a\}$. En este caso se dice que f es de orden menor que g , o que f es *o pequeña* de g , cuando x tiende a a .

Escribiremos

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$$

si la razón $f(x)/g(x)$ tiende a 1 cuando x tiende a a . En este caso se dice que f es *asintóticamente equivalente* a g cuando x tiende a a .

Ejemplo 1.1.1. Para $n \rightarrow \infty$ se tiene $\cos(n) = O(1)$, $10n^2 + 100n + 1000 = O(n^2)$, $e^n - 1 - n = O(n^2)$, $\log(n) = o(n)$, $e^n - 1 - n - \frac{n^2}{2} = o(n^2)$. Algunas fórmulas asintóticas importantes son:

1. Fórmula de Stirling: $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.
2. $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$.
3. $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \gamma + \log(n) + o(1)$, donde $\gamma = 0,57721\dots$ es la constante de Euler.

1.2. Funciones aritméticas

Si $n \in \mathbb{N}_+$ entonces $\varphi(n)$ es la cantidad de enteros positivos menores o iguales que n y coprimos con n , es decir

$$\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{N}_+ : 1 \leq k \leq n \text{ y } \text{mcd}(k, n) = 1\}|.$$

Esta función es conocida como *función φ de Euler* y sus primeros valores son $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$. Esta

es la sucesión A000010 en la *On-line Encyclopedia of Integer Sequences*, lo que abreviaremos escribiendo OEIS A000010. El sitio web <https://oeis.org/> de esta enciclopedia es un recurso valiosísimo: escribiendo los primeros términos de una sucesión de enteros aparecen sucesiones conocidas con ese comienzo, junto con abundante información, fórmulas, estimaciones asintóticas, referencias, etc.

Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ es la descomposición de n como producto de factores primos, entonces

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \cdots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}).$$

La siguiente es una importante relación satisfecha por φ :

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

La función μ de Möbius se define para cada $n \in \mathbb{N}_+$ así:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ es producto de } r \text{ primos diferentes,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es divisible por un cuadrado mayor que } 1. \end{cases}$$

Así se tiene que $\mu(1) = 1$, $\mu(2) = \mu(3) = -1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(6) = 1, \dots$ (OEIS A008683).

Es fácil probar que si $n > 1$ entonces

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0.$$

Si $(b_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión y $a_n = \sum_{d|n} b_d$, entonces la *fórmula de inversión de Möbius* afirma que

$$b_n = \sum_{d|n} \mu(d) a_{n/d}.$$

Finalmente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)},$$

donde ζ es la famosa *función de Riemann*:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1.3. Probabilidad discreta

Sea X una variable aleatoria discreta, que puede tomar valores enteros no negativos $0, 1, 2, 3, \dots$. Sea $p_k = \mathbf{P}(X = k)$ la probabilidad de que X tome el valor k . Entonces la *función generatriz de momentos* de X es

$$g(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \dots = \sum_{n \geq 0} p_n x^n.$$

Como $\sum_{n \geq 0} p_n = 1$ esta serie de potencias converge en $[0, 1]$ y se puede derivar término a término. Luego

$$g'(x) = \sum_{n \geq 1} np_n x^{n-1}$$

y

$$g'(1) = \sum_{n \geq 1} np_n = \mathbf{E}(X)$$

es el *valor esperado* (o media) de X . Los demás momentos de la distribución de X pueden igualmente obtenerse a partir de f , por ejemplo la *varianza*

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}(X))^2 = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2.$$

Para ello observamos que

$$xg'(x) = \sum_{n \geq 1} np_n x^n$$

y por lo tanto, derivando,

$$\sum_{n \geq 1} n^2 p_n x^{n-1} = (xg'(x))' = g'(x) + xg''(x).$$

Evaluando en $x = 1$ resulta

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{n \geq 1} n^2 p_n = g'(1) + g''(1).$$

Por lo tanto

$$\mathbf{Var}(X) = g'(1) + g''(1) - (g'(1))^2.$$

Una identidad muy útil es la siguiente:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n \geq 1} np_n = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n p_n = \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq k} p_n = \sum_{k \geq 1} \mathbf{P}(X \geq k).$$

1.4. Combinatoria básica

El número de elementos de un conjunto finito A se denotará $|A|$.

Si A y B son conjuntos finitos disjuntos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$ (principio de la suma). Para A y B conjuntos finitos cualesquiera se tiene $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. La generalización de esta identidad a n conjuntos se conoce como “Principio de inclusiones y exclusiones”, y afirma que

$$\begin{aligned} |\cup_{i=1}^n A_i| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &+ \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cdots \cup A_n|. \end{aligned}$$

Para A y B conjuntos finitos cualesquiera se tiene $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ (principio del producto).

Si $|A| = n$, la cantidad de subconjuntos de A (incluidos A y el vacío \emptyset) es 2^n .

Si B es otro conjunto con k elementos, entonces la cantidad de funciones de B en A es n^k . Es decir que $|A^B| = |A|^{|B|}$. En particular la cantidad de k -tuplas (a_1, a_2, \dots, a_k) de elementos de A es n^k .

La cantidad de funciones inyectivas de B en A es $n(n-1) \cdots (n-k+1) = n^{\underline{k}}$. En particular la cantidad de k -tuplas (a_1, a_2, \dots, a_k) formadas por elementos diferentes de A es $n^{\underline{k}}$.

La cantidad de subconjuntos de A que tienen exactamente k elementos es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Estos números $\binom{n}{k}$ cuentan también el número de maneras de distribuir n objetos diferentes en dos cajas C_1 y C_2 , de modo que queden k objetos en C_1 y $n-k$ en C_2 .

Los números $\binom{n}{k}$ se conocen como *coeficientes binomiales*, ya que aparecen en la expansión de la potencia de un binomio:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Observe que la expresión $\binom{z}{k} = \frac{z^{\underline{k}}}{k!}$ tiene sentido para cualquier $z \in \mathbb{C}$.

En particular

$$\binom{-z}{k} = \frac{(-1)^k z^{\overline{k}}}{k!} = \frac{(-1)^k z(z+1)\cdots(z+k-1)}{k!} = (-1)^k \binom{z+k-1}{k}$$

y

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^k 1 \cdot 3 \cdots 2k-1}{k! \cdot 2^k} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{k!}.$$

Estos números aparecen en el Teorema del binomio de Newton: si el exponente α es real, entonces para $|x| < 1$ se cumple

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Por ejemplo

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n.$$

Si $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, con los n_i enteros no negativos, entonces el número de maneras de distribuir n objetos diferentes en k cajas C_1, C_2, \dots, C_k , de modo que queden n_i objetos en la caja C_i , viene dado por el *coeficiente multinomial*

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \cdots \ n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

Estos números aparecen en el Teorema multinomial:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1 \ \cdots \ n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}.$$

El número de funciones sobreyectivas de un conjunto de n elementos en otro de k elementos es igual al número de maneras de distribuir n objetos diferentes en k cajas diferentes de modo que ninguna caja quede vacía, que es

$$\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_k=n \\ n_1>0, \dots, n_k>0}} \binom{n}{n_1 \ \cdots \ n_k}.$$

El número de multiconjuntos de n elementos tomados de entre k posibles es $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$. Estas configuraciones se llaman “combinaciones con repetición de k elementos tomados de a n ” en la combinatoria tradicional.

Una *permutación* de un conjunto A es una biyección de A en sí mismo. Con la composición como operación, las permutaciones de A forman un grupo llamado *grupo simétrico* de A , que se denota $S(A)$. Si $|A| = n$, entonces $|S(A)| = n!$. En particular si $A = \{1, \dots, n\}$ entonces $S(A)$ se denota S_n . Las permutaciones $\sigma \in S_n$ suelen representarse en forma vertical como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

o bien en línea como $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$.

Un *ciclo* (a_1, a_2, \dots, a_k) es un tipo especial de permutación del conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ en la cual $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ para $i = 1, \dots, k-1$ y $\sigma(a_k) = a_1$. Toda permutación se puede expresar como la composición de ciclos disjuntos (es decir sin elementos comunes). Por ejemplo si

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 8 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

entonces $\sigma(1) = 3$, $\sigma(3) = 5$, $\sigma(5) = 8$, $\sigma(8) = 6$ y $\sigma(6) = 1$, formando un ciclo $(1, 3, 5, 8, 6)$. Del mismo modo se encuentran los ciclos $(2, 7)$ y el 1-ciclo (4) . Por lo tanto $\sigma = (1, 3, 5, 8, 6)(2, 7)(4)$.

Denotaremos $\lambda_i(\sigma)$ al número de ciclos de longitud i que aparecen en la descomposición de σ en producto de ciclos disjuntos. Es claro que si $\sigma \in S_n$ entonces $\sum_{i=1}^n i\lambda_i(\sigma) = n$.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son enteros no negativos tales que $\sum_{i=1}^n i\lambda_i = n$, entonces el número de permutaciones $\sigma \in S_n$ tales que $\lambda_i(\sigma) = \lambda_i$ para $i = 1, \dots, n$ viene dado por:

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!}.$$

Al número de permutaciones $\sigma \in S_n$ que se descomponen en producto de exactamente k ciclos disjuntos se le llama *número de Stirling de primera clase* y se denota $[n]_k$.

Una *partición* de un conjunto X es una colección $\{A_i : i \in I\}$ de subconjuntos no vacíos de X , llamados *bloques*, disjuntos dos a dos y tales

que su unión es X . El número de particiones que admite un conjunto de n elementos se denomina *número de Bell* de orden n . El número de particiones de un conjunto de n elementos en exactamente k bloques se denomina *número de Stirling de segunda clase* y se denota $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$. Es claro que el número de funciones sobreyectivas de un conjunto de n elementos en otro de k elementos es igual a $k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$, y por lo tanto

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n \\ n_1 > 0, \dots, n_k > 0}} \binom{n}{n_1 \dots n_k}.$$

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son enteros no negativos tales que $\sum_{i=1}^n i\lambda_i = n$, entonces el número de particiones de un conjunto de n elementos con λ_i clases de i elementos para $i = 1, \dots, n$ es:

$$\frac{n!}{(1!)^{\lambda_1} (2!)^{\lambda_2} \dots (n!)^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!}.$$

1.5. Grafos

Informalmente, un grafo es un conjunto de puntos, algunos pares de los cuales están unidos por líneas. La naturaleza de los puntos y las líneas no tiene importancia, lo que interesa es la relación de incidencia entre unos y otros, es decir saber cuáles son los extremos de cada línea, y de qué líneas es extremo cada punto.

Más formalmente definiremos un *grafo* como una estructura $G = (V, E)$ que consta de: (1) un conjunto finito V de elementos llamados *vértices* (o *puntos*, o *nodos*), (2) un conjunto finito E (disjunto de V) de elementos llamados *aristas* (o *líneas*, o *arcos*), y (3) una función que a cada arista le hace corresponder un par (ordenado o desordenado) de vértices, que se consideran los *extremos* de la arista. Puede darse el caso de que ambos extremos de una arista coincidan: una tal arista se denomina *bucle* o *lazo*. También puede ocurrir que dos aristas diferentes tengan el mismo par de extremos, caso en el cual se habla de aristas *múltiples* (a los grafos que tienen aristas múltiples se les llama *multigrafos*). Si los extremos de cada arista son un par desordenado de vértices $\{u, v\}$, se tiene un grafo *ordinario* (o *no orientado*). Si en cambio los extremos de cada arista son un par ordenado de vértices (u, v) , se tiene un grafo *dirigido* (o *digrafo*). En este caso las aristas también se denominan *arcos* y se

suelen representar mediante flechas; a u se le llama *origen* de la arista y a v *extremo*.

Un vértice y una arista son *incidentes* si el vértice es uno de los extremos de la arista. Dos vértices u y v son *adyacentes* si hay una arista que los tenga como extremos.

El *grado* de un vértice v de un grafo es el número $g(v)$ de aristas incidentes con él. Si $g(v) = 0$ se dice que v es un vértice *aislado*. En el caso de los digrafos se distingue el *grado saliente* de v (número de aristas de las cuales v es origen) del *grado entrante* (número de aristas de las cuales v es extremo).

Un *subgrafo* de $G = (V, E)$ es un grafo $H = (W, F)$ tal que $W \subset V$ y $F \subset E$.

Uno de los primeros resultados de la teoría de grafos se debe a Euler:

Teorema 1.5.1 (Euler). *En todo grafo $G = (V, E)$ se cumple*

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|E|.$$

En un *grafo simple* cada arista tiene un par (no ordenado) de vértices diferentes como extremos (no hay bucles). Además, para cada par de vértices hay a lo sumo una arista que los tiene como extremos. Por esta razón, si una arista tiene extremos u y v no hay ambigüedad en denotarla como uv .

Un grafo simple es *regular* si todos sus vértices tienen el mismo grado. Si el grado común es k se dice que el grafo es *k -regular*. A los grafos 3-regulares se les llama también grafos *cúbicos*.

Se llama *grafo completo* o *clique* de n vértices al grafo K_n con n vértices y $n(n-1)/2$ aristas, cada una de las cuales conecta un par de vértices diferentes.

Un grafo $G = (V, E)$ se dice que es *k -partito* si el conjunto de vértices V puede particionarse en $k > 1$ subconjuntos disjuntos, que llamaremos *bloques*, tales que ninguna arista de G tenga sus dos extremos en el mismo bloque. Si cada vértice de un bloque es adyacente a todos los vértices de los bloques restantes, entonces se dice que el grafo es *k -partito completo*. Estos grafos se denotan K_{n_1, n_2, \dots, n_k} , donde los n_i son el número de vértices en cada bloque. Los grafos 2-partitos se llaman también *bipartitos*.

Un *camino* de longitud n es un grafo simple $G = (V, E)$ con $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $E = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n\}$. Los vértices v_0 y v_n son los *extremos* del camino. Observe que un grafo con un solo vértice es un camino de longitud 0.

Un *ciclo* de longitud n es un grafo simple $G = (V, E)$ de orden $n \geq 3$, con vértices v_1, v_2, \dots, v_n y aristas $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ y v_nv_1 .

Un *camino* en un grafo G es un subgrafo de G que sea él mismo un camino.

Un *ciclo* en un grafo G es un subgrafo de G que sea él mismo un ciclo.

Un grafo $G = (V, E)$ es *conexo* si para cualquier par de vértices $u, v \in V$ existe un camino en G que los une, es decir un camino con extremos u y v . Un *árbol* es un grafo conexo sin ciclos.

1.6. Enumeración bajo acción de grupos

Sean G un grupo con elemento identidad e y A un conjunto. Una *acción* de G sobre A es una aplicación $(g, x) \mapsto gx$ de $G \times A$ en A tal que:

1. $ex = x$ para todo $x \in A$.
2. $g(hx) = (gh)x$ para todos los $g, h \in G$ y $x \in A$.

Cada acción de G sobre A induce una relación de equivalencia \sim en A definida así:

$$x \sim y \text{ si existe } g \in G \text{ tal que } y = gx.$$

Es fácil ver que \sim es reflexiva, transitiva y simétrica. A las clases de equivalencia determinadas por esta relación se les llama *órbitas*. La órbita de $x \in A$ es $\{gx : g \in G\}$ y se denotará Gx o \bar{x} . El conjunto de órbitas es el conjunto cociente A/\sim , que se denotará \bar{A} .

Para cada $g \in G$ la aplicación $\theta_g : A \rightarrow A$ definida por $\theta_g(x) = gx$ es claramente inyectiva y sobre, es decir que es una biyección de A en A , o sea un elemento del grupo simétrico $S(A)$. Además la aplicación $\theta : G \rightarrow S(A)$ definida por $\theta(g) = \theta_g$ es un homomorfismo.

El *estabilizador* de un elemento $x \in A$ es el conjunto G_x de elementos de G que dejan fijo a x , es decir $G_x = \{g \in G : gx = x\}$. Es claro que G_x es un subgrupo de G , y que los estabilizadores de elementos de una misma órbita son subgrupos conjugados.

Si $g \in G$ entonces se define $A_g = \{x \in A : gx = x\}$ (puntos de A que quedan fijos por g). Observemos que $x \in A_g$ si y sólo si $g \in G_x$.

Proposición 1.6.1. *Si G actúa sobre A y $x \in A$, entonces existe una biyección entre \bar{x} y las coclases izquierdas de G_x . En particular si G es finito entonces $|\bar{x}| = [G : G_x] = |G|/|G_x|$.*

Demostración. Si $h, k \in G$ entonces $hx = kx$ sii $x = h^{-1}kx$, es decir sii $h^{-1}k \in G_x$ o lo que es lo mismo $k \in hG_x$. Luego la aplicación que a la coclase hG_x le hace corresponder hx es una biyección del conjunto de coclases izquierdas de G_x en \bar{x} . \square

El siguiente resultado da respuesta al problema de contar el número de órbitas:

Corolario 1.6.1 (Lema de Cauchy-Frobenius-Burnside). *Si G es un grupo finito que actúa sobre un conjunto A entonces el número de órbitas viene dado por*

$$|\bar{A}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |A_g|.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |A_g| &= \sum_{g \in G} \sum_{x \in A_g} 1 = \sum_{x \in A} \sum_{g \in G_x} 1 = \sum_{x \in A} |G_x| \\ &= \sum_{Y \in \bar{A}} \sum_{x \in Y} |G_x| = \sum_{Y \in \bar{A}} |Y| \cdot |G_x| \\ &= \sum_{Y \in \bar{A}} \frac{|G|}{|G_x|} |G_x| = |G| \cdot |\bar{A}|. \end{aligned}$$

\square

Con la misma idea puede obtenerse un resultado más general. Sea G un grupo finito que actúa sobre un conjunto A , y sea Z un grupo aditivo. Supongamos que $p : A \rightarrow Z$ es una función tal que $p(gx) = p(x)$ para todo $g \in G$ y todo $x \in A$. Sea $\bar{p} : \bar{A} \rightarrow Z$ la única función tal que $\bar{p}(\bar{x}) = p(x)$ para todo $x \in A$. Entonces se tiene que:

Proposición 1.6.2.

$$\sum_{\bar{x} \in \bar{A}} \bar{p}(\bar{x}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in A_g} p(x).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \sum_{x \in A_g} p(x) &= \sum_{x \in A} \sum_{g \in G_x} p(x) = \sum_{x \in A} |G_x| p(x) = \sum_{\bar{x} \in \bar{A}} \sum_{x \in \bar{x}} (|G|/|\bar{x}|) p(x) \\ &= \sum_{\bar{x} \in \bar{A}} \sum_{x \in \bar{x}} (G/|\bar{x}|) \bar{p}(\bar{x}) = \sum_{\bar{x} \in \bar{A}} |G| \bar{p}(\bar{x}) = |G| \sum_{\bar{x} \in \bar{A}} \bar{p}(\bar{x}) \end{aligned}$$

□

Sea ahora D un conjunto y G un subgrupo de $S(D)$. Sea C un conjunto de “colores” y $A = C^D$ el conjunto de las funciones de D en C , que consideraremos como *coloraciones* o maneras de pintar los elementos de D . Si para $g \in G$ y $f \in A$ se define $gf = f \circ g^{-1}$, es inmediato verificar que se obtiene una acción de G sobre A , conocida como *acción de Polya*).

Proposición 1.6.3. *El número de órbitas en la acción de Polya es*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |C|^{\lambda(g)}$$

donde $\lambda(g)$ el número de factores en la descomposición de g en producto de ciclos disjuntos.

Demostración: Por el lema de Cauchy-Frobenius-Burnside (1.6.1) el número de órbitas es $(1/|G|) \sum_{g \in G} |A_g|$. Ahora bien, A_g está constituido por todas las coloraciones $f : D \rightarrow C$ tales que $f \circ g^{-1} = f$, que son las coloraciones que asignan el mismo color a todos los elementos de cada ciclo de g . Esto significa que hay tantos elementos en A_g como formas de asignar un color de C a cada ciclo de g , y este número es precisamente $|C|^{\lambda(g)}$. □

Ejemplo 1.6.1. Supongamos que se quiere pintar cada cara de un cubo de un mismo color, y que se dispone de r colores. Si el cubo está en una posición fija, o lo que es lo mismo si las caras son distinguibles, esto se puede hacer de r^6 maneras. Pero si el cubo se puede rotar el número de coloraciones «esencialmente diferentes» es menor, pues hay coloraciones que se pueden hacer coincidir mediante una rotación. El grupo de rotaciones del cubo está constituido por 24 rotaciones, que clasificaremos en 5 tipos:

1. La identidad, que se descompone en seis 1-ciclos.
2. Rotaciones de 120° y 240° alrededor de las diagonales del cubo. Como hay cuatro diagonales. Hay 8 rotaciones de este tipo, que se descomponen en dos 3-ciclos cada una.
3. Rotaciones de 90° y 270° alrededor de los 3 ejes que pasan por los centros de caras opuestas del cubo. Son 6 rotaciones, que se descomponen en dos 1-ciclos y un 4-ciclo cada una (total: tres ciclos cada una).
4. Rotaciones de 180° alrededor de los mismos ejes que las del tipo anterior. Son 3 rotaciones, que se descomponen en en dos 1-ciclos y dos 2-ciclos (total: cuatro ciclos cada una).
5. Rotaciones de 180° alrededor de los ejes que pasan por los puntos medios de aristas opuestas. Hay 6 rotaciones de este tipo, que se descomponen en tres 2-ciclos cada una.

Entonces el número de coloraciones no equivalentes por rotación es:

$$\frac{1}{24}(r^6 + 8r^2 + 6r^3 + 3r^4 + 6r^3) = \frac{1}{24}r^2(r^4 + 3r^2 + 12r + 8).$$

Por ejemplo con dos colores hay 10, cosa que se puede verificar fácilmente. Pero ya no es tan fácil verificar que con 3 colores hay 57.

En lo que sigue supondremos que $C = \{1, 2, \dots, r\}$ (esto equivale a “numerar” los colores). Sea $K = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_r]$ el anillo de los polinomios en r variables con coeficientes racionales. Definamos una función $p : C^D \rightarrow K$ del modo siguiente: si $f \in C^D$, entonces

$$p(f) = \prod_{d \in D} x_{f(d)}.$$

Es claro que $p(f)$ es un monomio de grado $n = |D|$ en las variables x_1, \dots, x_r y que el exponente de x_k en $p(f)$ es el número de puntos de D pintados con el color k en la coloración f .

Observemos además que $p(gf) = p(f)$ para todo $g \in G$. En efecto,

$$p(gf) = \prod_{d \in D} x_{f(g^{-1}(d))},$$

pero como g es una biyección de D en D , cuando d toma todos los valores en D también lo hace $g^{-1}(d)$. Por lo tanto el último producto es igual a $p(f)$. Esto significa que estamos en condiciones de aplicar la Proposición (1.6.2) y obtenemos:

$$\sum_{\bar{f} \in \bar{A}} \bar{p}(\bar{f}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{f \in A_g} p(f)$$

Ahora bien, $f \in A_g$ si y sólo si f asigna el mismo color a los elementos de cada ciclo de g . Por lo tanto si $g \in G$ se descompone en λ ciclos c_1, \dots, c_λ de longitudes a_1, \dots, a_λ y si f asigna el color i_j a los elementos del ciclo c_j entonces $p(f)$ será de la forma $x_{i_1}^{a_1} \dots x_{i_\lambda}^{a_\lambda}$. Más aún, p establece una correspondencia biyectiva entre los monomios del tipo antedicho y las coloraciones $f \in A_g$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{f \in A_g} p(f) &= \sum x_{i_1}^{a_1} \dots x_{i_\lambda}^{a_\lambda} \\ &= (x_1^{a_1} + \dots + x_r^{a_1})(x_1^{a_2} + \dots + x_r^{a_2}) \dots (x_1^{a_\lambda} + \dots + x_r^{a_\lambda}) \\ &= \psi_{a_1}(x_1, \dots, x_r) \psi_{a_2}(x_1, \dots, x_r) \dots \psi_{a_\lambda}(x_1, \dots, x_r) \end{aligned}$$

siendo ψ_k las funciones simétricas

$$\psi_k(x_1, \dots, x_r) = x_1^k + \dots + x_r^k.$$

Cada ψ_k aparece en el producto $\psi_{a_1} \psi_{a_2} \dots \psi_{a_\lambda}$ tantas veces como ciclos de longitud k aparezcan en la descomposición de g , es decir $\lambda_k(g)$. Hemos probado entonces el siguiente teorema:

Teorema de Polya 1.6.4.

$$\sum_{\bar{f} \in \bar{A}} \bar{p}(\bar{f}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{k=1}^n \psi_k(x_1, \dots, x_n)^{\lambda_k(g)}$$

□

Si se define el *polinomio indicador de ciclos* del grupo G como

$$P_G(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{\lambda_1(g)} \dots x_n^{\lambda_n(g)},$$

entonces el Teorema de Polya puede enunciarse así:

$$\sum_{\bar{f} \in \bar{A}} \bar{p}(\bar{f}) = P_G(\psi_1(x_1, \dots, x_r), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_r)).$$

Supongamos ahora que cada color $k \in C$ tiene un *peso* entero no negativo $w(k)$, y sea c_n el número de colores de peso n . Aquí C no es necesariamente finito, pero supondremos que cada c_n es finito. Sea $c(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$. Si C es finito entonces $c(z)$ es un polinomio, si no la consideraremos una serie formal (ver capítulo siguiente) sin preocuparnos por la convergencia. La función peso se puede extender a las coloraciones $f \in A$ poniendo $w(f) = \sum_{d \in D} w(f(d))$. Si $g \in S(D)$ entonces

$$w(gf) = \sum_{d \in D} w(f(g^{-1}(d))) = \sum_{d \in D} w(f(d)) = w(f),$$

ya que cuando d recorre D también lo hace $g^{-1}(d)$. Luego w toma el mismo valor en los elementos de cada órbita (clase de equivalencia de coloraciones), y se puede definir $\bar{w} : \bar{A} \rightarrow C$ de modo que $\bar{w}(\bar{f}) = w(f)$. Sea b_n el número de órbitas con elementos de peso total n , y sea $b(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$. Entonces se tiene la siguiente versión del teorema de Polya:

Teorema de Redfield-Polya con pesos 1.6.5.

$$b(z) = P_G(c(z), c(z^2), \dots, c(z^n)).$$

Los detalles de la demostración pueden verse por ejemplo en [7].

Nota: Aunque los resultados fundamentales de la llamada “Teoría de Polya” fueron obtenidos en primer lugar por J. H. Redfield (ver [28]), pasaron desapercibidos durante muchos años hasta que Polya [27], de Bruijn [6] y otros matemáticos los redescubrieron y enriquecieron.

Capítulo 2

Series de potencias formales

LAS series de potencias formales son una generalización de los polinomios, pero con infinitos términos. Lo que se busca es poder operar formalmente con series de potencias con coeficientes en un anillo, sin preocuparse por las delicadas cuestiones de convergencia que se plantean en el análisis real y complejo. Las series formales son una herramienta básica de la combinatoria simbólica, pues sintetizan toda la información combinatoria de una clase de objetos. En los capítulos siguientes se utilizarán para construir las funciones generatrices ordinarias de las clases no etiquetadas y las funciones generatrices exponenciales de las clases etiquetadas.

2.1. Definiciones

Definición 2.1.1. Si A es un anillo conmutativo con unidad, se define $A[[z]]$ como el conjunto $A^{\mathbb{N}}$ de las sucesiones $(a_n)_{n \geq 0}$ de elementos de A .

Con las operaciones

$$\begin{aligned}(a_n) + (b_n) &= (a_n + b_n), \\ (a_n)(b_n) &= \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right),\end{aligned}$$

es fácil ver que $A[[z]]$ se convierte en un anillo conmutativo, con neutro aditivo $0 = (0, 0, 0, \dots)$ y unidad $1 = (1, 0, 0, \dots)$. El anillo de polinomios $A[z]$ es el subanillo de $A[[z]]$ formado por las sucesiones $(a_n)_{n \geq 0}$ eventualmente nulas, es decir aquellas para las cuales existe un entero $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0$ para todo $n \geq n_0$.

Los elementos de $A[[z]]$ se escriben usualmente en forma de serie: $a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$ o bien $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Pero observe que no se supone que z tome valores, se trata simplemente de un símbolo indeterminado.

Si $a(z) \in A[[z]]$ entonces la notación $[z^n]a(z)$ se usa para denotar el coeficiente de z^n en $a(z)$, es decir que si $a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ entonces $[z^n]a(z) = a_n$.

Por analogía con los casos real y complejo se pueden definir la exponencial, el seno y el coseno como las series formales

$$\begin{aligned} \exp(z) &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, \\ \text{sen}(z) &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, \\ \text{cos}(z) &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots. \end{aligned}$$

También se pueden considerar series formales multivariadas. Se define $A[[z_1, z_2]] = A[[z_1]][[z_2]]$, $A[[z_1, z_2, z_3]] = A[[z_1, z_2]][[z_3]]$ y en general $A[[z_1, z_2, \dots, z_n]] = A[[z_1, z_2, \dots, z_{n-1}]] [[z_n]]$ para $n > 1$. Un elemento de $A[[u, v]]$ se puede escribir como $\sum_{k \geq 0} (\sum_{n \geq 0} a_{n,k} u^n) v^k$ o bien como $\sum_{n,k \geq 0} a_{n,k} u^n v^k$.

Este tipo de series aparecen con frecuencia al tratar números combinatorios que dependen de parámetros. Por ejemplo la serie $\sum_{n,k \geq 0} \binom{n}{k} u^n v^k$ de los coeficientes binomiales.

EJERCICIO 2.1.1. Obtenga $(1 + z + z^2 + z^3 + \dots)^2$.

EJERCICIO 2.1.2. Obtenga $(1 + z + z^2 + z^3 + \dots)^n$ para cualquier n natural.

EJERCICIO 2.1.3. Pruebe formalmente que $\text{sen}(z)^2 + \text{cos}(z)^2 = 1$.

2.2. Inversa multiplicativa

En lo sucesivo supondremos que A es un cuerpo de característica 0 (en realidad para las necesidades de este libro sólo se necesita el cuerpo de los complejos \mathbb{C}).

Probaremos que las series $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ con $a_0 \neq 0$ tienen inversa multiplicativa en $A[[z]]$. En efecto

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n \right) = 1$$

equivale a

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1, \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0, \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

de donde se despejan sucesivamente

$$b_0 = a_0^{-1}, \quad b_1 = -a_1 b_0 a_0^{-1}, \quad b_2 = -(a_1 b_1 + a_2 b_0) a_0^{-1}, \dots$$

Por ejemplo de

$$(1 - z) \left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n \right) = 1$$

se obtienen $b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1, \dots$ de donde

$$(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

EJERCICIO 2.2.1. Halle la inversa multiplicativa de $1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots$

EJERCICIO 2.2.2. Idem para $1 - 2z + z^2$.

EJERCICIO 2.2.3. Idem para $1 - z - z^2$.

EJERCICIO 2.2.4. Muestre que

$$\sum_{n, k \geq 0} \binom{n}{k} u^n v^k = (1 - u(1 + v))^{-1}.$$

2.3. Topología formal

Aunque con las series formales se trata de evitar las complicaciones de la convergencia, para avanzar en esta teoría es necesario definir algún tipo de convergencia, procurando que sea lo más simple posible.

Definición 2.3.1. Si $a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in A[[z]]$ entonces $\text{val}(a(z))$ es el menor entero n tal que $a_n \neq 0$ (si $a(z) = 0$ entonces $\text{val}(a(z)) = +\infty$).

Observe que si $b(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ entonces

$$\text{val}(a(z)b(z)) = \text{val}(a(z)) + \text{val}(b(z))$$

y

$$\text{val}(a(z) + b(z)) \geq \min\{\text{val}(a(z)), \text{val}(b(z))\}.$$

Definición 2.3.2. La distancia formal entre dos elementos $a, b \in A[[z]]$ es

$$d(a, b) = 2^{-\text{val}(a-b)}.$$

Es fácil verificar que d es una métrica, es decir que para todos los $a, b, c \in A[[z]]$ se tiene $d(a, b) \geq 0$, $d(a, b) = d(b, a)$, $d(a, b) = 0$ si y sólo si $a = b$, y $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$.

Más aún, d es una *ultramétrica* ya que como

$$\text{val}(a - c) \geq \min\{\text{val}(a - b), \text{val}(b - c)\}$$

entonces

$$\begin{aligned} d(a, c) &= 2^{-\text{val}(a-c)} \leq \max\{2^{-\text{val}(a-b)}, 2^{-\text{val}(b-c)}\} \\ &= \max\{d(a, b), d(b, c)\}. \end{aligned}$$

Dos propiedades de esta métrica fáciles de verificar son

$$d(a + b + \cdots + h, 0) \leq \max\{d(a, 0), d(b, 0), \dots, d(h, 0)\}.$$

y

$$d(ab \cdots h, 0) = d(a, 0) d(b, 0) \cdots d(h, 0).$$

Con esta métrica $A[[z]]$ tiene diámetro 1, ya que $d(a, b) \leq 1$ para todos los $a, b \in A[[z]]$ y $d(0, 1) = 1$.

Observe que $d(a, b) < 2^{-n}$ si y sólo si $a_i = b_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$.

La topología inducida por d se llama *topología formal*, o de la convergencia formal. Es fácil verificar que las operaciones de suma y producto en $A[[z]]$ son continuas en esta topología, con lo cual $A[[z]]$ se convierte en un anillo topológico.

Además $A[[z]]$ es completo respecto a d . En efecto, si $\{a^{(n)}\}$ es una sucesión de Cauchy en $A[[z]]$ entonces, para cada entero $k > 0$, existe $N(k)$ tal que $d(a^{(n)}, a^{(m)}) < 2^{-k}$ para todos los $m, n \geq N(k)$. Esto quiere decir que los primeros $k + 1$ coeficientes de $a^{(n)}$ se estabilizan para $n \geq N(k)$. Poniendo $b_k = a_k^{(N(k))}$ es claro que $\{a^{(n)}\}$ converge a $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$.

Una serie $a^{(0)} + a^{(1)} + a^{(2)} + \dots$ de elementos de $A[[z]]$ converge formalmente si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{(n)} = 0$ en la topología formal. En efecto, si $a^{(n)} \rightarrow 0$ entonces

$$d(a^{(m)} + a^{(m+1)} + \dots + a^{(m+p)}, 0) \leq \max\{d(a^{(m)}, 0), \dots, d(a^{(m+p)}, 0)\}$$

y como el miembro derecho tiende a 0 cuando $m \rightarrow +\infty$, la serie es de Cauchy y por completitud converge. Recíprocamente si la serie converge a b entonces como

$$d(a^{(n)}, 0) = d\left(\sum_{i=0}^n a^{(i)}, \sum_{i=0}^{n-1} a^{(i)}\right) \leq d\left(\sum_{i=0}^n a^{(i)}, b\right) + d\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{(i)}, b\right)$$

se sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{(n)} = 0$. Un resultado equivalente es que una sucesión $(a^{(n)})$ de elementos de $A[[z]]$ converge formalmente si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{(n+1)} - a^{(n)}) = 0$.

Análogamente pueden considerarse productos infinitos $\prod_{n \leq 0} (1 + a^{(n)})$, los cuales convergen formalmente si $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{(n)} = 0$. En efecto,

$$\prod_{k=0}^{n+1} (1 + a^{(k)}) - \prod_{k=0}^n (1 + a^{(k)}) = a^{(n+1)} \prod_{k=0}^n (1 + a^{(k)}),$$

y

$$d\left(a^{(n+1)} \prod_{k=0}^n (1 + a^{(k)}), 0\right) = d(a^{(n+1)}, 0) \prod_{k=0}^n d(1 + a^{(k)}, 0) \leq d(a^{(n+1)}, 0),$$

de donde el producto converge.

2.4. Composición

Si $a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ y $b(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$, es natural considerar la composición

$$a(b(z)) = a_0 + a_1 b(z) + a_2 b(z)^2 + a_3 b(z)^3 + \cdots \quad (1)$$

Pero esto podría no tener sentido, ya que por ejemplo el término constante debería ser

$$a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + a_3 b_0^3 + \cdots$$

que en general no está definido.

Sin embargo si $b_0 = 0$ entonces (1) converge en la topología formal (pues $d(a_n b(z)^n, 0) \leq 2^{-n} \rightarrow 0$) y define un elemento de $A[[z]]$.

En este caso, si

$$\begin{aligned} a(b(z)) &= a_0 + a_1(b_1 z + b_2 z^2 + \cdots) + a_2(b_1 z + b_2 z^2 + \cdots)^2 + \cdots \\ &= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \end{aligned}$$

entonces $c_0 = a_0$, $c_1 = a_1 b_1$, $c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2$, y en general, para $n \geq 1$,

$$c_n = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n, \\ i_1 > 0, i_2 > 0, \dots, i_k > 0}} a_k b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_k}$$

Como el coeficiente de z^n en $a(b(c(z)))$ depende solamente de los coeficientes de términos de grado $\leq n$ en a , b y c , la asociatividad de la composición se desprende del resultado correspondiente para polinomios.

Ejemplo 2.4.1.

$$\begin{aligned} \exp(\exp(z) - 1) &= 1 + \frac{1}{1!}(\exp(z) - 1) + \frac{1}{2!}(\exp(z) - 1)^2 + \cdots \\ &= 1 + \left(\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \right)^2 + \cdots \\ &= 1 + z + z^2 + \frac{5}{6}z^3 + \frac{5}{8}z^4 + \cdots \end{aligned}$$

EJERCICIO 2.4.1. Pruebe que si $a_0 = b_0 = 0$ entonces

$$\exp(a(z) + b(z)) = \exp(a(z)) \exp(b(z)).$$

EJERCICIO 2.4.2. Pruebe formalmente que $\operatorname{sen}(2z) = 2 \operatorname{sen}(z) \cos(z)$.

2.5. Inversión

Dos series formales $a(z)$ y $b(z)$ se dice que son *inversas* respecto a la composición si

$$a(b(z)) = b(a(z)) = z.$$

Si $b_0 = 0$ y $b_1 \neq 0$ entonces de

$$a(b(z)) = a_0 + a_1(b_1z + b_2z^2 + \cdots) + a_2(b_1z + b_2z^2 + \cdots)^2 + \cdots = z$$

se pueden despejar sucesivamente los a_i . En efecto $a_0 = 0$, $a_1 = b_1^{-1}$, $a_2 = -a_1b_2b_1^{-2}$, $a_3 = -a_1b_3b_1^{-3} - 2a_2b_2b_1^{-2}, \dots$ Por lo tanto existe una única $a(z)$ que es inversa por la izquierda de $b(z)$. Como $a_0 = 0$ y $a_1 \neq 0$, el mismo argumento muestra que existe una inversa por la izquierda $c(z)$ de $a(z)$. Pero entonces $b(z) = c(a(b(z))) = c(z)$, y resulta que $a(z)$ y $b(z)$ son inversas respecto a la composición.

Las propiedades de las series de potencias con radio de convergencia positivo en \mathbb{R} o \mathbb{C} por lo general son también válidas formalmente. Esto se debe a que, si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ y $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ son series convergentes en \mathbb{C} para $|z| < r$, y la igualdad $\sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ se verifica para $|z| < r$ (o incluso para un subconjunto del disco $|z| < r$ que tenga un punto de acumulación), entonces $a_n = b_n$ para todo $n \geq 0$.

Así por ejemplo, como $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \log(1+x)$ para $-1 < x < 1$ y $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} x^n = \exp(x) - 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k!} \right)^n = \log(1 + (\exp(x) - 1)) = x$$

para $-1 < x < 1$, de donde se sigue que las series formales $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!}$ y $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ son inversas formales (sobre cualquier cuerpo de característica 0).

Por esa razón usaremos la notación $\log(1+z)$ para referirnos a la serie

$$\log(1+z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

Del mismo modo, aunque es fácil probar formalmente que si $a_0 = b_0 = 0$ entonces $\exp(a(z) + b(z)) = \exp(a(z)) \exp(b(z))$ (ver Ejercicio 2.4.1),

no parece sencillo probar formalmente su correlativa $\log(a(z)b(z)) = \log(a(z)) + \log(b(z))$ (suponiendo $a_0 = b_0 = 1$). Pero como

$$\exp(\log(a(z)) + \log(b(z))) = \exp(\log(a(z))) \exp(\log(b(z))) = a(z)b(z),$$

componiendo con la inversa formal resulta

$$\log(a(z)b(z)) = \log(\exp(\log(a(z)) + \log(b(z)))) = \log(a(z)) + \log(b(z)).$$

Existe un método bastante efectivo para calcular inversas, conocido como *Inversión de Lagrange*, que se verá más adelante pues su justificación requiere técnicas de análisis complejo (ver Teorema 6.1.1, pág. 83).

EJERCICIO 2.5.1. Pruebe que $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} = \log\left(\frac{1}{1-z}\right)$.

2.6. Derivación

Definición 2.6.1. Si $a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in A[[z]]$, entonces su derivada formal es $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ y se designa $Da(z)$ o $a'(z)$.

Las derivadas sucesivas de a se denotan D^2a , D^3a , etc. La derivada formal tiene muchas de las propiedades de la derivada usual en análisis, en particular:

1. Linealidad: si $a, b \in A[[z]]$ y $\lambda, \mu \in A$, entonces

$$D(\lambda a + \mu b) = \lambda Da + \mu Db.$$

2. Derivada de un producto: $D(ab) = (Da)b + a(Db)$.

3. Regla de la cadena: Si $b_0 = 0$, entonces

$$D(a(b(z))) = Da(b(z))Db(z).$$

4. Extracción de coeficientes: $[z^k] \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \frac{(D^k a)_0}{k!}$.

EJERCICIO 2.6.1. Pruebe las propiedades mencionadas de la derivada formal.

EJERCICIO 2.6.2. Derivando $k-1$ veces $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ pruebe que

$$\frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n \geq 0} \binom{k+n-1}{n} z^n.$$

Capítulo 3

Clases combinatorias ordinarias

EN este capítulo se introducen las clases combinatorias ordinarias (no etiquetadas) y sus correspondientes funciones generatrices. Se examinan varias construcciones básicas que permiten, a partir de una o más clases, obtener otras nuevas, así como su correspondiente reflejo sobre las funciones generatrices, lo cual constituye la idea central de la combinatoria simbólica.

3.1. Introducción

Definición 3.1.1. *Una clase combinatoria es un conjunto finito o infinito numerable \mathcal{C} junto con una función $t : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que $t^{-1}(n)$ es finito para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Como no trataremos de otras clases que no sean las combinatorias, por lo general y para abreviar nos referiremos a ellas simplemente como *clases*. La función t asocia a cada objeto α de la clase un *tamaño* o *peso* $t(\alpha)$. La condición impuesta significa que para cada $n \in \mathbb{N}$ hay sólo un número finito de objetos en la clase con tamaño n . En lugar de $t(\alpha)$ se suele escribir $|\alpha|$, o $|\alpha|_{\mathcal{C}}$ si se desea hacer explícita la clase en la que se está trabajando.

El subconjunto de \mathcal{C} formado por los objetos de tamaño n se denotará \mathcal{C}_n , y su cardinal por c_n (es decir que $c_n = |\mathcal{C}_n|$).

Definición 3.1.2. *Dos clases \mathcal{A} y \mathcal{B} son combinatoriamente isomorfas (y se escribe $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$) si existe una biyección $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $|\psi(\alpha)|_{\mathcal{B}} = |\alpha|_{\mathcal{A}}$ para toda $\alpha \in \mathcal{A}$. A una tal biyección ψ se le llama isomorfismo combinatorio.*

Definición 3.1.3. *La función generatriz ordinaria (fgo) de una clase combinatoria \mathcal{C} es la serie formal $c(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$.*

Definición 3.1.4. *La función generatriz exponencial (fge) de una clase combinatoria \mathcal{C} es la serie formal $c(z) = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{z^n}{n!}$.*

En el resto de este capítulo trabajaremos con funciones generatrices ordinarias. Las funciones generatrices exponenciales son útiles sobre todo en el contexto de las clases combinatorias etiquetadas, que se estudiarán en un capítulo posterior. Hay otro tipo de funciones generatrices que no se tratarán en esta obra: las de Dirichlet $\sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{n^s}$, importantes en teoría analítica de números (ver [32]).

Observe que una clase es finita si y sólo si su fgo es un polinomio.

La fgo de una clase \mathcal{C} se puede expresar también en la forma

$$c(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} z^{|\alpha|},$$

ya que para cada $n \in \mathbb{N}$ hay un número finito c_n de objetos $\alpha \in \mathcal{C}$ tales que $|\alpha| = n$, y la agrupación de los correspondientes términos $z^{|\alpha|}$ nos da $c_n z^n$.

Ejemplo 3.1.1. Sea \mathcal{S} la clase formada por los subconjuntos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, siendo $|A|$ el número de elementos de A . Su fgo es

$$s(z) = \sum_{n=0}^5 \binom{5}{n} z^n = (1+z)^5.$$

Ejemplo 3.1.2.

Sea $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ con $|i| = i$. Su fgo es

$$n(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1-z}.$$

La fgo de una clase determina por completo el número de objetos de cada tamaño que hay en la clase. Por lo tanto dos clases \mathcal{B} y \mathcal{C} tienen la misma fgo si y sólo si existe una biyección entre ellas que preserva la función tamaño. Es decir que

Proposición 3.1.1. *Dos clases son combinatoriamente isomorfas si y sólo si tienen la misma fgo.*

Un par de clases elementales que resultará útil tener a mano son la clase *neutral* \mathcal{E} , constituida por un único objeto de tamaño cero, y la clase *atómica* \mathcal{Z} constituida por un único objeto de tamaño 1. A veces se escribe el único objeto de \mathcal{E} como subíndice, por ejemplo $\mathcal{E}_0 = \{0\}$, $\mathcal{E}_1 = \{1\}$. Análogamente para \mathcal{Z} : $\mathcal{Z}_\alpha = \{\alpha\}$, $\mathcal{Z}_\bullet = \{\bullet\}$, etc. Observe que la fgo de \mathcal{E} es 1 y la de \mathcal{Z} es z .

En el resto del capítulo se examinarán varios métodos para obtener nuevas clases a partir de clases conocidas. Nos interesan particularmente las construcciones que tengan un reflejo en las fgos, es decir aquellas que sean *admisibles* en el sentido de la siguiente definición.

Definición 3.1.5. *Una construcción que asocia a un conjunto de clases $\mathcal{B}^{(1)}, \mathcal{B}^{(2)}, \dots, \mathcal{B}^{(k)}$ una nueva clase $\mathcal{C} = \Psi(\mathcal{B}^{(1)}, \mathcal{B}^{(2)}, \dots, \mathcal{B}^{(k)})$ se dice que es admisible si la fgo de \mathcal{C} depende solamente de las fgos de $\mathcal{B}^{(1)}, \mathcal{B}^{(2)}, \dots, \mathcal{B}^{(k)}$.*

3.2. Producto cartesiano

Definición 3.2.1. *El producto cartesiano de dos clases \mathcal{B} y \mathcal{C} es la clase $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ formada por los pares ordenados de elementos de \mathcal{B} y \mathcal{C} :*

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C} = \{(\beta, \gamma) : \beta \in \mathcal{B}, \gamma \in \mathcal{C}\},$$

con $|(\beta, \gamma)|_{\mathcal{A}} = |\beta|_{\mathcal{B}} + |\gamma|_{\mathcal{C}}$.

Debido a la definición del tamaño en $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ es claro que $a_n = \sum_{k=0}^n b_k c_{n-k}$, es decir que la sucesión (a_n) es la *convolución* de las sucesiones (b_n) y (c_n) , por lo tanto $a(z) = b(z)c(z)$. Es decir que el producto cartesiano de clases es una construcción admisible y su fgo es el producto de las fgos de las clases componentes. Otra manera de probar este hecho

es la siguiente:

$$a(z) = \sum_{(\beta, \gamma) \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}} z^{|\beta|+|\gamma|} = \left(\sum_{\beta \in \mathcal{B}} z^{|\beta|} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{C}} z^{|\gamma|} \right) = b(z) + c(z).$$

El producto cartesiano es conmutativo y asociativo, es decir

$$\mathcal{B} \times \mathcal{C} \cong \mathcal{C} \times \mathcal{B}, \quad (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C} \cong \mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C}).$$

En vista de esto el producto cartesiano de varias clases se puede escribir sin necesidad de usar paréntesis.

Observe que para cualquier clase \mathcal{A} se cumple $\mathcal{A} \cong \mathcal{A} \times \mathcal{E} \cong \mathcal{E} \times \mathcal{A}$.

Ejemplo 3.2.1.

Sea \mathcal{P} la clase formada por los pares ordenados (i, j) de enteros no negativos, con $|(i, j)| = i + j$. Observe que $\mathcal{P} = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, donde \mathcal{N} es la clase definida en el Ejemplo 3.1.2. Como $n(z) = 1/(1-z)$, resulta que $p(z) = 1/(1-z)^2$. Pero es fácil ver que $p_n = n + 1$, lo que nos da otra prueba de la identidad formal

$$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

3.3. Suma combinatoria

Si \mathcal{B} y \mathcal{C} son clases disjuntas, la unión $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ se puede convertir en una clase tomando como tamaño de cada objeto de \mathcal{A} el tamaño que tenga en \mathcal{B} o \mathcal{C} . Sin embargo si \mathcal{B} y \mathcal{C} tienen elementos comunes las cosas se complican: por una parte el tamaño de un elemento común podría ser diferente en \mathcal{B} que en \mathcal{C} , y por otra parte el número a_n de objetos de tamaño n en la unión dependería no solamente de los b_i y c_i , sino también de la cantidad de elementos comunes. Esto significa que la unión conjuntista de clases *no es una construcción admisible*. Para superar este obstáculo se pueden tomar dos copias disjuntas de las clases \mathcal{B} y \mathcal{C} , digamos $\mathcal{B}' \cong \mathcal{B}$ y $\mathcal{C}' \cong \mathcal{C}$, y hacer la unión de \mathcal{B}' y \mathcal{C}' . Esa es la idea de la siguiente definición.

Definición 3.3.1. Si \mathcal{B} y \mathcal{C} son clases, su suma combinatoria $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$ es la clase $(\mathcal{E}_0 \times \mathcal{A}) \cup (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{B})$. La función tamaño en \mathcal{A} se define mediante $|(0, \beta)|_{\mathcal{A}} = |\beta|_{\mathcal{B}}$, $|(1, \gamma)|_{\mathcal{A}} = |\gamma|_{\mathcal{C}}$.

Es claro que $a_n = b_n + c_n$ para todo $n \geq 0$, luego $a(z) = b(z) + c(z)$. Esto también puede probarse así:

$$a(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{B} + \mathcal{C}} z^{|\alpha|} = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} z^{|\beta|} + \sum_{\gamma \in \mathcal{C}} z^{|\gamma|} = b(z) + c(z).$$

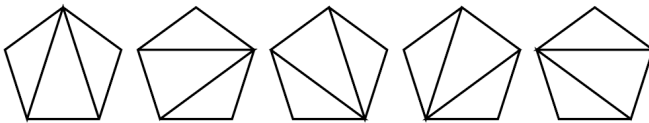
La suma combinatoria es conmutativa y asociativa, es decir

$$\mathcal{B} + \mathcal{C} \cong \mathcal{C} + \mathcal{B}, \quad (\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} \cong \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}).$$

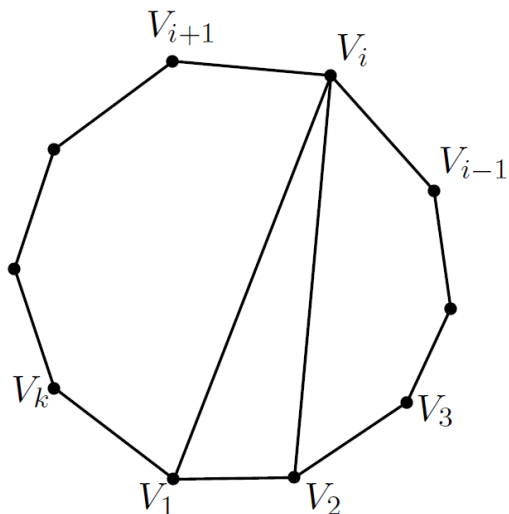
La suma combinatoria puede extenderse de manera obvia a cualquier número de clases (incluso a una infinidad de ellas).

3.3.1. Triangulaciones

Una *triangulación* de un polígono convexo es una descomposición del polígono en triángulos, realizada trazando diagonales. La figura siguiente muestra las 5 triangulaciones posibles de un pentágono:



El problema de calcular el número de triangulaciones fue estudiado por Euler, usando funciones generatrices y relaciones de recurrencia. Aquí lo resolveremos aplicando recursión y las funciones generatrices de la suma y el producto de clases. Consideremos un polígono convexo con vértices V_1, V_2, \dots, V_k . En cada triangulación hay un único triángulo que contiene el lado V_1V_2 , digamos que es $\Delta = V_1V_2V_i$ ($2 < i < k$). El resto de los miembros de la triangulación se divide en dos grupos, uno que da una triangulación del polígono inicial $V_2V_3 \dots V_i$ y otro que da una triangulación del polígono posterior $V_1V_iV_{i+1} \dots V_k$.



Pero hay un detalle a tener en cuenta: si $i = 3$ entonces el polígono inicial se reduce al segmento V_2V_3 , y si $i = k$ entonces el polígono posterior se reduce al segmento V_1V_k . Por este motivo consideraremos al segmento como un caso especial de polígono, que admite una triangulación *vacía* (sin triángulos). La clase \mathcal{T} de las triangulaciones contendrá entonces la triangulación del segmento $|$, la del triángulo \triangle , las dos del cuadrilátero, las 5 del pentágono, etc. El tamaño de una triangulación es el número de triángulos que contiene. Así $t(z) = 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + \dots$. Para hallar $t(z)$ observamos que

$$\mathcal{T} = \{|\} + \mathcal{T} \times \{\triangle\} \times \mathcal{T},$$

de donde $t(z) = 1 + z(t(z))^2$, y por lo tanto

$$t(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

(la otra solución $\frac{1}{2z}(1 + \sqrt{1 - 4z})$ se descarta pues da coeficientes negativos y además un término $1/z$). Luego

$$\begin{aligned} t(z) &= \frac{1}{2z} \left(1 - (1 - 4z)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2z} \left(1 - \sum_{n \geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4z)^n \right) \\ &= \frac{1}{2z} \left(2z - \sum_{n \geq 2} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4z)^n \right), \end{aligned}$$

y como para $n \geq 2$ se tiene

$$\begin{aligned} \binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{1}{n!} \frac{1}{2} \binom{-1}{2} \binom{-3}{2} \cdots \binom{3-2n}{2} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{n! 2^n} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!(2n-2)!!}{n!(n-1)! 2^{2n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} 2^{1-2n} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} 2^{1-2n} \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} t(z) &= 1 - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4)^n z^{n-1} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} z^{n-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} z^n. \end{aligned}$$

Los números

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!} 2^n$$

se conocen como *números de Catalan* en honor a Eugène Catalan (1814–1894), quien los estudió en profundidad por primera vez. Estos números aparecen en multitud de problemas combinatorios: en [31] vol. 2 hay una lista con 66 de ellos (los problemas y sus soluciones pueden verse en la página <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/>). Los primeros términos de la sucesión C_n (OEIS A000108) son

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \dots$$

3.3.2. Árboles ordenados binarios

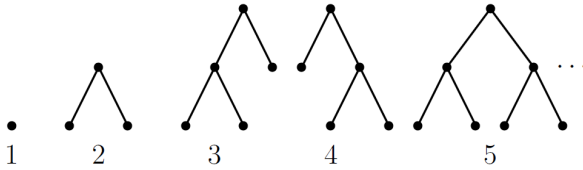
En teoría de grafos, un *árbol* es un grafo conexo sin ciclos. Un árbol es *enraizado* si tiene un nodo distinguido, al cual se le llama *raíz* del árbol. Los árboles enraizados se suelen representar gráficamente con la raíz en el nivel inferior o superior (según que el dibujante sea botánico o computista), sus descendientes en el nivel siguiente, y así sucesivamente. Llamaremos *árbol ordenado* a un árbol enraizado en el cual se toma

en cuenta el orden de los subárboles que descienden de cada nodo (en Ciencias de la Computación se suele decir *árbol plano* en vez de árbol ordenado, término poco afortunado pues en teoría de grafos los términos *plano* y *planar* se usan con otro significado).

Un árbol ordenado es *binario* si cada nodo tiene 0 o 2 descendientes. Los árboles binarios se pueden definir recursivamente así:

Un árbol binario consta de un único nodo o de un nodo del cual descienden un par ordenado de árboles binarios.

A partir de esta definición se pueden generar iterativamente todos los árboles binarios. Los primeros pasos del proceso se ilustran en la siguiente figura.



El primero (1) consta de un solo nodo. Luego, utilizando éste como subárbol izquierdo y derecho de un nodo se obtiene 2. Ahora podemos usar tanto 1 como 2 como subárboles izquierdo y derecho de un nodo, y se obtienen 3, 4 y 5.

La definición recursiva de la \mathcal{B} de los árboles ordenados binarios se puede escribir así:

$$\mathcal{B} = \mathcal{L}_{\bullet} + \mathcal{L}_{\bullet} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B},$$

luego su fgo satisface la ecuación $b(z) = z + z(b(z))^2$, de donde

$$b(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z}$$

(la otra solución $\frac{1}{2z}(1 + \sqrt{1 - 4z^2})$ se descarta pues da coeficientes negativos y además un término $1/z$).

Comparando esta fgo con la del ejemplo anterior observamos que $b(z) = zt(z^2)$, luego

$$b(z) = \sum_{n \geq 0} C_n z^{2n+1},$$

por lo tanto sólo hay árboles binarios con un número impar de nodos, y hay exactamente C_n con $2n + 1$ nodos.

En un árbol binario el número h de *hojas*, o nodos terminales, es superior en uno al número i de nodos internos (aquellos de los cuales descienden dos subárboles), por lo tanto el número total de nodos es $t = h + i = 2i + 1$. En otras palabras, C_n es el número de árboles binarios con n nodos internos.

3.4. Secuencias

Si \mathcal{B} es una clase, el conjunto de secuencias de longitud k de elementos de \mathcal{B} es

$$\mathfrak{S}_k(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^k = \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \cdots \times \mathcal{B},$$

y su fgo es $b(z)^k$.

Definición 3.4.1. Si \mathcal{B} es una clase sin elementos de tamaño 0, la clase secuencias de \mathcal{B} se define como

$$\mathfrak{S}(\mathcal{B}) = \mathcal{E} + \mathcal{B} + (\mathcal{B} \times \mathcal{B}) + (\mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}) + \cdots$$

En otras palabras, cada elemento de $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ es una k -tupla $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ de elementos de \mathcal{B} , y

$$|(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)|_{\mathfrak{S}(\mathcal{B})} = \sum_{i=0}^k |\beta_i|_{\mathcal{B}}.$$

Observe que $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ incluye una secuencia nula, o vacía, de tamaño 0 (por eso en la definición aparece la clase neutra \mathcal{E}). Sin embargo \mathcal{B} no puede contener ningún elemento de tamaño 0, pues en caso contrario habría una infinidad de objetos de tamaño 0 en $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$.

La fgo de $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ es

$$1 + b(z) + b(z)^2 + b(z)^3 + \cdots = \frac{1}{1 - b(z)}.$$

Si J es un subconjunto de \mathbb{N} , sea $\phi(z) = \sum_{j \in J} z^j$. La clase de secuencias de elementos de \mathcal{B} restringidas por J , $\mathfrak{S}_J(\mathcal{B})$, se define como la subclase de $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ formada por las secuencias cuyo número de componentes está en J . Es fácil ver que la fgo de $\mathfrak{S}_J(\mathcal{B})$ es

$$\sum_{j \in J} b(z)^j = \phi(b(z)).$$

En particular $\mathfrak{S}_{\{k\}}(\mathcal{B}) = \mathfrak{S}_k(\mathcal{B})$ son las secuencias de k elementos, cuya fgo es $b(z)^k$.

3.4.1. Composiciones

Una *composición* de un entero $n > 0$ en $k \geq 1$ partes es una secuencia de enteros positivos (a_1, a_2, \dots, a_k) tal que $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$. Para hallar el número de estas composiciones consideremos la clase $\mathcal{B} = \mathbb{N}_+$, con $|j| = j$. Su fgo es

$$z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{z}{1-z}.$$

Lo que queremos contar es el número de sucesiones en $\mathfrak{S}_k(\mathbb{N}_+) = \mathbb{N}_+^k$ con peso n . La fgo correspondiente es $(z/(1-z))^k$, que por el Ejercicio 2.6.2 es

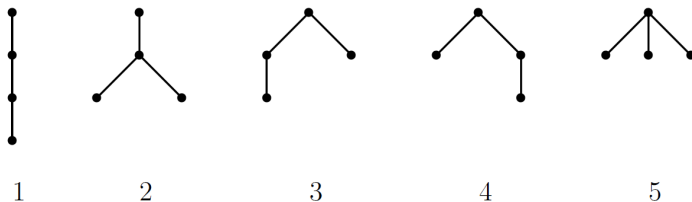
$$z^k \frac{1}{(1-z)^k} = z^k \sum_{n \geq 0} \binom{k+n-1}{k-1} z^n = \sum_{n \geq k} \binom{n-1}{k-1} z^n.$$

Luego la respuesta buscada es $\binom{n-1}{k-1}$.

EJERCICIO 3.4.1. Pruebe que hay $\binom{n-1}{k-1}$ composiciones de n en k partes sin usar funciones generatrices.

3.4.2. Árboles ordenados

Consideremos los árboles enraizados ordenados *generales*, es decir aquellos en los cuales cada nodo puede tener cualquier número de descendientes. Por ejemplo con 4 nodos hay 5 árboles de este tipo, a saber:



Observe que árboles enraizados con 4 nodos hay sólo 4, pues (3) y (4) sólo difieren en el orden, y árboles en general con 4 nodos sólo hay 2, pues (1), (3) y (4) son isomorfos, al igual que lo son (2) y (5).

Los árboles ordenados se pueden definir recursivamente de la manera siguiente:

Un árbol ordenado es un nodo al cual está conectada una secuencia finita (posiblemente vacía) de árboles ordenados.

Sea \mathcal{G} la clase de los árboles ordenados, con el número de nodos como tamaño. La anterior definición recursiva se traduce en

$$\mathcal{G} = \mathcal{L}_\bullet \times \mathfrak{S}(\mathcal{G}),$$

donde \mathcal{L}_\bullet es la clase atómica $\{\bullet\}$. Pasando a las fgo se tiene

$$g(z) = z \cdot \frac{1}{1 - g(z)},$$

de donde $(g(z))^2 - g(z) + z = 0$.

$$g(z) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4z})$$

(la otra solución $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4z})$ se descarta pues da coeficientes negativos). Comparando esta fgo con la de las triangulaciones vistas en el Ejemplo 3.3.1, se observa que $g(z) = zt(z)$, luego $g(z) = \sum_{n \geq 0} C_n z^{n+1} = \sum_{n \geq 1} C_{n-1} z^n$, es decir que hay $C_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ árboles ordenados con n nodos.

Si J es un subconjunto de \mathbb{N} y $0 \in J$, definamos \mathcal{G}_J como la clase de los árboles ordenados con la restricción de que el grado saliente de cualquier nodo pertenezca a J . Por ejemplo $\mathcal{G}_{\{0,2\}}$ son los árboles binarios, para los cuales $\phi(z) = 1 + z^2$, mientras que $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}$ es sencillamente la clase \mathcal{G} de todos los árboles ordenados, con $\phi(z) = 1 + z + z^2 + \dots = 1/(1 - z)$.

Como $\mathcal{G}_J = \mathcal{L}_\bullet \times \mathfrak{S}_J(\mathcal{G}_J)$, se tiene que $g_J(z) = z\phi(g_J(z))$.

De aquí, por la fórmula de inversión de Lagrange (ver Teorema 6.1.1, pág. 83), se obtiene que

$$[z^n]g_J(z)^k = \frac{k}{n} [y^{n-k}] \phi(y)^n.$$

Por ejemplo poniendo $J = \{0, 2\}$ se tiene $\phi(y) = 1 + y^2$ y resulta que el número de árboles binarios con $2n + 1$ nodos es

$$\frac{1}{2n+1} [y^{2n}] (1 + y^2)^{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n,$$

lo cual coincide con el resultado obtenido anteriormente.

Más en general para $J = \{0, r\}$ (donde $r \in \mathbb{N}_+$) se tienen los árboles r -arios, es decir los árboles enraizados ordenados en los cuales cada nodo tiene 0 ó r descendientes. En este caso $\phi(y) = 1 + y^r$ y el número de estos árboles con n nodos es

$$\frac{1}{n}[y^{n-1}](1 + y^r)^n.$$

Ahora bien, este número es 0 a menos que r divida a $n - 1$, es decir a menos que $n = kr + 1$ para algún k , en cuyo caso es igual a

$$\frac{1}{n} \binom{n}{k} = \frac{1}{kr + 1} \binom{kr + 1}{k} = \frac{1}{kr - k + 1} \binom{kr}{k}.$$

3.4.3. Árboles unario-binarios

Para $J = \{0, 1, 2\}$ se tienen los árboles unario-binarios, es decir los árboles enraizados ordenados en los cuales cada nodo tiene 0, 1 ó 2 descendientes. En este caso $\phi(y) = 1 + y + y^2$ y el número de estos árboles con n nodos es

$$\frac{1}{n}[y^{n-1}](1 + y + y^2)^n.$$

Como

$$(1 + y + y^2)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} y^{j+2k} = \sum_{0 \leq j+k \leq n} \frac{n!}{(n-j-k)!j!k!} y^{j+2k}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}[y^{n-1}](1 + y + y^2)^n &= \frac{1}{n} \sum_k \frac{n!}{(k+1)!(n-2k-1)!k!} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k+1}. \end{aligned}$$

Estos números se conocen como *números de Motzkin* (sucesión OEIS A001006) y tienen muchas interpretaciones combinatorias.

3.4.4. Florestas ordenadas

Sea $\mathcal{F}_k = \mathfrak{S}_k(\mathcal{G})$ la clase de las k -florestas ordenadas, es decir de las secuencias de k árboles ordenados. La fgo de \mathcal{F}_k es $f_k(z) = g(z)^k$, y como la fgo $g(z)$ de los árboles generales satisface $g(z) = z \cdot \frac{1}{1-g(z)}$, por inversión de Lagrange en la forma de Bürmann (ver Teorema 6.1.1, pág. 83) se tiene

$$[z^n]f_k(z)^k = \frac{k}{n}[y^{n-k}](1-y)^{-n},$$

de donde

$$[z^n]f_k(z)^k = \frac{k}{n}(-1)^{n-k} \binom{-n}{n-k} = \frac{k}{n} \binom{2n-k-1}{n-k}.$$

3.4.5. Números de Fibonacci.

¿De cuántas maneras se puede subir una escalera de n escalones si en cada paso se pueden subir uno o dos escalones? O, en forma equivalente: ¿De cuántas maneras se puede escribir un entero positivo n como suma ordenada de unos y doses?

Solución: Sea $\mathcal{B} = \{1, 2\}$, con $|1| = 1$ y $|2| = 2$. Su fgo es $b(z) = z + z^2$. Lo que se busca es el término general de la fgo de $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$, es decir de $1/(1-z-z^2)$. Las raíces de $t^2 - t - 1$ son $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ (el número áureo) y $(1 - \sqrt{5})/2 = -1/\varphi$, luego $1 - z - z^2 = (1 - \varphi z)(1 + z/\varphi)$ y descomponiendo en fracciones simples se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z-z^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\varphi}{1-\varphi z} + \frac{\varphi^{-1}}{1+z\varphi^{-1}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n \geq 0} (\varphi^{n+1} - (-\varphi)^{-n-1}) z^n. \end{aligned}$$

Si ponemos $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\varphi)^{-n})$ entonces

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n \geq 0} F_{n+1} z^n.$$

Observe que $F_0 = 0$, y de

$$1 = (1-z-z^2) \sum_{n \geq 0} F_{n+1} z^n = F_1 + (F_2 - F_1)z + \sum_{n \geq 2} (F_{n+1} - F_n - F_{n-1})z^n$$

se sigue que $F_1 = 1$ y $F_{n+1} - F_n - F_{n-1} = 0$ para todo $n \geq 1$. Es decir que los F_n quedan determinados por la recurrencia

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ para } n \geq 1,$$

la cual es la definición usual de estos números. Los primeros términos de la sucesión F_n (OEIS A000045) son

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots$$

Los F_n se conocen como *números de Fibonacci*, pues fueron introducidos en Europa por el matemático italiano del siglo XIII Leonardo de Pisa (llamado Fibonacci), en su obra *Liber Abaci*, como solución a un problema de cría de conejos: “Cierta pareja tenía una pareja de conejos en un lugar cerrado y deseaba saber cuántos se podrían reproducir en un año a partir de la pareja inicial, teniendo en cuenta que cada pareja comienza a reproducirse a partir de los dos meses de edad, engendrando una nueva pareja cada mes”. Sin embargo esta sucesión ya era conocida en la matemática de la India desde varios siglos atrás. Estos números aparecen con frecuencia en el análisis de algoritmos, en teoría de juegos y en otras ramas de la matemática. Además aparecen en biología: en la distribución de las hojas en las ramas, de las flores en el girasol y de las escamas de las piñas, en la estructura espiral del caparazón de algunos moluscos como el nautilus, etc.

3.4.6. Lenguajes y expresiones regulares.

En la teoría de lenguajes formales, un *alfabeto* es un conjunto finito A de elementos llamados *letras* o *símbolos*. El alfabeto A se puede convertir en una clase \mathcal{A} definiendo el tamaño de cada letra como 1. La fgo de \mathcal{A} es mz , siendo $m = |A|$ el número de letras en A . Una *palabra* es una secuencia finita (posiblemente vacía) de letras. Las palabras se escriben usualmente colocando las letras una a continuación de otra, sin separadores de ningún tipo. Por ejemplo si a y b son letras entonces *abbabba* es una palabra. La palabra vacía la denotaremos con el símbolo λ . El conjunto de todas las palabras con alfabeto A se denota A^* .

Un *lenguaje* (formal) con alfabeto A es cualquier subconjunto $L \subset A^*$. Si se define el tamaño de una palabra como el número de letras que contiene, entonces A^* se convierte en una clase \mathcal{A}^* que no es otra cosa que $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$. Su fgo es $(1 - mz)^{-1}$.

Si $L \subset A^*$, con la función tamaño heredada de \mathcal{A} el lenguaje L se convierte en una clase \mathcal{L} .

La *concatenación* de dos palabras u y v es la palabra $u \circ v$ que se obtiene al escribir v después de u . Por ejemplo la concatenación de aab y ab es $aab \circ ab = aabab$. La concatenación de dos lenguajes \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 es el lenguaje $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$ que se obtiene concatenando cada palabra de \mathcal{L}_1 con cada palabra de \mathcal{L}_2 , es decir

$$\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 = \{u \circ v : u \in \mathcal{L}_1, v \in \mathcal{L}_2\}.$$

Si \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 son dos lenguajes con alfabeto A , entonces la aplicación

$$f : \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$$

definida por $f(u, v) = u \circ v$ es sobre y preserva la función tamaño. Por lo tanto si f es inyectiva entonces $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \cong \mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$ y en particular la fgo de $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$ es el producto de las fgos de \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 . Un caso típico en el que esto ocurre se presenta cuando uno de los lenguajes consta de una sola palabra. En cambio si $\mathcal{L}_1 = \{a, ab\}$ y $\mathcal{L}_2 = \{b, bb\}$, f no es inyectiva, ya que $a \circ bb = ab \circ b$.

Como en álgebra con el producto, si no hay posibilidad de confusión se acostumbra omitir el operador \circ al concatenar palabras o lenguajes.

Hay varias formas de especificar un lenguaje, entre ellas las *gramáticas formales* (que aquí no se estudiarán; el lector interesado puede ver [5]) y las *expresiones regulares*. Éstas últimas se definen recursivamente del modo siguiente:

Definición 3.4.2. *Dado un alfabeto A entonces:*

1. λ y cualquier $x \in A$ son expresiones regulares.
2. Si p y q son expresiones regulares entonces $(p \cup q)$ y $(p \circ q)$ también lo son.
3. Si p es una expresión regular entonces también lo es p^* .

A cada expresión regular p se le puede asociar un lenguaje $L(p)$ del siguiente modo;

1. $L(\lambda) = \{\lambda\}$ y $L(x) = \{x\}$ para cualquier $x \in A$.

2. Si p y q son expresiones regulares entonces $L((p \cup q)) = L(p) \cup L(q)$
y $L((p \circ q)) = L(p) \circ L(q)$.
3. Si p es una expresión regular entonces $L(p^*) = \mathfrak{S}(L(p))$.

Como en el álgebra, la escritura de expresiones regulares se simplifica eliminando los paréntesis exteriores, asignando prioridades crecientes a la suma, la concatenación y $*$, y eliminando finalmente los paréntesis innecesarios. Por ejemplo si $A = \{a, b, c\}$ entonces:

1. $L(a \cup b) = \{a, b\}$.
2. $L(ab^*) = \{a, ab, abb, abbb, abbbb, \dots\}$.
3. $L(a^* \cup b^*) = \{a, b, aa, bb, aaa, bbb, \dots\}$.
4. $L(a^*ba^*) = \{b, ab, ba, aab, aba, baa, aaab, aaba, abaa, baaa, \dots\}$.

Los lenguajes asociados a expresiones regulares se conocen como *lenguajes regulares*.

Si una expresión regular r es *no ambigua*, es decir si cada palabra generada por la expresión se puede obtener de manera única, entonces la fgo de su lenguaje se halla fácilmente. En efecto, en este caso cada unión $L(p) \cup L(q)$ será isomorfa a una suma combinatoria y cada concatenación $L(p) \circ L(q)$ será isomorfa a un producto cartesiano, luego sustituyendo en r cada letra por la variable z , cada \cup por la suma, cada \circ por el producto y la operación $*$ por la cuasi-inversa $(1 - \cdot)^{-1}$, se obtendrá la fgo buscada.

Por ejemplo si $A = \{a, b\}$, las palabras en A^* que contienen exactamente dos letras b se pueden generar con la expresión regular $a^*ba^*ba^*$, que no es ambigua y tiene fgo $(1 - z)^{-1}z(1 - z)^{-1}z(1 - z)^{-1} = \frac{z^2}{(1-z)^2}$. Más en general las palabras que contienen exactamente k letras b se pueden generar con la expresión $a^*(ba^*)^{k-1}ba^*$, cuya fgo es

$$\frac{z^k}{(1-z)^{k+1}} = z^k \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} z^{n-k} = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} z^n,$$

la cual nos confirma el resultado esperado de que hay $\binom{n}{k}$ palabras con k letras b y $n - k$ letras a .

Un ejemplo más interesante es el problema de contar los subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ formados por k números no consecutivos. Cada uno de esos conjuntos S se puede describir por medio de su función característica $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, donde $s_i = 1$ si $i \in S$ y $s_i = 0$ si $i \notin S$. El problema es entonces equivalente al de contar las palabras con alfabeto $\{0, 1\}$ que contienen exactamente k unos pero en posiciones no consecutivas. Una expresión regular que las genera es $0^*(100^*)^{k-1}10^*$, cuya fgo es

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} \left(\frac{z^2}{1-z} \right)^{k-1} \frac{z}{1-z} &= \frac{z^{2k-1}}{(1-z)^{k+1}} = z^{2k-1} \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} z^{n-k} \\ &= \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} z^{n+k-1} = \sum_{n \geq 2k-1} \binom{n-k+1}{k} z^n, \end{aligned}$$

Esto nos muestra que el número buscado es $\binom{n-k+1}{k}$.

3.4.7. Autómatas finitos

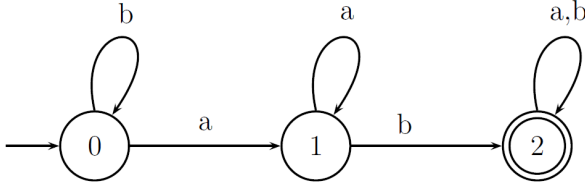
Un *autómata finito* con alfabeto A es un multigrafo dirigido, en el cual cada arista está rotulada con una letra del alfabeto A . Los vértices se consideran como los *estados internos* en que puede estar el autómata. Si V es el conjunto de vértices, debe haber uno de ellos $v_0 \in V$ distinguido como *estado inicial* y un subconjunto $F \subset V$ de *estados finales*. Un arco de i a j rotulado con una letra x significa que si el autómata está en el estado i y “lee” la letra x , entonces su estado cambia a j . Una palabra $a_1 a_2 \dots a_k$ se dice que es *aceptada* por el autómata si existe un camino dirigido que comienza en el estado inicial, se compone de arcos rotulados consecutivamente con las letras a_1, a_2, \dots, a_k y termina en un estado final. El *lenguaje aceptado* por un autómata finito es el subconjunto de A^* formado por todas las palabras aceptadas.

Un autómata finito es *determinista* si para cada vértice v y cada letra $a \in A$ hay a lo sumo una arista que parte de v con rótulo a .

Se puede probar que los lenguajes aceptados por autómatas finitos, deterministas o no, son los mismos que los caracterizados por expresiones regulares, o por gramáticas regulares (vea [5]).

El siguiente diagrama representa un autómata finito determinista con alfabeto $A = \{a, b\}$ y estados 0, 1 y 2. El estado inicial es el 0 (indicado

por la flecha entrante no rotulada) y el 2 es el único estado final, indicado por el doble círculo.



Por ejemplo la palabra bab es aceptada, pues hay un arco rotulado b que va de 0 a 0, un arco rotulado a que va de 0 a 1 y un arco rotulado b que va de 1 a 2, que es un estado final. En cambio ba no es aceptada, pues luego de recorrer arcos rotulados b y a partiendo de 0, se termina en 1, que no es un estado final. Es fácil convencerse de que el lenguaje \mathcal{L}_0 aceptado por este autómata es el conjunto de todas las palabras en A^* que tienen una a y una b consecutivas, es decir que admiten ab como subpalabra. Ahora trataremos de hallar la fgo de ese lenguaje. Para ello consideremos dos lenguajes auxiliares \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 , que son los lenguajes aceptados por el autómata si en lugar de 0 se considera como estado inicial a 1 o a 2, respectivamente. Es claro que se tienen las siguientes igualdades de clases:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= b\mathcal{L}_0 + a\mathcal{L}_1, \\ \mathcal{L}_1 &= a\mathcal{L}_1 + b\mathcal{L}_2, \\ \mathcal{L}_2 &= a\mathcal{L}_2 + b\mathcal{L}_2 + \{\lambda\}.\end{aligned}$$

Si pasamos a las respectivas fgo, se tiene el sistema

$$\begin{aligned}L_0(z) &= zL_0(z) + zL_1(z), \\ L_1(z) &= zL_1(z) + zL_2(z), \\ L_2(z) &= zL_2(z) + zL_2(z) + 1.\end{aligned}$$

De la tercera ecuación se obtiene $L_2(z) = 1/(1 - 2z)$, de la segunda $L_1(z) = zL_2(z)/(1 - z)$ y de la primera $L_0(z) = zL_1(z)/(1 - z)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}L_0(z) &= \frac{z^2}{(1 - z)^2(1 - 2z)} = \frac{1}{1 - 2z} - \frac{1}{(1 - z)^2} \\ &= \sum_{n \geq 0} 2^n z^n - \sum_{n \geq 0} (n + 1)z^n = \sum_{n \geq 0} (2^n - n - 1)z^n.\end{aligned}$$

Es decir que \mathcal{L}_0 contiene $2^n - n - 1$ palabras de longitud n .

El método anterior se puede aplicar a cualquier autómata finito determinista. En efecto, si los estados son $V = \{0, 1, \dots, s\}$, \mathcal{L}_i es el lenguaje aceptado por el autómata con i como estado inicial, A_i son los rótulos de las aristas que parten de i y $e(i, a)$ es el extremo de una arista que parte de i con rótulo a , entonces

$$\mathcal{L}_i = \sum_{x \in A_i} x \mathcal{L}_{e(i,x)} + \Delta_i,$$

donde $\Delta_i = \{\lambda\}$ si i es un estado final o \emptyset en caso contrario. Pasando a las fgos se tiene el sistema

$$L_i(z) = z \sum_{x \in A_i} L_{e(i,x)}(z) + f_i, \quad i = 0, 1, \dots, s,$$

donde $f_i = 1$ si i es un estado final y 0 en caso contrario. Este sistema se puede escribir en forma matricial como

$$\mathbf{L}(z) = zT\mathbf{L}(z) + \mathbf{f},$$

donde $\mathbf{L}(z)$ es el vector columna $(L_0(z), L_1(z), \dots, L_s(z))^t$, T es la matriz de transiciones $(t_{i,j})_{0 \leq i, j \leq s}$, con $t_{i,j}$ igual al número de aristas que parten del vértice i hacia el j y \mathbf{f} es el vector columna $(f_0, f_1, \dots, f_s)^t$. Luego

$$\mathbf{L}(z) = (I - zT)^{-1}\mathbf{f},$$

donde I es la matriz identidad, y la fgo buscada es $L_0(z)$, la primera componente de $\mathbf{L}(z)$. En particular resulta que la fgo de un lenguaje regular es siempre una función racional.

Este procedimiento para hallar la fgo de un lenguaje regular se debe a Chomsky y Schützenberger (ver [9]).

EJERCICIO 3.4.2. (a) Construya un autómata finito cuyo lenguaje aceptado sean las palabras que se pueden formar con las letras a y b que contienen tres letras consecutivas iguales. Halle la fgo. (b) Haga lo mismo para las palabras que *no* contienen tres letras consecutivas iguales.

3.4.8. Lenguajes que incluyen o excluyen un patrón

Dada una palabra $\mathbf{p} = p_1p_2 \dots p_k \in A^*$ el lenguaje \mathcal{L} formado por todas las palabras en A^* que incluyen a \mathbf{p} como subpalabra es un lenguaje regular, ya que es fácil construir (siguiendo el modelo del ejemplo anterior) un autómata finito cuyo lenguaje aceptado sea precisamente \mathcal{L} . Usando el método de Chomsky y Schützenberger se puede calcular la fgo de \mathcal{L} , sin embargo no hay relación aparente entre esa fgo y la estructura de \mathbf{p} . Una vía alternativa utiliza el *vector de autocorrelación* de \mathbf{p} , $(c_0, c_1, \dots, c_{k-1})$, que se define así: para cada $j = 0, 1, \dots, k-1$, si $p_{j+1}p_{j+2} \dots p_k = p_1p_2 \dots p_{k-j}$ entonces $c_j = 1$, si no $c_j = 0$. El *polinomio de autocorrelación* es

$$c(z) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j z^j.$$

Por ejemplo para la palabra *abaaba* se tiene:

j	$p_1p_2 \dots p_{k-j}$	c_j
0	<i>abaaba</i>	1
1	<i>abaab</i>	0
2	<i>abaa</i>	0
3	<i>aba</i>	1
4	<i>ab</i>	0
5	<i>a</i>	1

y el vector de autocorrelación es $(1, 0, 0, 1, 0, 1)$, por lo tanto el polinomio de autocorrelación es $1 + z^3 + z^5$.

Sea ahora \mathcal{S} el lenguaje formado por todas las palabras en A^* que *no* incluyen a \mathbf{p} como subpalabra, y sea \mathcal{T} el lenguaje formado por las palabras que finalizan con \mathbf{p} , pero no la tienen como subpalabra en ninguna otra posición. Evidentemente

$$\mathcal{S} + \mathcal{T} = \{\lambda\} + \mathcal{S} \times A, \quad (*)$$

ya que si a cualquier palabra no nula en \mathcal{S} o en \mathcal{T} se le quita la última letra, resulta una palabra en \mathcal{S} . Además

$$\mathcal{S} \times \{\mathbf{p}\} = \mathcal{T} \times \sum_{c_j=1} \{p_{k-j+1}p_{k-j+2} \dots p_k\}, \quad (**)$$

ya que en cualquier palabra $\mathbf{sp} \in \mathcal{S} \times \{\mathbf{p}\}$ la primera aparición de \mathbf{p} debe terminar en una de las letras p_{k-j} de la \mathbf{p} final, y eso sólo si las últimas letras de \mathbf{s} son $p_1 p_2 \dots p_{k-j}$. Pasando a las correspondientes fgos, $(*)$ y $(**)$ se traducen en el sistema

$$\begin{aligned} S(z) + T(z) &= 1 + mzS(z), \\ z^k S(z) &= c(z)T(z), \end{aligned}$$

donde $m = |A|$ es el número de letras del alfabeto. Resolviendo el sistema resulta

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{c(z)}{z^k + (1 - mz)c(z)}, \\ T(z) &= \frac{z^k}{z^k + (1 - mz)c(z)}. \end{aligned}$$

Como la fgo de A^* es $\sum_{n \geq 0} m^n z^n = \frac{1}{1 - mz}$, la fgo del lenguaje \mathcal{L} de las palabras que contienen a \mathbf{p} al menos una vez es

$$\frac{1}{1 - mz} - S(z) = \frac{z^k}{(1 - mz)(z^k + (1 - mz)c(z))}.$$

Un estudio detallado de este tipo de problemas puede verse en [14].

EJERCICIO 3.4.3. Pruebe que el número de palabras con alfabeto $\{a, b\}$ y longitud n que no contienen abb como subpalabra es $F_{n+3} - 1$ (F_n son los números de Fibonacci, vea el Ejemplo 3.4.5).

3.4.9. Frecuencias y tiempos de espera

Si $\mathbf{p} = p_1 p_2 \dots p_k \in A^*$, la concatenación $A^* \mathbf{p} A^*$ nos da el lenguaje \mathcal{L} de todas las palabras en A^* que contienen a \mathbf{p} como subpalabra. Si $m = |A|$ entonces la fgo de A^* es $1/(1 - mz)$. Podría pensarse entonces que la fgo de \mathcal{L} es

$$f(z) = \frac{z^k}{(1 - mz)^2},$$

pero no es así ya que la especificación $A^* \mathbf{p} A^*$ es ambigua (la palabra \mathbf{pp} por ejemplo puede generarse al menos de dos maneras).

Sin embargo $f(z)$ tiene una interpretación combinatoria: $[z^n]f(z)$ es el número total de apariciones del patrón \mathbf{p} en palabras de longitud n .

Por ejemplo si $A = \{a, b\}$ y $\mathbf{p} = aa$, se tiene que \mathbf{p} no aparece en palabras de longitud 0 ó 1, aparece una vez en palabras de longitud 2 (una vez en aa), 4 veces en palabras de longitud 3 (una vez en aab , una vez en baa y dos veces en aaa), 12 veces en palabras de longitud 4 (3 veces en $aaaa$, 2 en $aaab$, una en $aaba$, una en $aabb$, una en $abaa$, 2 en $baaa$, una en $baab$ y una en $bbaa$), etc. Y se tiene

$$\frac{z^2}{(1-2z)^2} = \sum_{n \geq 1} n 2^{n-1} z^{n+1} = z^2 + 4z^3 + 12z^4 + \dots$$

En general se tiene

$$[z^n]f(z) = [z^n] \frac{z^k}{(1-mz)^2} = [z^n] \sum_{j \geq k} j m^{j-1} z^{j+k-1} = (n-k+1)m^{n-k},$$

es decir que en promedio un patrón de longitud k aparece

$$\frac{(n-k+1)m^{n-k}}{m^n} = \frac{n-k+1}{m^k}$$

veces en palabras de longitud n . Es interesante que este valor no depende de las letras en \mathbf{p} sino sólo de su número k .

Para m y k fijos se tiene

$$\frac{n-k+1}{m^k} \sim \frac{n}{m^k}.$$

Supongamos ahora que se va generando al azar una sucesión $a_1 a_2 a_3 \dots$ de letras de A y tratemos de estimar el tiempo de espera necesario para que aparezca el patrón \mathbf{p} . Aquí es clave la fgo

$$T(z) = \frac{z^k}{z^k + (1-mz)c(z)} = \sum_{n \geq k} t_n z^n$$

hallada más arriba para el lenguaje \mathcal{T} formado por las palabras que finalizan con \mathbf{p} , pero no la tienen como subpalabra en ninguna otra posición. Si \mathbf{p} aparece por primera vez cuando se han generado n letras, entonces $a_1 a_2 a_3 \dots a_n \in \mathcal{T}$, y la probabilidad de que esto ocurra es t_n/m^n . Por lo tanto el valor esperado del tiempo de espera es

$$\tau(\mathbf{p}) = \sum_{n \geq k} n \frac{t_n}{m^n} = \frac{1}{m} \sum_{n \geq k} n t_n \left(\frac{1}{m}\right)^{n-1} = \frac{1}{m} T' \left(\frac{1}{m}\right).$$

Pero

$$T'(z) = \frac{kz^{k-1}}{z^k + (1 - mz)c(z)} - \frac{z^k(kz^{k-1} - mc(z) + (1 - mz)c'(z))}{(z^k + (1 - mz)c(z))^2},$$

de donde

$$\tau(\mathbf{p}) = \frac{1}{m}T'\left(\frac{1}{m}\right) = m^k c\left(\frac{1}{m}\right).$$

Estos resultados son un poco paradójicos, ya que la frecuencia de apariciones de todas las palabras de k letras son iguales, pero sus tiempos de espera no lo son. Por ejemplo si $A = \{a, b\}$ y $\mathbf{p} = aaa$, entonces $c(z) = 1 + z + z^2$ y $\tau(\mathbf{p}) = 2^3 \cdot \frac{7}{4} = 14$, mientras que para $\mathbf{p} = abb$ se tiene $c(z) = 1$ y $\tau(\mathbf{p}) = 2^3 \cdot 1 = 8$. Lo que ocurre es que los patrones con mayor autocorrelación tardan más en aparecer, pero una vez que aparecen tienden a presentarse varias apariciones próximas del mismo.

3.5. Potencias

Sea $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$ una clase finita. Entonces la clase $\mathfrak{P}(\mathcal{B})$ de los subconjuntos de \mathcal{B} (también llamada *potencia* de \mathcal{B}) es isomorfa al producto cartesiano

$$\prod_{i=1}^k (\mathcal{E} + \{\beta_i\}),$$

donde como de costumbre \mathcal{E} es la clase neutra con un único elemento ϵ de tamaño 0. En efecto, a cada subconjunto $S \subset \mathcal{B}$ se le asocia la k -tupla (p_1, p_2, \dots, p_k) donde $p_i = \beta_i$ si $\beta_i \in S$ y $p_i = \epsilon$ en caso contrario. Como la fgo de $\mathcal{E} + \{\beta_i\}$ es $1 + z^{|\beta_i|}$ entonces la fgo de $\mathfrak{P}(\mathcal{B})$ es

$$p(z) = \prod_{i=1}^k (1 + z^{|\beta_i|}) = \prod_{n \geq 0} (1 + z^n)^{b_n}.$$

Como $p_0 = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} \log(p(z)) &= \sum_{n \geq 0} b_n \log(1 + z^n) = \sum_{n \geq 0} b_n \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^{nk} \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{n \geq 0} b_n z^{nk} = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} b(z^k) \end{aligned}$$

y finalmente

$$p(z) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} b(z^n) \right). \quad (*)$$

Esto se puede extender al caso en que \mathcal{B} es infinita numerable, observando que p_n solamente depende de los b_k con $k \leq n$, a los cuales se aplican las relaciones vistas para el caso finito. Más precisamente, si $\mathcal{B}_{\leq m} = \sum_{k=1}^m \mathcal{B}_k$ y $\mathcal{P}_{\leq m} = \mathfrak{P}(\mathcal{B}_{\leq m})$, entonces

$$p(z) = p_{\leq m}(z) + O(z^{m+1}), \quad b(z) = b_{\leq m}(z) + O(z^{m+1})$$

y

$$p_{\leq m}(z) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} b_{\leq m}(z^n) \right).$$

Cuando $m \rightarrow \infty$, en el límite se obtiene (*).

3.6. Multiconjuntos

Un *multiconjunto* es, intuitivamente, un conjunto con elementos repetidos. Hay varias maneras de formalizar esta noción. Supongamos primero que $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$ es una clase finita, con $b_0 = 0$. Entonces la clase $\mathfrak{M}(\mathcal{B})$ se define como

$$\mathfrak{M}(\mathcal{B}) = \prod_{i=1}^k \mathfrak{S}(\{\beta_i\}).$$

Por ejemplo, si $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ entonces

$$((\beta_1, \beta_1, \beta_1, \beta_1), (\beta_2), (\beta_3, \beta_3))$$

es un elemento de $\mathfrak{M}(\mathcal{B})$ con tamaño $4|\beta_1| + |\beta_2| + 2|\beta_3|$.

La fgo $m(z)$ de $\mathfrak{M}(\mathcal{B})$ es

$$\begin{aligned} m(z) &= \prod_{\beta \in \mathcal{B}} \frac{1}{1 - z^{|\beta|}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)^{-b_n} \\ &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \log(1 - z^n)^{-1} \right) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{k \geq 1} \frac{z^{nk}}{k} \right) \\ &= \exp \left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{nk} \right) = \exp \left(\sum_{k \geq 1} \frac{b(z^k)}{k} \right) \end{aligned}$$

El caso en que \mathcal{B} es infinita se trata de modo similar a lo hecho para \mathfrak{P} .

Ejemplo 3.6.1. ¿Cuántos multiconjuntos de n elementos pueden formarse con k elementos diferentes?

Solución: Si \mathcal{B} es una clase con k elementos, todos de peso 1, entonces $b(z) = kz$ y la fgo de $\mathfrak{M}(\mathcal{B})$ es $1/(1-z)^k$, que por el Ejercicio 2.6.2 es

$$\frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n \geq 0} \binom{k+n-1}{n} z^n.$$

Luego la respuesta es

$$\binom{k+n-1}{n} = \binom{k+n-1}{k-1},$$

que por supuesto coincide con los números que la combinatoria clásica denomina “combinaciones con repetición”.

EJERCICIO 3.6.1. (Identidad de Vallée) Si $m(z)$ y $p(z)$ son las fgos de $\mathfrak{M}(\mathcal{B})$ y $\mathfrak{P}(\mathcal{B})$, pruebe que $m(z) = p(z)m(z^2)$.

3.6.1. Particiones de un entero

Una *partición* de un entero $n > 0$ es una descomposición de n como suma de enteros positivos, en la cual no se distingue el orden de los sumandos. Por ejemplo las particiones de 5 son: 5, 1 + 4, 2 + 3, 1 + 1 + 3, 1 + 2 + 2, 1 + 1 + 1 + 2 y 1 + 1 + 1 + 1 + 1.

\mathbb{N}_+ se convierte en una clase tomando como tamaño la función identidad, es decir $t(j) = j$. Su fgo es $n(z) = z + z^2 + z^3 + \dots$ y las particiones son los multiconjuntos de \mathbb{N}_+ , luego la fgo de las particiones es

$$\begin{aligned} p(z) &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^n} \\ &= (1 + z + z^2 + \dots)(1 + z^2 + z^4 + \dots)(1 + z^3 + z^6 + \dots) \dots \\ &= 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 7z^5 + 11z^6 + 15z^7 + 22z^8 + \dots \end{aligned}$$

Lamentablemente no hay una fórmula cerrada para los coeficientes de $p(z)$. Sin embargo la expresión anterior permite calcular sucesivamente los que se deseen. También puede usarse la fgo para hallar una relación de recurrencia. En efecto, como

$$\log p(z) = - \sum_{n \geq 1} \log(1 - z^n),$$

derivando resulta

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{n \geq 1} \frac{nz^{n-1}}{1 - z^n}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{zp'(z)}{p(z)} &= \sum_{n \geq 1} \frac{nz^n}{1 - z^n} = \sum_{n \geq 1} nz^n \sum_{k \geq 0} z^{nk} \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} nz^{n(k+1)} = \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} nz^{nk} \\ &= \sum_{m \geq 1} \sum_{n|m} nz^m = \sum_{m \geq 1} \sigma(m)z^m, \end{aligned}$$

donde $\sigma(m) = \sum_{d|m} d$ es la suma de los divisores positivos de m . Luego

$$zp'(z) = p(z) \sum_{m \geq 1} \sigma(m)z^m,$$

de donde

$$np_n = [z^n]zp'(z) = [z^n] \left(\sum_{k \geq 0} p_k z^k \right) \left(\sum_{j \geq 1} \sigma(j) z^j \right) = \sum_{k+j=n} p_k \sigma(j),$$

y finalmente

$$np_n = \sum_{j=1}^n \sigma(j)p_{n-j}.$$

Otra recurrencia puede obtenerse a partir del Teorema Pentagonal de Euler (vea por ejemplo [2]).

3.7. Ciclos

Los *ciclos* son clases de equivalencia de secuencias finitas no nulas. La idea es considerar dos secuencias equivalentes cuando sólo difieran en una “rotación” de sus elementos.

Más precisamente, si n es un entero positivo, $\mathbb{N}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ y $d \in \mathbb{N}_n$, definamos la *rotación* de d unidades hacia la derecha $r_d : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_n$ mediante $r_d(k) = k + d \pmod n$, para todo $k \in \mathbb{N}_n$. Por ejemplo si $n = 5$ entonces $r_2(0) = 2$, $r_2(1) = 3$, $r_2(2) = 4$, $r_2(3) = 0$ y $r_2(4) = 1$. Observe que r_0 es la identidad y que r_{n-d} puede interpretarse como una rotación de d unidades hacia la izquierda. Las rotaciones r_d forman un grupo C_n con la composición.

Sea ahora \mathcal{B} una clase con $b_0 = 0$ y consideremos la clase \mathcal{A}_n de las sucesiones de n elementos de \mathcal{B} . El grupo C_n actúa sobre \mathcal{A}_n :

$$r_d(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) = (\beta_{r_d(0)}, \beta_{r_d(1)}, \dots, \beta_{r_d(n-1)})$$

e induce una relación de equivalencia \sim_n . Por ejemplo

$$(1, 3, 2, 2) \sim (3, 2, 2, 1) \sim (2, 2, 1, 3) \sim (2, 1, 3, 2).$$

Observe que las r_d conservan el tamaño de las secuencias.

Digamos que dos elementos de $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ son equivalentes si tienen el mismo número de elementos n y son equivalentes en \mathcal{A}_n . Se define $\mathfrak{C}(\mathcal{B})$ como el conjunto cociente de $\mathfrak{S}(\mathcal{B}) \setminus \{\epsilon\}$ por esta relación \sim , es decir

$$\mathfrak{C}(\mathcal{B}) = (\mathfrak{S}(\mathcal{B}) \setminus \{\epsilon\}) / \sim.$$

Observe que en las secuencias incluimos la secuencia nula ϵ , en cambio no hay “ciclos nulos”.

¿Cuántos elementos tiene la clase de equivalencia de una secuencia de n elementos? Aparentemente la respuesta es n , y en efecto ese es el caso si

los elementos de la secuencia son todos diferentes. Pero si hay elementos repetidos la situación se complica. Por ejemplo la clase de equivalencia de $(1, 3, 2, 2)$ tiene cuatro elementos, pero la de $(1, 2, 1, 2)$ sólo tiene dos, a saber $(1, 2, 1, 2)$ y $(2, 1, 2, 1)$.

Sea $b(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ la fgo de \mathcal{B} . Para hallar la fgo $c(z)$ de $\mathfrak{C}(\mathcal{B})$, calculemos primero la de \mathcal{A}_n . Definamos $p: \mathcal{A}_n \rightarrow \mathbb{Z}[z]$ como $p(\alpha) = z^{|\alpha|}$. Entonces por la Proposición 1.6.2 (pág. 12) se tiene

$$\sum_{\bar{\alpha} \in \overline{\mathcal{A}_n}} \bar{p}(\bar{\alpha}) = \frac{1}{n} \sum_{r \in C_n} \sum_{\alpha \in (\mathcal{A}_n)_r} z^{|\alpha|},$$

donde el miembro izquierdo es la fgo del cociente \mathcal{A}_n / \sim_n .

En cuanto al miembro derecho observemos que r_j , como permutación de $\{0, 1, \dots, n-1\}$, se descompone en d ciclos de longitud n/d , siendo $d = \text{mcd}(j, n)$. Por ejemplo si $n = 12$, r_9 se descompone como $(0, 9, 6, 3)(1, 10, 7, 4)(2, 11, 8, 5)$. Ahora bien, si una secuencia en \mathcal{A}_n queda fija al aplicarle r_j , los elementos en cada ciclo deben ser iguales. La secuencia

$$(a_1, a_2, \dots, a_d, a_1, a_2, \dots, a_d, \dots, a_1, a_2, \dots, a_d)$$

contribuye con un término

$$z^{\frac{n}{d}|a_1| + \frac{n}{d}|a_2| + \dots + \frac{n}{d}|a_d|},$$

luego

$$\sum_{\alpha \in (\mathcal{A}_n)_{r_j}} z^{|\alpha|} = \sum_{a_1, a_2, \dots, a_d \in \mathcal{B}} (z^{\frac{n}{d}})^{|a_1|} (z^{\frac{n}{d}})^{|a_2|} \dots (z^{\frac{n}{d}})^{|a_d|} = (b(z^{\frac{n}{d}}))^d.$$

Si $d \mid n$, el número de rotaciones r_j para las cuales $\text{mcd}(j, n) = d$ es $\varphi(n/d)$, siendo φ la función de Euler. Luego

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{r \in C_n} \sum_{\alpha \in (\mathcal{A}_n)_r} z^{|\alpha|} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) (b(z^{\frac{n}{d}}))^d.$$

Intercambiando el orden de sumación y poniendo $n = kd$ queda

$$\begin{aligned} c(z) &= \sum_{d \geq 1} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{dk} \varphi(k) (b(z^k))^d = \sum_{k \geq 1} \frac{\varphi(k)}{k} \sum_{d \geq 1} \frac{1}{d} (b(z^k))^d \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{\varphi(k)}{k} \log \frac{1}{1 - b(z^k)}. \end{aligned}$$

3.8. Punteo y composición

Si \mathcal{B} es una clase y $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ son objetos neutrales de tamaño 0, entonces la clase *punteada* de \mathcal{B} es la clase

$$\Theta\mathcal{B} = \sum_{n \geq 0} \mathcal{B}_n \times \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}.$$

Si \mathcal{B} y \mathcal{C} son clases, su *composición* es la clase

$$\mathcal{B} \circ \mathcal{C} = \sum_{n \geq 0} \mathcal{B}_n \times \mathfrak{S}_n(\mathcal{C}).$$

Es fácil ver que la fgo de $\Theta\mathcal{B}$ es $zb'(z)$ y la de $\mathcal{B} \circ \mathcal{C}$ es $b(c(z))$.

3.9. Resumen de construcciones admisibles

Todo lo hallado hasta este momento se resume en el siguiente

Teorema 3.9.1. *Para cada una de las construcciones indicadas en la columna izquierda de la siguiente tabla, la columna derecha indica cómo se obtiene su fgo a partir de las fgos componentes. Para $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$, $\mathfrak{P}(\mathcal{B})$, $\mathfrak{M}(\mathcal{B})$ y $\mathfrak{C}(\mathcal{B})$ se supone $b_0 = 0$.*

clase \mathcal{A}	fgo $a(z)$
$\mathcal{B} + \mathcal{C}$	$b(z) + c(z)$
$\mathcal{B} \times \mathcal{C}$	$b(z)c(z)$
$\mathfrak{S}(\mathcal{B})$	$\frac{1}{1-b(z)}$
$\mathfrak{P}(\mathcal{B})$	$\prod_{n \geq 0} (1 + z^n)^{b_n} = \exp\left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} b(z^n)\right)$
$\mathfrak{M}(\mathcal{B})$	$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)^{-b_n} = \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{b(z^k)}{k}\right)$
$\mathfrak{C}(\mathcal{B})$	$\sum_{k \geq 1} \frac{\varphi(k)}{k} \log \frac{1}{1-b(z^k)}$
$\Theta\mathcal{B}$	$zb'(z)$
$\mathcal{B} \circ \mathcal{C}$	$b(c(z))$

3.10. Ecuaciones con clases

Las operaciones con clases que hemos visto permiten plantear ecuaciones, por ejemplo si \mathcal{A} y \mathcal{B} son clases conocidas, entonces

$$\mathcal{A} + \mathcal{X} = \mathcal{B}$$

es una ecuación donde la incógnita es la clase \mathcal{X} . En este caso, si $a(z)$ y $b(z)$ son las fgos de \mathcal{A} y \mathcal{B} , es trivial hallar la fgo $x(z)$ de \mathcal{X} . En efecto, como $a(z) + x(z) = b(z)$ se tiene que $x(z) = b(z) - a(z)$. Análogamente si $\mathcal{A} \times \mathcal{X} = \mathcal{B}$ entonces $x(z) = b(z)/a(z)$.

Si $\mathcal{A} = \mathfrak{S}(\mathcal{X})$ entonces $a(z) = \frac{1}{1-x(z)}$, de donde $x(z) = 1 - \frac{1}{a(z)}$.

Una ecuación más difícil es $\mathcal{A} = \mathfrak{M}(\mathcal{X})$. En este caso

$$\log a(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{x(z^k)}{k}$$

y si ponemos $L_n = [z^n] \log a(z)$, entonces

$$L_n = [z^n] \sum_{k \geq 1} \frac{x(z^k)}{k} = \sum_{k|n} \frac{1}{k} X_{n/k} = \sum_{d|n} \frac{d}{n} X_d,$$

de donde

$$nL_n = \sum_{d|n} dX_d.$$

Ahora, por inversión de Möbius, se obtiene

$$nX_n = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} L_{n/d},$$

o sea

$$X_n = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} L_{n/d}.$$

De aquí se obtiene

$$\begin{aligned} x(z) &= \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} L_{n/d} (z^d)^{n/d} = \sum_{d \geq 1} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{k \geq 1} L_k (z^d)^k \\ &= \sum_{d \geq 1} \frac{\mu(d)}{d} \log a(z^d). \end{aligned}$$

Aquí finaliza esta introducción a las clases combinatorias ordinarias. El lector interesado encontrará muchos más ejemplos, detalles y aplicaciones en [11].

Capítulo 4

Clases multivariadas

EN este capítulo se introducen las clases combinatorias multivariadas y sus correspondientes funciones generatrices, que generalizan lo visto en el capítulo precedente.

4.1. Definiciones

En el Capítulo 3 se definieron las clases combinatorias como conjuntos provistos de una función *tamaño*. Es natural considerar la posibilidad de la presencia simultánea de varias de estas funciones.

Definición 4.1.1. *Una clase combinatoria multivariada es un conjunto finito o infinito numerable \mathcal{C} junto con una colección finita de funciones $t_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, k$, tales que $t_i^{-1}(n)$ es finito para todo $i = 1, 2, \dots, k$ y todo $n \in \mathbb{N}$. El subconjunto de \mathcal{C} formado por los objetos $x \in \mathcal{C}$ con tamaños $t_i(x) = n_i$ se denotará $\mathcal{C}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, y su cardinal por c_{n_1, n_2, \dots, n_k} . La función generatriz ordinaria (fgo) de una clase multivariada \mathcal{C} es la serie formal multivariada*

$$c(z) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k \geq 0} c_{n_1, n_2, \dots, n_k} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_k^{n_k}.$$

La suma combinatoria y el producto cartesiano de clases multivariadas se definen de modo análogo al caso ordinario visto en el capítulo 3. Por ejemplo si \mathcal{B} y \mathcal{C} son clases multivariadas con la misma cantidad k de funciones tamaño $t_{\mathcal{B}, i}$ y $t_{\mathcal{C}, i}$, respectivamente, entonces en $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ se

define $t_{A,i}(\beta, \gamma) = t_{B,i}(\beta) + t_{C,i}(\gamma)$. De este modo la fgo del producto es el producto de las fgo de cada una de las clases \mathcal{B} y \mathcal{C} . Análogamente la fgo de la suma combinatoria $\mathcal{B} + \mathcal{C}$ es la suma de las fgo de \mathcal{B} y \mathcal{C} .

4.2. Construcciones con número de componentes restringido

Dada una clase \mathcal{B} , la clase $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ de las secuencias finitas de elementos de \mathcal{B} puede considerarse como una clase bivariada, en la cual además de la función tamaño

$$t_1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) = \sum_{i=0}^k |\beta_i|_{\mathcal{B}}$$

está definida otra función t_2 que da el número de componentes, es decir

$$t_2(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) = k.$$

En el Capítulo 3 vimos que la clase $\mathfrak{S}_k(\mathcal{B})$ de las secuencias de longitud k de elementos de una clase \mathcal{B} tiene fgo $b(z)^k$, luego la fgo bivariada de $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ es

$$\sum_{k \geq 0} b(z)^k.$$

Análogamente se pueden considerar $\mathfrak{P}(\mathcal{B})$, $\mathfrak{M}(\mathcal{B})$ y $\mathfrak{C}(\mathcal{B})$ como clases bivariadas, respecto a las funciones tamaño y número de componentes. Recordemos que si \mathcal{B} es finita entonces la fgo de $\mathfrak{P}(\mathcal{B})$ es

$$p(z) = \prod_{n \geq 0} (1 + z^n)^{b_n}.$$

Para tomar en cuenta el número de componentes la fgo bivariada es

$$p(u, z) = \prod_{n \geq 0} (1 + uz^n)^{b_n}.$$

De aquí se tiene

$$\begin{aligned} \log(p(u, z)) &= \sum_{n \geq 0} b_n \log(1 + uz^n) = \sum_{n \geq 0} b_n \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} u^k z^{nk} \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1} u^k}{k} \sum_{n \geq 0} b_n z^{nk} = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} u^k b(z^k) \end{aligned}$$

y finalmente

$$p(u, z) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} u^n b(z^n) \right).$$

Esto se extiende a clases \mathcal{B} infinitas numerables como se hizo en el Capítulo 3.

A partir de $p(u, z)$ se puede obtener la fgo de $\mathfrak{P}_k(\mathcal{B})$, los conjuntos con k elementos, extrayendo el coeficiente de u^k , es decir

$$p_k(z) = [u^k] \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} u^n b(z^n) \right).$$

Por ejemplo

$$\begin{aligned} p_2(z) &= [u^2] \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} u^n b(z^n) \right) \\ &= [u^2] \left(1 + (ub(z) - \frac{1}{2}u^2b(z^2)) + \frac{1}{2!}(ub(z))^2 \right) \\ &= -\frac{1}{2}b(z^2) + \frac{1}{2}b(z)^2. \end{aligned}$$

Este resultado se puede comprobar directamente: $b(z)^2$ cuenta los pares ordenados (β_1, β_2) , mientras que $b(z^2)$ cuenta los pares de elementos idénticos (β, β) . La diferencia $b(z)^2 - b(z^2)$ cuenta los pares ordenados con elementos diferentes, y dividiendo entre 2 tenemos la fgo de los pares de elementos diferentes $\{\beta_1, \beta_2\}$, es decir de $\mathfrak{P}_2(\mathcal{B})$.

Para multiconjuntos recordemos que si \mathcal{B} es finita entonces la fgo $m(z)$ de $\mathfrak{M}(\mathcal{B})$ es

$$m(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)^{-b_n}.$$

La fgo bivariada es

$$m(u, z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - uz^n)^{-b_n},$$

de donde

$$\begin{aligned} \log(m(u, z)) &= \sum_{n \geq 0} -b_n \log(1 - uz^n) = \sum_{n \geq 0} b_n \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} u^k z^{nk} \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{u^k}{k} \sum_{n \geq 0} b_n z^{nk} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} u^k b(z^k) \end{aligned}$$

y finalmente

$$m(u, z) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} u^n b(z^n) \right).$$

Esto se extiende a clases \mathcal{B} infinitas numerables como se hizo en el Capítulo 3.

A partir de $m(u, z)$ se puede obtener la fgo de $\mathfrak{M}_k(\mathcal{B})$, los multiconjuntos con k elementos, extrayendo el coeficiente de u^k , es decir

$$m_k(z) = [u^k] \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} u^n b(z^n) \right).$$

Para $\mathfrak{C}(\mathcal{B})$ obtuvimos en el Capítulo 3 la fgo

$$c(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{\varphi(k)}{k} \log \frac{1}{1 - b(z^k)}.$$

La fgo bivariada es

$$c(u, z) = \sum_{k \geq 1} \frac{\varphi(k)}{k} \log \frac{1}{1 - u^k b(z^k)},$$

y a partir de ella se puede obtener la fgo de $\mathfrak{C}_n(\mathcal{B})$ extrayendo el coeficiente de u^n :

$$c_n(z) = [u^n] \sum_{k \geq 1} \frac{\varphi(k)}{k} \log \frac{1}{1 - u^k b(z^k)}.$$

4.3. Algunos ejemplos

Los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ se pueden considerar como una familia de números a dos parámetros. Por un lado

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k = (1 + z)^n$$

y $(1+z)^n$ es la fgo de los $\binom{n}{k}$ para n fijo y variando k . La fgo bivariada es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1+z)^n w^n = \frac{1}{1-w-wz}.$$

Una función generatriz también puede ser mixta: ordinaria en unos parámetros y exponencial en otros. Por ejemplo la función generatriz de los $\binom{n}{k}$ ordinaria en k y exponencial en n es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (1+z)^n \frac{w^n}{n!} = e^{(1+z)w}.$$

los números de Stirling de las particiones $\{n_k\}$ también se pueden considerar como una familia bivariada. Si se considera el número de bloques k fijo y n como el tamaño de una partición, entonces la función generatriz exponencial de los $\{n_k\}$ es:

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=n \\ n_1>0, \dots, n_k>0}} \binom{n}{n_1 \dots n_k} \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right)^k = \frac{(e^t - 1)^k}{k!} \end{aligned}$$

(en el próximo capítulo se verá como obtener esta fge de manera automática aplicando técnicas simbólicas a clases etiquetadas). Multiplicando ambos miembros por u^k y sumando en k se obtiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} u^k \frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((e^t - 1)u)^k}{k!} = e^{(e^t - 1)u}.$$

Por lo tanto $e^{(e^t - 1)u}$ es la función generatriz bivariada (exponencial en n y ordinaria en k) de los $\{n_k\}$.

Análogamente, como se verá en el próximo capítulo,

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] t^n n! = \frac{1}{k!} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^k.$$

Multiplicando ambos miembros por u^k y sumando en k se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} u^k \frac{t^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(u \log \frac{1}{1-z} \right)^k \\ &= \exp \left(u \log \frac{1}{1-z} \right) \\ &= \frac{1}{(1-z)^u}.\end{aligned}$$

Así se tiene que $(1-z)^{-1}$ es la función generatriz bivariada (exponencial en n y ordinaria en k) de los $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

Capítulo 5

Clases etiquetadas

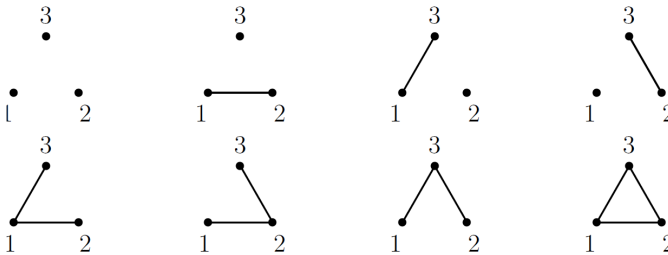
EN este capítulo se considerarán clases (en el sentido de la Definición 3.1.1) de objetos *etiquetados*. Esto significa que cada átomo de los que componen un objeto tiene asociada una *etiqueta* diferente.

5.1. Introducción

Grafos con tres vértices hay solamente cuatro (a menos de isomorfismos):



En cambio si consideramos los vértices etiquetados con 1, 2 y 3 hay 8:



Existen varias maneras de formalizar la noción de estructuras etiquetadas, entre ellas la teoría de especies de Joyal [3, 17] y los *prefabs* de Bender y Goldman [4]. Aquí adoptaremos la siguiente definición:

Definición 5.1.1. *Un objeto débilmente etiquetado es un grafo cuyo conjunto de vértices es un subconjunto de \mathbb{Z} . Un objeto bien etiquetado de tamaño n es un objeto débilmente etiquetado cuyo conjunto de vértices es $\{1, 2, \dots, n\}$. Una clase etiquetada es una clase combinatoria cuyos objetos están bien etiquetados.*

Puede parecer una limitación considerar como objetos únicamente a los grafos, pero en realidad éstos permiten representar prácticamente todas las estructuras discretas consideradas en esta obra. Por ejemplo si tomamos como objetos los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ donde cada n tiene tamaño n , podemos asociar a cada $n \in \mathbb{N}$ un grafo no dirigido con n vértices aislados (es decir, sin aristas) o bien un grafo dirigido lineal con n vértices.

Definición 5.1.2. *La función generatriz exponencial (fge) de una clase combinatoria \mathcal{C} es la serie formal*

$$c(z) = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!}.$$

Como en el caso no etiquetado, es útil tener a mano un par de clases etiquetadas elementales: la clase *neutral* \mathcal{E} , constituida por un único objeto de tamaño cero (sin etiqueta alguna), y la clase *atómica* \mathcal{L} constituida por un único objeto atómico de tamaño 1, etiquetado con el 1. Observe que la fge de \mathcal{E} es 1 y la de \mathcal{L} es z .

EJERCICIO 5.1.1. Halle las fges (a) de la clase $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ de los números enteros no negativos, (b) de la clase $2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ de los números enteros pares negativos y (c) de la clase $2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1$ de los números enteros impares positivos.

5.2. Permutaciones, urnas y ciclos

Una *permutación* de un conjunto A es una biyección de A en sí mismo. Llamaremos S_n al conjunto de las permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$. Con la composición como operación, S_n es un grupo, llamado *grupo simétrico*. Una permutación $\sigma \in S_n$ se puede representar *en forma vertical* como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

donde $\sigma_i = \sigma(i)$. La representación *en línea* es simplemente la lista ordenada de valores $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

Las permutaciones son un ejemplo típico de objetos etiquetados. La representación vertical de σ muestra que la podemos considerar como el conjunto de números $\{1, 2, \dots, n\}$, en el cual i se etiqueta con σ_i .

La representación en línea muestra que también se puede representar σ mediante un grafo dirigido lineal:

$$\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_n$$

en el cual los vértices están etiquetados con $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$.

Como hay $n!$ permutaciones de n elementos, la fge de la clase \mathcal{P} de las permutaciones es

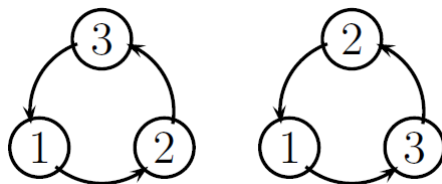
$$p(z) = \sum_{n \geq 0} n! \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Una *urna* se define como un grafo bien etiquetado sin aristas. Si tomamos como tamaño de una urna el número de vértices, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ hay una única urna de tamaño n , formada por n vértices aislados etiquetados de 1 a n (con el grafo vacío como urna de tamaño 0).

La fge de la clase \mathcal{U} de las urnas es

$$u(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Finalmente un *ciclo* o *permutación cíclica* es un grafo dirigido circular, en el cual todas las flechas van en la misma dirección. La figura siguiente muestra los dos permutaciones cíclicas de $\{1, 2, 3\}$.



Observe que no hay ciclos de 0 elementos, y que para $n \geq 1$ hay $(n-1)!$ permutaciones cíclicas de $\{1, 2, \dots, n\}$. Por lo tanto la fge de la clase \mathcal{C} de los ciclos es

$$c(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} = \log \frac{1}{1-z}.$$

5.3. Clases etiquetadas versus no etiquetadas

A cada clase etiquetada \mathcal{A} le corresponde una clase no etiquetada $\widehat{\mathcal{A}}$ cuyos objetos son los mismos de \mathcal{A} pero ignorando las etiquetas. Más formalmente, si $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ digamos que $\alpha \sim \beta$ si β se puede obtener reetiquetando α (aquí se admite cualquier reetiquetamiento, no sólo los que preservan el orden). Es claro que \sim es una relación de equivalencia en \mathcal{A} , y podemos definir $\widehat{\mathcal{A}}$ como \mathcal{A} / \sim . Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ de tamaño n , su clase de equivalencia contiene al menos un elemento y como máximo $n!$, por lo tanto:

$$\hat{a}_n \leq a_n \leq n! \hat{a}_n,$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{a_n}{n! \hat{a}_n} \leq 1.$$

Un ejemplo elemental es el de la clase \mathcal{P} de las permutaciones, Si las consideramos como grafos dirigidos lineales etiquetados, es claro que $\widehat{\mathcal{P}}$ es una clase que tiene exactamente un objeto de tamaño n para cada n . En este caso $p_n = n!$ y $\hat{p}_n = 1$, es decir que se cumple $p_n = n! \hat{p}_n$ exactamente.

Un ejemplo más interesante es la clase \mathcal{G} de los grafos etiquetados, para la cual $\widehat{\mathcal{G}}$ es la clase de los grafos no etiquetados. Es muy fácil hallar el número g_n de grafos etiquetados con n vértices, ya que para cada par de vértices puede haber o no una arista que los conecte, por lo tanto

$$g_n = 2^{\binom{n}{2}} = 2^{n(n-1)/2}.$$

Hallar \hat{g}_n (sucesión OEIS A000088) es mucho más difícil, pero se puede hacer usando la teoría de Polya (ver por ejemplo [25]). La siguiente tabla muestra los primeros valores de g_n y \hat{g}_n .

n	g_n	\hat{g}_n
1	1	1
2	2	2
3	8	4
4	64	11
5	1024	34
6	32768	156
7	2097152	1044

Evidentemente g_n crece mucho más rápido que \hat{g}_n , pero la evolución de la relación normalizada $g_n/(n!\hat{g}_n)$:

n	$g_n/(n!\hat{g}_n)$
1	1.0000000000
2	0.5000000000
3	0.3333333333
4	0.2424242424
6	0.2917378918
8	0.5392536367
12	0.9330800361
16	0.9926428522

parece indicar que luego de cierta vacilación inicial $g_n/(n!\hat{g}_n)$ tiende a 1. Eso es verdad, y fue probado por primera vez por Polya (una demostración puede verse en [16], capítulo 9). Intuitivamente se explica así: dos maneras distintas de etiquetar los vértices de un grafo no etiquetado G producen el mismo grafo etiquetado cuando hay un automorfismo no trivial de G . Para n grande, la mayoría de los grafos tienen una estructura de adyacencia complicada que impide que haya automorfismos no triviales, y por eso corresponden a exactamente $n!$ grafos etiquetados.

5.4. Construcciones admisibles

Para clases etiquetadas y fges se define la *admisibilidad* de una construcción de manera análoga a como se hizo para clases no etiquetadas y fgos: debe cumplirse que la fge del resultado dependa solamente de las fges de las clases operandos.

La *suma combinatoria* que se examinó en 3.3 funciona de manera idéntica para clases etiquetadas: la fge de la suma es igual a la suma de las fges.

En cambio el producto cartesiano de clases no se comporta bien en el caso etiquetado. Uno de los problemas es cómo asignar etiquetas a un par ordenado de objetos etiquetados.

Definición 5.4.1. *Dado un objeto α débilmente etiquetado con n enteros diferentes $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, su reducción $\rho(\alpha)$ es el objeto bien etiquetado que se obtiene cambiando cada etiqueta a_i en α por i , para $i = 1, 2, \dots, n$.*

Por ejemplo si α es la lista ordenada $(4, 2, 8, 5)$, entonces $\rho(\alpha) = (2, 1, 4, 3)$.

Definición 5.4.2. *El producto etiquetado de dos objetos etiquetados α y β es el conjunto $\alpha \star \beta$ de todos los pares bien etiquetados (α', β') tales que $\rho(\alpha') = \alpha$ y $\rho(\beta') = \beta$.*

Por ejemplo si $\alpha = (2, 1)$ y $\beta = (1, 2)$, entonces

$$\alpha \star \beta = \{((2, 1), (3, 4)), ((3, 1), (2, 4)), ((4, 1), (2, 3)), ((3, 2), (1, 4)), ((4, 2), (1, 3)), ((4, 3), (1, 2))\}.$$

Observe que $\alpha \star \beta$ tiene $\binom{|\alpha|+|\beta|}{|\alpha|}$ elementos, cada uno de ellos de tamaño $|\alpha| + |\beta|$.

Definición 5.4.3. *El producto etiquetado de dos clases etiquetadas \mathcal{B} y \mathcal{C} es la clase etiquetada*

$$\mathcal{B} \star \mathcal{C} = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}, \gamma \in \mathcal{C}} \beta \star \gamma.$$

El número de objetos de tamaño n en $\mathcal{B} \star \mathcal{C}$ es $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k c_{n-k}$, luego la fge de $\mathcal{A} = \mathcal{B} \star \mathcal{C}$ es

$$\begin{aligned} a(z) &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k c_{n-k} \right) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!} \frac{c_{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n \\ &= \left(\sum_{k \geq 0} \frac{b_k}{k!} z^k \right) \left(\sum_{j \geq 0} \frac{c_j}{j!} z^j \right) = b(z)c(z). \end{aligned}$$

Observación 5.4.1. La convolución ordinaria que expresa los coeficientes del producto de dos fgs en función de los coeficientes de los factores, en el caso de las fgs se sustituye por la *convolución binomial*:

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k c_{n-k}.$$

Es fácil comprobar que el producto etiquetado es asociativo, es decir que

$$(\mathcal{B} \star \mathcal{C}) \star \mathcal{D} \cong \mathcal{B} \star (\mathcal{C} \star \mathcal{D}),$$

por lo cual se puede escribir $\mathcal{B} \star \mathcal{C} \star \mathcal{D}$ sin paréntesis.

EJERCICIO 5.4.1. Halle el producto etiquetado de los ciclos $(1, 3, 2)$ y $(2, 1)$.

5.5. Secuencias, conjuntos y ciclos

El producto etiquetado de k factores iguales a \mathcal{B} se denota \mathcal{B}^k o $\mathfrak{S}_k(\mathcal{B})$, y la clase de secuencias etiquetadas $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$, suponiendo que $b_0 = 0$, se define como

$$\mathfrak{S}(\mathcal{B}) = \{\epsilon\} + \mathcal{B} + \mathcal{B}^2 + \mathcal{B}^3 + \dots$$

La fge de $\mathfrak{S}_k(\mathcal{B})$ es $b(z)^k$ y la de $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ es $\frac{1}{1-b(z)}$.

Observe que las dos componentes de un par en $\mathcal{B} \star \mathcal{B}$ son por definición *diferentes*. Del mismo modo, las k componentes de una k -secuencia en el producto etiquetado de k factores iguales a \mathcal{B} son todas diferentes.

Un *conjunto* de k elementos de \mathcal{B} es como una secuencia en la cual el orden no tiene importancia. Es decir que podemos definir la clase $\mathfrak{P}_k(\mathcal{B})$ como el cociente $\mathfrak{S}_k(\mathcal{B}) / \sim$, donde \sim es la relación de equivalencia que identifica dos secuencias cuando una es una permutación de la otra. Observe que, a diferencia del caso no etiquetado, aquí no tiene sentido distinguir entre subconjuntos y multiconjuntos (pues las componentes son todas diferentes). Como cada clase de equivalencia tiene $k!$ elementos, la fge de $\mathfrak{P}_k(\mathcal{B})$ es

$$p_k(z) = \frac{1}{k!} b(z)^k.$$

La clase potencia $\mathfrak{P}(\mathcal{B})$ se define como

$$\mathfrak{P}(\mathcal{B}) = \{\epsilon\} \cup \mathfrak{P}_1(\mathcal{B}) \cup \mathfrak{P}_2(\mathcal{B}) \cup \dots = \bigcup_{k \geq 0} \mathfrak{P}_k(\mathcal{B})$$

y su fge es

$$p(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} b(z)^k = \exp(b(z)).$$

Los *ciclos* de longitud k se definen como en el caso no etiquetado: son el cociente $\mathfrak{C}_k(\mathcal{B}) = \mathfrak{S}_k(\mathcal{B}) / \sim$, donde \sim es la relación de equivalencia que identifica dos secuencias cuando una es una permutación cíclica de la otra. Como las componentes son diferentes hay k secuencias en cada clase de equivalencia y por lo tanto la fge de $\mathfrak{C}_k(\mathcal{B})$ es

$$c_k(z) = \frac{1}{k} b(z)^k.$$

La clase $\mathfrak{C}(\mathcal{B})$ de los ciclos que se pueden formar con elementos de \mathcal{B} es

$$\mathfrak{C}(\mathcal{B}) = \sum_{k \geq 1} \mathfrak{C}_k(\mathcal{B})$$

y su fge es

$$c(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} b(z)^k = \log \frac{1}{1 - b(z)}.$$

5.6. Resumen de construcciones etiquetadas

Lo hallado hasta este momento para construcciones etiquetadas se resume en el siguiente

Teorema 5.6.1. *Para cada una de las construcciones indicadas en la columna izquierda de la siguiente tabla, la columna derecha indica cómo se obtiene su fge a partir de las fges componentes. Para $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$, $\mathfrak{P}(\mathcal{B})$ y $\mathfrak{C}(\mathcal{B})$ se supone $b_0 = 0$.*

clase	fge
$\mathcal{B} + \mathcal{C}$	$b(z) + c(z)$
$\mathcal{B} \times \mathcal{C}$	$b(z)c(z)$
$\mathfrak{S}_k(\mathcal{B})$	$b(z)^k$
$\mathfrak{S}(\mathcal{B})$	$\frac{1}{1-b(z)}$
$\mathfrak{P}_k(\mathcal{B})$	$\frac{1}{k!}b(z)^k$
$\mathfrak{P}(\mathcal{B})$	$\exp(b(z))$
$\mathfrak{C}_k(\mathcal{B})$	$\frac{1}{k}b(z)^k$
$\mathfrak{C}(\mathcal{B})$	$\log \frac{1}{1-b(z)}$

Si \mathcal{Z} es la clase atómica con un único elemento de tamaño 1, entonces es claro que las clases \mathcal{P} de las permutaciones, \mathcal{U} de las urnas y \mathcal{C} de las permutaciones cíclicas se pueden caracterizar como

$$\mathcal{P} = \mathfrak{S}(\mathcal{Z}), \quad \mathcal{U} = \mathfrak{P}(\mathcal{Z}), \quad \mathcal{C} = \mathfrak{C}(\mathcal{Z}).$$

EJERCICIO 5.6.1. Halle la fge de la clase de los pares (desordenados) de ciclos, y deduzca una expresión para el número $\binom{n}{2}$ de permutaciones de n elementos que se descomponen en producto de exactamente dos ciclos disjuntos.

5.7. Funciones sobreyectivas y particiones

Una función sobreyectiva $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$ queda caracterizada por la sucesión de preimágenes $(f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(r))$, es decir con una sucesión de r subconjuntos no vacíos de $\{1, 2, \dots, n\}$. Si llamamos $\mathcal{R}_n^{(r)}$ a la clase de estas funciones, entonces $\mathcal{R}^{(r)} = \bigcup_n \mathcal{R}_n^{(r)}$ se puede identificar con las sucesiones de r conjuntos no vacíos, es decir con $\mathfrak{S}_r(\mathfrak{P}_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$. La fge de $\mathfrak{P}_{\geq 1}(\mathcal{Z})$ es $e^z - 1$ (pues la de $\mathfrak{P}(\mathcal{Z})$ es e^z , pero si excluimos el vacío queda $e^z - 1$). Por lo tanto la fge de $\mathcal{R}^{(r)}$ es $(e^z - 1)^r$. Expandiendo por el teorema binomial queda

$$(e^z - 1)^r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j e^{(r-j)z}$$

y el número de funciones sobreyectivas de $\{1, 2, \dots, n\}$ en $\{1, 2, \dots, r\}$ es el coeficiente de $z^n/n!$ en la expresión precedente, es decir

$$R_n^{(r)} = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j (r-j)^n.$$

Si $\mathcal{R} = \bigcup_r \mathcal{R}^{(r)}$, entonces $\mathcal{R} = \mathfrak{S}(\mathfrak{P}_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$ y su fge es

$$R(z) = \frac{1}{2 - e^z} = 1 + z + 3\frac{z^2}{2!} + 13\frac{z^3}{3!} + 75\frac{z^4}{4!} + 541\frac{z^5}{5!} + \dots$$

A los números R_n (sucesión OEIS A000670) se les llama de varias maneras: números de Bell ordenados, números de Fubini, números de arreglos preferenciales, etc.

Consideremos ahora las particiones del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ en r bloques (subconjuntos disjuntos y no vacíos). Si llamamos $\mathcal{S}_n^{(r)}$ a la clase de estas particiones, entonces $\mathcal{S}^{(r)} = \bigcup_n \mathcal{S}_n^{(r)}$ se puede identificar con los conjuntos de r conjuntos no vacíos, es decir con $\mathfrak{P}_r(\mathfrak{P}_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$. La fge de $\mathfrak{P}_{\geq 1}(\mathcal{Z})$ es $e^z - 1$, por lo tanto la fge de $\mathcal{S}^{(r)}$ es $\frac{1}{r!}(e^z - 1)^r$.

Los números $S_n^{(r)}$ son los llamados *números de Stirling de segunda clase* o *números de Stirling de las particiones* y, siguiendo la propuesta de Knuth ([18], [15]) los denotamos $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix} \right\}$. Es claro que entre estos números y los $R_n^{(r)}$ hay una estrecha relación, a saber $S_n^{(r)} = \frac{1}{r!}R_n^{(r)}$. Esto se deduce de sus respectivas fges o bien observando que a cada partición en r bloques le corresponden $r!$ funciones sobreyectivas. Por lo tanto se tiene

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r!}R_n^{(r)} = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j (r-j)^n.$$

Si $\mathcal{S} = \bigcup_r \mathcal{S}^{(r)}$, entonces $\mathcal{S} = \mathfrak{P}(\mathfrak{P}_{\geq 1}(\mathcal{Z}))$ y su fge es

$$S(z) = e^{e^z - 1} = 1 + z + 2\frac{z^2}{2!} + 5\frac{z^3}{3!} + 15\frac{z^4}{4!} + 52\frac{z^5}{5!} + 203\frac{z^6}{6!} + 877\frac{z^7}{7!} + \dots$$

Los números S_n (sucesión OEIS A000110) se llaman *números de Bell*. Es claro que

$$S_n = \sum_{r=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}.$$

Partiendo de

$$S(z) = e^{-1}e^{e^z} = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kz}}{k!} = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kz)^n}{n!}$$

resulta la fórmula publicada por Dobiński en 1877 (ver [10]):

$$S_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Un interesante artículo sobre estos números puede verse en [29].

EJERCICIO 5.7.1. Halle la fge de la clase (a) de las particiones en un número par de bloques; (b) de las particiones en un número impar de bloques; (c) de las particiones en bloques de tamaño par; (d) de las particiones en bloques de tamaño impar.

EJERCICIO 5.7.2. ¿De cuántas maneras se pueden particionar los vértices de un árbol con n vértices en exactamente k bloques, de modo que ningún bloque contenga vértices adyacentes?

5.8. Permutaciones y ciclos

La clase $\mathcal{P}^{(r)}$ de las permutaciones que se descomponen como producto de r ciclos disjuntos se puede caracterizar como $\mathfrak{P}_r(\mathfrak{C}(\mathcal{Z}))$, luego su fge es

$$P^{(r)}(z) = \frac{1}{r!} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^r.$$

Los números $P_n^{(r)}$ que cuentan las permutaciones de n objetos que se descomponen como producto de r ciclos disjuntos son llamados *números de Stirling de primera clase* o *números de Stirling de los ciclos* y siguiendo la propuesta de Knuth ([18], [15]) los denotamos $[n]_r$.

Si definimos una fge bivariada como

$$P(z, u) = \sum_{r=0}^{\infty} P^{(r)}(z) u^r,$$

entonces

$$P(z, u) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{u^r}{r!} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^r = \exp \left(u \log \frac{1}{1-z} \right) = (1-z)^{-u},$$

de donde

$$n! [z^n] P(z, u) = n! [z^n] (1-z)^{-u} = (-1)^n n! \binom{-u}{n} = u(u+1) \cdots (u+n-1),$$

de donde se sigue

$$u^{\overline{n}} = u(u+1) \cdots (u+n-1) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} u^k$$

y cambiando u por $-u$

$$u^{\underline{n}} = u(u-1) \cdots (u-n+1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} u^k.$$

Ésta y otras identidades relacionadas con números de Stirling, como por ejemplo

$$u^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} u^k$$

pueden obtenerse también usando enumeración bajo acción de grupos (ver [23]).

5.8.1. Aplicación al análisis de algoritmos

Los números de Stirling juegan un papel importante en el análisis de algoritmos. Veamos un ejemplo. Se dice que una sucesión de números reales a_1, a_2, \dots, a_n presenta un *mínimo de izquierda a derecha* en la posición i si se cumple que $a_j > a_i$ para todo $j < i$. Entonces se tiene:

Teorema 5.8.1. *El número de permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$ que al ser escritas en forma de sucesión presentan exactamente k mínimos de izquierda a derecha es $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.*

Demostración. Para cada $\sigma \in S_n$ digamos que su descomposición en ciclos disjuntos está escrita en forma canónica si cada ciclo comienza por su menor elemento, y los ciclos aparecen de izquierda a derecha en orden decreciente de sus primeros elementos. Por ejemplo

$$\sigma = \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 3 & 6 \end{array} \right) = (6, 8)(3, 5, 7)(1, 2, 4).$$

Lo interesante de esta representación es que, si se quitan los paréntesis que encierran a cada ciclo, la permutación original puede ser reconstruida abriendo paréntesis antes de cada mínimo de izquierda a derecha.

En consecuencia, el primer elemento de cada ciclo es un mínimo de izquierda a derecha, y obviamente no hay otros mínimos. Construyamos ahora una aplicación $f : S_n \rightarrow S_n$ definiendo $f(\sigma)$ como la permutación que se obtiene escribiendo la descomposición de σ en forma canónica, quitando los paréntesis e interpretando el resultado como una permutación escrita en forma de sucesión. Es claro que f es una biyección, que hace corresponder a cada permutación que se descomponga en k ciclos disjuntos otra con k mínimos de izquierda a derecha. \square

Otro tratamiento de este tema puede verse en [26].

Supongamos ahora que se desea hallar el mínimo de un arreglo de números $x[1], x[2], \dots, x[n]$. Para mayor sencillez, supondremos que todos los elementos del arreglo son distintos. El siguiente es un algoritmo que resuelve el problema examinando secuencialmente cada elemento $x[i]$. Al finalizar, la variable m contendrá el valor del menor elemento del arreglo y la variable k su correspondiente índice.

$k \leftarrow 1; m \leftarrow x[1];$

para i desde 2 hasta n haga

si $x[i] < m$ entonces $m \leftarrow x[i]; k \leftarrow i;$

En este algoritmo las dos instrucciones iniciales se ejecutan sólo una vez, y la comparación $a[i] < m$ se realiza $n - 1$ veces. Pero el número de veces que se ejecutan las asignaciones $m \leftarrow x[i]$ y $k \leftarrow i$ depende de cómo estén ordenados los números. Por ejemplo si están ordenados en forma creciente no se ejecutan nunca, mientras que si están ordenados en forma decreciente se ejecutan $n - 1$ veces. En general se ejecutará un número de veces X tal que $0 \leq X \leq n - 1$. Y naturalmente sería interesante saber cuál es el valor esperado de X , y si fuese posible su varianza.

El valor de X es una unidad inferior a la cantidad de mínimos de izquierda a derecha que presente $x[1], x[2], \dots, x[n]$. A los fines de este análisis no tienen importancia los valores reales de los $x[i]$ sino solamente las relaciones de orden entre ellos, así que se puede suponer sin pérdida de generalidad que son una permutación de los números del 1 al n . Entonces el Teorema 5.8.1 nos dice que el número de permutaciones para las cuales $X = k$ es $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right]$. Si suponemos que las $n!$ permutaciones

son equiprobables como datos de entrada, entonces

$$p_k = \text{Prob}(A = k) = \frac{1}{n!} \binom{n}{k+1}.$$

Para obtener el valor esperado y la variancia de X observamos que la función generadora de momentos es

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k x^k = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} x^k = \frac{1}{n!} (x+1)(x+2) \cdots (x+n-1),$$

Entonces

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+n-1}$$

y como $G(1) = 1$, poniendo $x = 1$ resulta

$$\mathbf{E}(X) = G'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n - 1.$$

En virtud de la fórmula asintótica de Euler $H_n = \gamma + \log(n) + o(1)$ vemos que $\mathbf{E}(X) \sim \log n$.

EJERCICIO 5.8.1. Halle la variancia $\text{Var}(X)$.

EJERCICIO 5.8.2. En el algoritmo de ordenación por selección:

para i **desde** 1 **hasta** $n - 1$ **haga**

$m \leftarrow x[i]; k \leftarrow i;$

para j **desde** $i + 1$ **hasta** n **haga**

si $x[j] < m$ **entonces** $m \leftarrow x[j]; k \leftarrow j;$

$x[k] \leftarrow x[i]; x[i] \leftarrow m;$

si el arreglo x contiene una permutación al azar de n números diferentes, ¿cuántas veces se ejecuta, en promedio, la asignación $m \leftarrow x[j]$ de la cuarta línea?

EJERCICIO 5.8.3. ¿Cuántos puntos fijos tiene la función $f : S_n \rightarrow S_n$ definida en el Teorema 5.8.1?

EJERCICIO 5.8.4. Una *involución* es una permutación σ tal que σ^2 es la identidad. Halle la fge de las involuciones y deduzca una expresión para el número de involuciones de los números de 1 a n .

5.9. Desarreglos

Un *desarreglo* es una permutación sin puntos fijos, o lo que es lo mismo una permutación sin ciclos de longitud 1. Más en general, un r -desarreglo es una permutación tal que todos sus ciclos tienen longitud mayor que r . La clase $\mathcal{D}^{(r)}$ de los r -desarreglos se puede especificar como $\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_{>r}(\mathcal{Z}))$, luego su fge es

$$D^{(r)}(z) = \exp\left(\sum_{j>r} \frac{z^j}{j}\right) = \frac{1}{1-z} \exp\left(-\sum_{j=1}^r \frac{z^j}{j}\right).$$

Por ejemplo para $r = 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} D^{(1)}(z) &= \exp\left(-z + \log \frac{1}{1-z}\right) = \frac{e^{-z}}{1-z} \\ &= \left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots\right) (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$D_n^{(1)} = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Esta fórmula se puede obtener de manera más convencional usando el principio de inclusiones y exclusiones (ver [25]).

Los números $D_n^{(1)}$ se conocen por varios nombres: desarreglos, subfactoriales, *derangements*, etc. También hay varias notaciones en uso; G_n , d_n , $!n$ y n_i (Knuth, [15]). Los primeros términos de la sucesión (OEIS A000166) son:

$$1, 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961, \dots$$

Es interesante observar que

$$\frac{n_i}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

se puede interpretar como la probabilidad de obtener un desarreglo cuando se escoge una permutación de n objetos al azar. Esta probabilidad es el desarrollo de e^{-1} truncado, y converge rápidamente a $e^{-1} = 0,36787944\dots$ (ya para $n = 5$ se obtienen 2 cifras decimales exactas, y para $n = 10$ se obtienen 7 cifras decimales exactas). Esto se aprovecha en un conocido problema, que tiene muchas formulaciones equivalentes:

Los asistentes a un teatro dejan sus abrigos en la recepción, pero al salir se los devuelven al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos obtenga su propio abrigo?

La respuesta es muy aproximadamente el 36,8% (que esta probabilidad sea tan alta contraría la intuición de muchos).

EJERCICIO 5.9.1. En una cárcel hay 100 prisioneros condenados a muerte, numerados del 1 al 100, y el carcelero les ofrece una oportunidad de salvación, diciéndoles: «Voy a escribir el número de cada uno de ustedes en una tarjeta, y luego colocaré cada tarjeta en una gaveta diferente de un gabinete con 100 gavetas, también numeradas del 1 al 100. La distribución la haré al azar. Ustedes irán pasando uno por uno a la sala donde se encuentra el gabinete, acompañados solamente por mí. Allí podrán abrir 80 gavetas de su elección, y si en alguna de ellas está la tarjeta con su número, pasarán a otra sala sin comunicación alguna con los que aún no han pasado. Si alguno no encuentra la tarjeta con su número, el proceso finaliza y ninguno de los 100 se salva. Si en cambio todos encuentran su número, todos se salvan. Mañana a las 8 de la mañana comenzará el proceso.» Esa noche uno de los prisioneros razona así: «La probabilidad de que yo encuentre la tarjeta con mi número es $80/100 = 0,8$, que es bastante alta. Pero para salvarnos cada uno de nosotros debe encontrar su tarjeta, y la probabilidad de eso es $0,8^{100}$, que es aproximadamente $2 \cdot 10^{-10}$, ¡una posibilidad en cinco mil millones! No tenemos salvación...» Pero otro prisionero, que era combinatorialista, le responde: «Te equivocas. Se me ocurre una estrategia que nos dará cerca del 78% de probabilidad de salvarnos.» Al día siguiente aplicaron la estrategia y todos se salvaron. ¿Cuál fue la estrategia?

5.10. La paradoja de los cumpleaños

El siguiente es un problema clásico de probabilidades: se tiene una larga fila de personas que van entrando a una oficina una por una. Al entrar, cada persona declara la fecha de su cumpleaños. ¿Cuántas personas deben entrar, en promedio, para que una fecha se repita?

Es claro que la primera repetición podría ocurrir ya con la segunda persona, o demorarse hasta la persona 367. La paradoja de los cumpleaños

es el hecho de que el valor esperado es 24, lo que contraría bastante la intuición.

Supongamos más en general que el año tenga r días y sea X el número de la primera persona que dice una fecha repetida. Entonces $2 \leq X \leq r + 1$. Si hasta la persona n no se ha producido ninguna repetición, entonces la función de $\{1, \dots, n\}$ en $\{1, \dots, r\}$ que asocia a cada persona su cumpleaños es inyectiva. Por lo tanto

$$\mathbf{P}(X > n) = \frac{r^n}{r^n}$$

y

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n \geq 0} n \cdot \mathbf{P}(X = n) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(X > n) = 1 + \sum_{n=1}^r \frac{r^n}{r^n}.$$

El cálculo de la última expresión para $r = 365$ (¡con computadora!) da 24,6.

Otra manera de obtener $\mathbf{E}(X)$ usando funciones generatrices parte de la observación siguiente:

$$\mathbf{P}(X > n) = \frac{r^n}{r^n} = \frac{n!}{r^n} \binom{r}{n} = n! [z^n] \left(1 + \frac{z}{r}\right)^n.$$

Ahora bien, si $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$ es una función entera (holomorfa en todo el plano complejo) con coeficientes no negativos, entonces suponiendo que la serie o la integral converjan se cumple

$$\sum_{n \geq 0} n! f_n = \int_0^\infty e^{-t} f(t) dt$$

(este “truco” se debe a Euler y es consecuencia de que $\int_0^\infty e^{-t} t^n f(t) dt = n!$). Por lo tanto

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^\infty e^{-t} \left(1 + \frac{t}{r}\right)^r dt.$$

A partir de este punto, se pueden aplicar técnicas de análisis asintótico como el método de Laplace para probar que

$$\mathbf{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi r}{2}} + \frac{2}{3} + O(r^{-\frac{1}{2}})$$

(el lector interesado puede consultar los detalles en [18]). Para $r = 365$ los dos primeros términos dan 24,61 con error relativo de $2 \cdot 10^{-4}$.

5.11. El problema del coleccionista de cupones

Este es el problema dual del anterior: ¿Cuántas personas deben entrar, en promedio, para que *todas* las fechas sean declaradas? El nombre se origina en la práctica de coleccionar cupones o figuritas, que se van colocando en un álbum, para ganar los premios que se ofrecen a los que logren tener una colección completa. En este caso, para $r = 365$, el promedio es sorprendentemente alto: 2364.

Si X es el número de la primera persona que completa las r fechas, entonces es claro que $X \geq r$. Además $X \leq n$ si la función de $\{1, \dots, n\}$ en $\{1, \dots, r\}$ que asocia a cada persona su cumpleaños es sobreyectiva. por lo tanto

$$\mathbf{P}(X \leq n) = \frac{r!}{r^n} \left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\} = \frac{n!}{r^n} [z^n] (e^z - 1)^r = n! [z^n] \left(e^{\frac{z}{r}} - 1 \right)^r.$$

Luego las probabilidades complementarias son

$$\mathbf{P}(X > n) = 1 - \mathbf{P}(X \leq n) = n! [z^n] \left(e^z - \left(e^{\frac{z}{r}} - 1 \right)^r \right).$$

Y aplicando el mismo truco de Euler del apartado anterior se tiene

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^\infty \left(1 - \left(1 - e^{-t/r} \right)^r \right) dt.$$

Con el cambio de variable $u = 1 - e^{-t/r}$ resulta

$$\mathbf{E}(X) = r \int_0^1 \frac{1 - v^r}{1 - v} dt = r \int_0^1 (1 + v + v^2 + \dots + v^{r-1}) dt = rH_r.$$

Usando la aproximación de Euler $H_r = \gamma + \log r + \frac{1}{2r} + O(r^{-2})$ se tiene entonces que

$$\mathbf{E}(X) = r\gamma + r \log r + \frac{1}{2} + O(r^{-1}).$$

Para $r = 365$ esta aproximación da 2354,646 con 3 decimales exactos. Lo poco intuitivo de este resultado se debe posiblemente a que el valor esperado no crece linealmente con r , debido al término $r \log r$.

5.12. Árboles etiquetados

En esta sección consideraremos árboles enraizados con vértices etiquetados. Como en el caso no etiquetado, hay dos variedades, según que los subárboles se consideren ordenados o no. Además se pueden restringir los posibles grados salientes, estableciendo que deben pertenecer a un conjunto preestablecido de enteros no negativos J .

5.12.1. Caso ordenado

La clase \mathcal{A} de los árboles etiquetados enraizados ordenados con restricción J se puede definir recursivamente como

$$\mathcal{A} = \mathcal{L} * \mathfrak{S}_J(\mathcal{A}).$$

Luego

$$a(z) = z\phi(a(z)),$$

donde $\phi(z) = \sum_{j \in J} w^j$. Observe que ésta es la misma ecuación recursiva que obtuvimos para árboles no etiquetados (ver pág. 34). Luego $a(z)/n!$ es el número de árboles no etiquetados enraizados ordenados con restricción J y n vértices. Y de manera similar a lo ya hecho, usando inversión de Lagrange se obtiene

$$a_n = n! [z^n] a(z) = (n-1)! u^{n-1} \phi(u)^n.$$

Como $\mathcal{G}_J = \mathcal{L}_\bullet \times \mathfrak{S}_J(\mathcal{G}_J)$, se tiene que $g_J(z) = z\phi(g_J(z))$. De aquí, por la fórmula de inversión de Lagrange (ver Teorema 6.1.1, pág. 83), se obtiene que

$$[z^n] g_J(z)^k = \frac{k}{n} [y^{n-k}] \phi(y)^n.$$

Por ejemplo el número de árboles etiquetados enraizados ordenados generales (o sea con $J = \mathbb{Z}_{\geq 0}$) es

$$n! \cdot \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3).$$

Los primeros términos de esta sucesión son 1, 2, 12, 120, 1680 (OEIS A001813).

5.12.2. Caso no ordenado

La clase \mathcal{T} de los árboles etiquetados enraizados no ordenados se puede definir recursivamente como

$$\mathcal{T} = \mathcal{L} * \mathfrak{P}(\mathcal{T}).$$

Luego

$$t(z) = z \cdot e^{t(z)}.$$

Esta ecuación implícita permite hallar fácilmente (mediante el método de coeficientes indeterminados) los primeros valores de t_n . Así se tiene que

$$t(z) = z + 2\frac{z^2}{2!} + 9\frac{z^3}{3!} + 64\frac{z^4}{4!} + 625\frac{z^5}{5!} + \dots$$

de donde es fácil conjeturar la fórmula general $t_n = n^{n-1}$. Esta conjetura en efecto es cierta, y se puede probar mediante inversión de Lagrange:

$$T_n = n![z^n]T(z) = n! \frac{1}{n} [u^{n-1} (e^u)^n] = n^{n-1}.$$

Este resultado fue obtenido por Arthur Cayley y se conoce como *fórmula de Cayley*. De hecho a los árboles etiquetados enraizados no ordenados se les llama también *árboles de Cayley* y a la función $t(z)$, *función de Cayley*.

Capítulo 6

Combinatoria Analítica

EN este capítulo consideraremos a las funciones generatrices como funciones de \mathbb{C} en \mathbb{C} . Comenzaremos con una breve revisión de algunas nociones básicas del análisis complejo. Para el lector que necesite refrescar sus conocimientos sobre este importante tema existe una abundante bibliografía, de la cual recomendamos [1], [8] y [30].

6.1. Conceptos básicos

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una *región* (es decir un abierto conexo) y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función a valores complejos. Se dice que f es *holomorfa* en Ω si su derivada

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe para todo $z \in \Omega$. Denotaremos con $H(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω .

Si $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ es una serie de potencias centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$ con coeficientes complejos, entonces existe un r , $0 \leq r \leq +\infty$, tal que $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ converge absolutamente para $|z - z_0| < r$ y diverge para $|z - z_0| > r$. Ese r se llama *radio de convergencia* de la serie y cumple que $1/r = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Dentro del círculo de convergencia $|z - z_0| < r$ la función $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ es holomorfa, y además se puede derivar término a término. De aquí se sigue que $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es *analítica* en $z_0 \in \Omega$ si es representable en la forma $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ en algún disco de centro z_0 contenido en Ω . Se dice que f es analítica en Ω si es analítica en cada punto $z_0 \in \Omega$.

Si f es analítica en z_0 entonces también lo es en cualquier punto interior de su círculo de convergencia. Además si f es analítica en Ω entonces también es holomorfa en Ω . Recíprocamente, si f es holomorfa en Ω entonces también es analítica en Ω .

Si $f \in H(\Omega)$ se anula en un conjunto que tenga un punto de acumulación en Ω , entonces f es idénticamente nula. Equivalentemente: si f no es idénticamente nula, entonces sus ceros son puntos aislados. Un corolario de esta propiedad es que si $f, g \in H(\Omega)$ son dos funciones que coinciden en un subconjunto de Ω que tenga un punto de acumulación, entonces coinciden en todo Ω .

Por *curva* entenderemos una función diferenciable a trozos $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, donde $[a, b]$ es un intervalo de los reales. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que la curva es cerrada. La curva es *simple* si no se interseca a sí misma, es decir si es inyectiva (excepto posiblemente por $\gamma(a) = \gamma(b)$). Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma([a, b]) \subset \Omega$, la integral de f a lo largo de γ se define como

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Un resultado fundamental es que si f es holomorfa en Ω y γ es una curva cerrada, entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

La *fórmula integral de Cauchy* afirma que si f es holomorfa en Ω , $z_0 \in \Omega$ y γ es una curva cerrada simple en Ω , orientada positivamente y que deja a z_0 en su interior, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0}.$$

Derivando j veces respecto a z_0 resulta:

$$\frac{1}{j!} f^{(j)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{j+1}}.$$

Ésta es la llamada *fórmula de los coeficientes* de Cauchy.

Inversión de Lagrange

Como ejemplo de la utilidad del análisis complejo en Combinatoria, justificaremos el uso que hemos hecho en varias partes de este libro de la técnica conocida como *inversión de Lagrange*.

Teorema 6.1.1 (Inversión de Lagrange). *Sea $\phi(y) = \sum_{n \geq 0} \phi_n y^n \in \mathbb{C}[[y]]$ con $\phi_0 \neq 0$. Entonces la ecuación $y = z\phi(y)$ tiene solución única $y(z) = \sum_{n \geq 1} y_n z^n$ con coeficientes*

$$y_n = \frac{1}{n} [y^{n-1}] \phi(y)^n \tag{*}$$

(forma de Lagrange). Más en general, si $k \geq 1$ y $y(z)^k = \sum_{n \geq 0} y_n^{(k)} z^n$, entonces

$$y_n^{(k)} = \frac{k}{n} [y^{n-k}] \phi(y)^n \tag{**}$$

(forma de Bürmann).

Demostración. De

$$\sum_{n \geq 0} y_n z^n = z \sum_{k \geq 0} \phi_k \left(\sum_{j \geq 0} y_j z^j \right)^k,$$

se obtienen sucesivamente $y_1 = \phi_0$, $y_2 = \phi_1 y_1 = \phi_0 \phi_1$, $y_3 = \phi_1 y_2 + \phi_2 y_1^2 = \phi_0 \phi_1^2 + \phi_0^2 \phi_2, \dots$

Como y_n depende polinomialmente de los coeficientes de $\phi(y)$ hasta el orden n , a los efectos de probar (*) y (**) podemos suponer que $\phi(y)$ es un polinomio. Entonces $z(y) = y/\phi(y)$ es analítica en 0, y como $(y/\phi(y))'(0) = 1/\phi_0 \neq 0$, tiene localmente una inversa analítica $y = g(z)$, es decir que $g(z)^k = \sum_{n \geq 0} y_n^{(k)} z^n$ tiene radio de convergencia $r > 0$. Ahora como $n y_n^{(k)} = [z^{n-1}] (g(z)^k)'$, tomando una curva cerrada simple γ tal que $|\gamma(t)| < r$, usando la fórmula integral de Cauchy y haciendo el cambio de variable $y = g(z)$ se tiene

$$\begin{aligned} n y_n^{(k)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(g(z)^k)' dz}{z^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{k g(z)^{k-1} g'(z) dz}{z^n} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{g \circ \gamma} \frac{y^{k-1} dy}{(y/\phi(y))^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{g \circ \gamma} \frac{\phi(y)^n dy}{y^{n-k+1}} \\ &= [y^{n-k}] \phi(y)^n. \end{aligned}$$

□

Continuación analítica

Sea $f \in H(\Omega)$. Un punto z_0 en la frontera de Ω se dice que es *regular* si existen $r > 0$ y $g \in H(D(z_0; r))$ tales que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega \cap D(z_0; r)$. Si z_0 no es *regular* entonces se dice que es *singular*, o que f tiene una *singularidad* en z_0 . Por ejemplo la serie $\sum_{n \geq 0} z^n$ tiene radio de convergencia 1, y define una función $f \in H(D(0; 1))$. Cualquier $z_0 \neq 1$ de la frontera del círculo de convergencia es regular, pues $g(z) = \frac{1}{1-z}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ y $g(z) = f(z)$ en $D(0; 1) \cap (\mathbb{C} \setminus \{1\}) = D(0; 1)$. Pero $z_0 = 1$ es singular, puesto que el límite de $f(z)$ cuando z tiende a 1 por la izquierda tomando valores reales es $+\infty$.

Si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ tiene radio de convergencia $r < +\infty$, entonces algún punto del borde $|z - z_0| = r$ es singular (de lo contrario, por un argumento de compacidad f se podría extender como función holomorfa a una región que contuviese al disco cerrado $|z - z_0| \leq r$, y el radio de convergencia de la serie de potencias sería mayor que r , absurdo).

El resultado siguiente es un refinamiento de lo anterior para el caso de series de potencias alrededor del origen con coeficientes no negativos:

Teorema 6.1.2 (Teorema de Pringsheim). *Si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ tiene radio de convergencia r , y $a_n \geq 0$ para $n \geq 0$, entonces el punto $z = r$ es singular.*

Una demostración se puede ver en [11] pág. 240–242.

Las singularidades de una función analítica en 0 que se hallan en el borde del círculo de convergencia se conocen como *singularidades dominantes*. El teorema de Pringsheim facilita la búsqueda de este tipo de singularidades para las funciones generatrices combinatorias, las cuales tienen coeficientes no negativos. Basta hallar el primer punto del eje real positivo en el cual la función no sea analítica.

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva. Si existen reales $t_0 = a < t_1 < \dots < t_k = b$, discos $D_i = D(\gamma(t_i); r_i)$ con $r_i > 0$ y funciones $g_i \in H(D_i)$ para $i = 0, 1, 2, \dots, k$ tales que $D_i \cap D_{i+1} \neq \emptyset$ y $g_i(z) = g_{i+1}(z)$ para todo $z \in D_i \cap D_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, k - 1$), entonces se dice que g_k es una *continuación* (o *prolongación*) *analítica* de g_0 a lo largo de γ .

Puede probarse que g_k es esencialmente única, en el sentido de que si $h \in H(D(\gamma(b); s))$ es otra continuación analítica de g_0 a lo largo de γ , entonces $h(z) = g_k(z)$ en $D_k \cap D(\gamma(b); s)$. Esta situación es totalmente diferente de lo que ocurre con las funciones en el campo real.

Funciones meromorfas

Una función f es *meromorfa* en $z_0 \in \Omega$ si en un disco $0 < |z - z_0| < r$ es representable como $g(z)/h(z)$, donde g y h son analíticas en z_0 . En este caso f se puede representar en *serie de Laurent* como

$$f(z) = \sum_{n \geq -k} a_n (z - z_0)^n,$$

donde k es entero y la serie converge para $0 < |z - z_0| < r$.

Si $a_{-k} \neq 0$ y $k \geq 1$, se dice que f tiene un *polo* de orden k en z_0 .

Observe que $s(z) = \sum_{-k \leq n \leq 1} a_n (z - z_0)^n$ es una función racional (la *parte singular* de f) y que $f(z) - s(z)$ es analítica en z_0 .

Se dice que f es meromorfa en Ω si es meromorfa en cada punto $z_0 \in \Omega$.

Si f es meromorfa en Ω y tiene un número finito de polos, entonces se puede representar como la suma de una función racional y una función holomorfa en Ω . En efecto, si $R(z)$ es la suma de las partes singulares de f en cada uno de sus polos, entonces $h(z) = f(z) - R(z)$ es holomorfa en Ω , luego $f(z) = h(z) + R(z)$.

Al coeficiente a_{-1} se le llama *residuo* de f en z_0 , y se denota $\text{Res}(f, z_0)$.

El *Teorema de los residuos* afirma que si f es meromorfa en Ω , γ es una curva cerrada simple orientada positivamente en Ω , que no pasa por ningún polo de f (es decir que f es analítica en todos los puntos de la curva), y si z_1, z_2, \dots, z_p son todos los polos de f encerrados por γ , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^p \text{Res}(f, z_i).$$

(si γ no es simple entonces cada residuo debe multiplicarse por el número de vueltas que da la curva alrededor del polo correspondiente). Puede verse la demostración en [1].

6.2. Asintótica de coeficientes

Se dice que una sucesión a_n es de orden exponencial K^n , y se escribe $a_n \asymp K^n$, si

$$\limsup |a_n|^{1/n} = K.$$

Observemos que si $a_n \asymp K^n$ entonces para cualquier $\epsilon > 0$ se tiene:

- (1) $|a_n| > (K - \epsilon)^n$ para infinitos valores de n ;
- (2) $|a_n| < (K + \epsilon)^n$ de un n_0 en adelante.

Se dice que b_n es *subexponencial* si es de orden exponencial 1, es decir si $\limsup |b_n|^{1/n} = 1$. Es claro que a_n es de orden exponencial K^n si y sólo si $a_n = b_n K^n$, donde b_n es subexponencial.

Algunos factores subexponenciales típicos son $(\log n)^c$ y n^c (para cualquier real $c \geq 0$) y e^{n^c} para $0 \leq c < 1$.

6.2.1. Primer Principio

El *Primer Principio* de la asintótica de coeficientes afirma que la *ubicación* de las singularidades de una función determina el crecimiento exponencial (la parte A^n) de sus coeficientes.

En efecto, si f es analítica en 0 y R es el radio de convergencia de su representación en serie de potencias $\sum_{n \geq 0} f_n z^n$ en un entorno de 0, entonces $\limsup |f_n|^{1/n} = 1/R$ y por lo tanto $f_n \asymp (1/R)^n$. Combinando esto con el teorema de Pringsheim se tiene:

Teorema 6.2.1 (Fórmula del crecimiento exponencial). *Si f es analítica en 0, $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$ en un entorno de 0 y*

$$R = \sup\{r \geq 0 : f \text{ es analítica en } |z| < r\}$$

(o sea que R es el valor absoluto de la singularidad más cercana al origen) entonces

$$f_n \asymp (1/R)^n.$$

Si los f_n son todos no negativos, se puede tomar

$$R = \sup\{r \geq 0 : f \text{ es analítica en el segmento } 0 \leq z < r\}.$$

Ejemplo 6.2.1. Recordemos que la fge de las funciones sobreyectivas es $R(z) = (2 - e^z)^{-1}$. Sus singularidades están en los ceros de $2 - e^z$, que son $z_k = \log 2 + 2k\pi i$. La singularidad dominante es $z_0 = \log 2$, por lo tanto si $r_n = [z^n]R(z)$ entonces

$$r_n \asymp \left(\frac{1}{\log 2} \right)^n.$$

Ejemplo 6.2.2. La fge de los desarreglos es $D(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$, que sólo tiene un polo en 1. luego $\frac{n!}{n!} \asymp 1^n$. En este caso ya conocemos un resultado más preciso, a saber que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n!} = \frac{1}{e}$, que por supuesto es compatible con $\frac{n!}{n!} \asymp 1$.

La fórmula del crecimiento exponencial se puede suplementar con cotas superiores conocidas como *cotas de punto de silla*.

Teorema 6.2.2. Sea f analítica en el disco $|z| < R$ con $0 < R \leq \infty$. Si $0 < r < R$ sea $M(f; r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Entonces

$$[z^n]f(z) \leq \frac{M(f; r)}{r^n}.$$

Si además $f(z)$ tiene coeficientes no negativos en 0, entonces

$$[z^n]f(z) \leq \frac{f(r)}{r^n}.$$

Demostración. La primera desigualdad se obtiene acotando a partir de la fórmula de los coeficientes de Cauchy

$$[z^n]f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z) dz}{z^{n+1}}.$$

La segunda desigualdad es consecuencia de que si los coeficientes son no negativos en 0 entonces el mayor valor posible de $|f(re^{it})|$ es $f(r)$. \square

En el caso de coeficientes no negativos, si hay un r que proporcione la mejor cota (es decir la mínima), éste puede ser hallado derivando $f(r)/r^n$, lo que nos conduce a la ecuación

$$r \frac{f'(r)}{f(r)} = n.$$

Ejemplo 6.2.3. Como un ejemplo sencillo tomemos $f(z) = e^z$. La ecuación $r f'(r)/f(r) = n$ nos queda $r = n$, por lo tanto

$$\frac{1}{n!} = [z^n] e^z \leq \frac{e^n}{n^n},$$

o bien $n! \geq n^n e^{-n}$, lo que se puede considerar como una forma débil de la fórmula asintótica de Stirling $n! \asymp \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$.

El teorema 6.2.2 es el punto inicial de un método de análisis asintótico conocido como *método del punto de silla*. Los puntos de silla a que se refiere el método son los de la gráfica de $|f(z)|$, que se producen en los puntos donde $f'(z) = 0$ pero $f(z) \neq 0$. El método se basa en estimar integrales de funciones analíticas utilizando contornos que pasen por un punto de silla. Una descripción completa de este método puede verse en el capítulo VIII de [11].

La ubicación de las singularidades de una función es entonces fundamental para el análisis asintótico. Afortunadamente el análisis complejo cuenta con poderosas herramientas que ayudan a ubicar los ceros de una función analítica, y por lo tanto los polos de una función meromorfa. Por ejemplo si f es holomorfa en Ω y γ es una curva cerrada simple contenida en Ω , la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z)}$$

cuenta el número de ceros de f encerrados por γ , con su multiplicidad (esto se deduce del teorema de los residuos).

Otro resultado importante es el Teorema de Rouché, que afirma que si dos funciones f y g son holomorfas en Ω , γ es una curva cerrada simple contenida en Ω y $|g(z)| < |f(z)|$ en los puntos de γ , entonces f y $f + g$ tienen el mismo número de ceros encerrados por γ .

6.2.2. Segundo Principio

El *Segundo Principio* de la asintótica de coeficientes afirma que la *naturalidad* de las singularidades de una función determina el factor subexponencial de sus coeficientes.

El caso más sencillo se presenta con las funciones racionales $f(z) = N(z)/D(z)$ (sonde N y $D \neq 0$ son polinomios). Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ son

las raíces de D y si m_i es la multiplicidad de α_i , el conocido teorema de descomposición en fracciones parciales nos dice que existe un polinomio $Q(z)$ (el cociente de la división de N entre D) y constantes c_{ij} tales que

$$\frac{N(z)}{D(z)} = Q(z) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{(z - \alpha_i)^j}.$$

Como

$$[z^n] \frac{1}{(z - \alpha)^j} = \frac{(-1)^j}{\alpha^j} [z^n] \frac{1}{(1 - \frac{z}{\alpha})^j} = \frac{(-1)^j}{\alpha^j} \binom{n + j - 1}{j - 1} \alpha^{-n}$$

y el coeficiente binomial $\binom{n+j-1}{j-1}$ es un polinomio en n de grado $j - 1$, agrupando términos resulta que

$$\frac{N(z)}{D(z)} = Q(z) + \sum_{n \geq 0} \sum_{i=1}^k p_i(n) \alpha_i^{-n},$$

donde cada p_i es un polinomio de grado a lo sumo $m_i - 1$.

Si los α_i se ordenan en orden creciente de módulos, y si α_1 es dominante en el sentido de que $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k$, entonces

$$f_n \sim p_1(n) \alpha_1^{-n}$$

con error exponencialmente pequeño ya que es $O(n^r \alpha_2^{-n})$ para cierto r .

Un ejemplo clásico es la fgo de los números de Fibonacci

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

que tiene polos $\alpha_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $\alpha_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Si $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es la razón áurea, entonces $\alpha_1^{-1} = \varphi$ y $\alpha_2^{-1} = \bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \bar{\varphi}^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n + O\left(\frac{1}{\varphi^n}\right).$$

Lo que acabamos de ver para funciones racionales se generaliza a funciones meromorfas.

Teorema 6.2.3. *Sea f meromorfa en el disco cerrado $|z| \leq R$, con polos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Supongamos que f es analítica en 0 y en todos los puntos de la circunferencia $|z| = R$. Entonces existen polinomios p_1, p_2, \dots, p_k tales que*

$$f_n = [z^n]f(z) = \sum_{i=1}^k p_i(n)\alpha_i^{-n} + O(R^{-n}).$$

Además el grado de cada p_i es estrictamente menor que el orden del polo α_i .

Demostración. Como se vió más arriba hay una función racional $r(z)$ con polos α_i y una función $h(z)$ holomorfa en $|z| \leq R$ tales que $f(z) = r(z) + h(z)$. Para $r(z)$ como vimos más arriba se tiene

$$r_n = [z^n]r(z) = \sum_{i=1}^k p_i(n)\alpha_i^{-n} + O(R^{-n}).$$

Para $h(z)$, por la fórmula de los coeficientes de Cauchy

$$h_n = [z^n]h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{h(z) dz}{z^{n+1}},$$

de donde, si $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$,

$$|h_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M \cdot 2\pi R}{R^{n+1}} = O(R^{-n}).$$

□

Ejemplo 6.2.4. Recordemos que la fge de las funciones sobreyectivas es $R(z) = (2 - e^z)^{-1}$. Como vimos en el Ejemplo 6.2.1 su polo dominante es $z_0 = \log 2$. Como

$$e^z - 2 = 2(e^{z-\log 2} - 1) = 2 \left((z - \log 2) + \frac{1}{2!}(z - \log 2)^2 + \dots \right)$$

vemos que la parte singular de $(2 - e^z)^{-1}$ en $z_0 = \log 2$ es $-\frac{1}{2}(z - \log 2)^{-1}$ y por lo tanto

$$R_n = n![z^n]R(z) \sim \frac{n!}{2} \left(\frac{1}{\log 2} \right)^{n+1}.$$

Los polos siguientes en módulo son $\log 2 \pm 2\pi i$, con módulo aproximadamente de 6,32. Así, se tiene

$$\frac{R_n}{n!} = [z^n]R(z) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\log 2} \right)^{n+1} + O(6^{-n}).$$

Cuando hay más de una singularidad dominante y se presentan dos o más términos α_i^n con el mismo módulo, cada uno con su propio factor subexponencial, pueden presentarse varias situaciones. La más sencilla es un comportamiento periódico de los coeficientes, como en $f(z) = 2/(1 - 4z^2)$, donde $[z^n]f(z) = 2^n + (-2)^n$, que es 2^{n+1} si n es par y 0 si n es impar. Pero también pueden presentarse fluctuaciones irregulares más complicadas. Analice por ejemplo $g(z) = 1/(1 - \frac{6}{5}z + z^2)$.

6.3. Ecuaciones funcionales y singularidades

En las secciones precedentes se vieron ejemplos en los cuales se conocía una expresión explícita para la función generatriz. Sin embargo los métodos simbólicos muchas veces conducen a ecuaciones funcionales y no a expresiones explícitas (esto ocurre por ejemplo en los problemas de enumeración de árboles).

Una situación típica se presenta cuando sabemos que $f(a(z)) = g(z)$ y queremos determinar $a(z)$. Si f es invertible entonces naturalmente $a(z) = f^{-1}(g(z))$, pero es posible que f^{-1} no sea fácil de obtener explícitamente. Es un resultado bien conocido que una función f analítica en un punto z_0 es localmente invertible si $f'(z_0) \neq 0$. Sin embargo si $f'(z_0) = 0$ la función puede no ser invertible. Un ejemplo sencillo es $f(z) = z^2$, que no tiene inversa en 0 a menos que se restrinja el dominio quitando una semirecta con extremo en el origen. En ese dominio fisurado de pueden definir dos inversas \sqrt{z} y $-\sqrt{z}$, que tienen una singularidad en 0. La misma situación se presenta para cualquier función f analítica en un punto z_0 y tal que $f'(z_0) = 0$ pero $f''(z_0) \neq 0$: si $y_0 = f(z_0)$, entonces existe un entorno fisurado U de y_0 (es decir un entorno $|y - y_0| < r$ menos un radio que parte de y_0) en el cual se pueden definir dos funciones g_1 y g_2 , singulares en y_0 , tales que $f(g_i(z)) = z$ en U y $\lim_{y \rightarrow y_0} g_i(y) = z_0$. Más en general, si $f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(r-1)}(z_0) = 0$ pero $f^{(r)}(z_0) \neq 0$, entonces en un entorno fisurado U de y_0 pueden definirse r ramas de la inversa g_1, \dots, g_r , singulares en y_0 , tales que $f(g_i(z)) = z$ en U y $\lim_{y \rightarrow y_0} g_i(y) = z_0$.

Otra situación típica es la ecuación funcional

$$y(z) = z\phi(y(z)),$$

donde ϕ es analítica en 0, que se presenta en varios casos de enumeración de árboles. Supongamos que $y(z) = 0$ y $\phi(0) \neq 0$ (de lo contrario, el problema no tiene solución ni siquiera desde el punto de vista de las series formales). Entonces poniendo $\psi(z) = z/\phi(z)$ el problema nos queda

$$\psi(y(z)) = z,$$

es decir que se reduce al problema de invertir ψ . El crecimiento exponencial puede determinarse mediante el siguiente teorema:

Teorema 6.3.1. *Sea ϕ analítica en 0, con $\phi(0) \neq 0$, coeficientes no negativos y radio de convergencia $R \leq \infty$. Supongamos que se cumple la condición*

$$\lim_{x \rightarrow R^-} \frac{x\phi'(x)}{\phi(x)} > 1.$$

Entonces existe un único $\tau \in (0, R)$ tal que $\tau\phi'(\tau) = \phi(\tau)$, la solución formal de $y(z) = z\phi(y(z))$ es analítica en 0 y sus coeficientes satisfacen

$$[z^n]y(z) \asymp \left(\frac{1}{\rho}\right)^n,$$

para $\rho = \tau/\phi(\tau) = 1/\phi'(\tau)$.

La demostración puede verse en [11], páginas 278–279.

Con esto damos por terminada esta breve introducción a la combinatoria analítica. Para tener una visión más completa, el lector interesado puede proseguir su estudio con el método de análisis de singularidades de funciones generatrices desarrollado por Flajolet y Odlyzko (ver [12] y [11] caps. VI y VII), y luego con el método de los puntos de silla ([11] cap. VIII).

Capítulo 7

Respuestas a los ejercicios

2.1.1. $(1 + z + z^2 + z^3 + \dots)^2 = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$.

2.1.2. $(1 + z + z^2 + z^3 + \dots)^k = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k-1}{k-1} z^n$. Por inducción, vale para $k = 1$ y si vale para k entonces $(1 + z + z^2 + \dots)^{k+1} = \sum_{i \geq 0} \binom{i+k-1}{k-1} z^i \sum_{j \geq 0} z^j = \sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^n \binom{i+k-1}{k-1} z^n = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{k} z^n$.

2.1.3. $\cos(z)^2 = (\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k})^2 = \sum_{n \geq 0} \sum_{j+k=n} \frac{(-1)^{j+k}}{(2j)!(2k)!} z^{2j+2k} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (\sum_{j=0}^n \binom{2n}{2j}) z^{2n}$, y análogamente

$\text{sen}(z)^2 = (\sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} z^{2j+1})^2 = \sum_{n \geq 0} (\sum_{j+k=n} \frac{(-1)^{j+k}}{(2j+1)!(2k+1)!}) z^{2j+2k+2} = \sum_{n \geq 0} (\sum_{j=0}^n (-1)^n \binom{2n+2}{2j+1}) z^{2n+2} = \sum_{n \geq 1} (\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-1} \binom{2n}{2j+1}) z^{2n}$, de donde $(\cos(z))^2 + (\text{sen}(z))^2 = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n (\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}) z^{2n} = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n (1-1)^{2n} z^{2n} = 1$.

2.2.1. $1 + z$.

2.2.2. $\sum_{n \geq 0} (n+1)z^n$.

2.2.3. De $(1 - z - z^2)(a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots)$ se obtiene $a_0 = a_1 = 1$ y, para $n \geq 2$, $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$. Es decir que los a_n satisfacen la misma recurrencia que los números de Fibonacci, definidos por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 2$. Como $a_0 = F_1$ y $a_1 = F_2$ resulta que $a_n = F_{n+1}$ y la inversa multiplicativa de $1 - z - z^2$ es $\sum_{n \geq 0} F_{n+1} z^n$.

2.2.4. $\sum_{n,k \geq 0} \binom{n}{k} u^n v^k = \sum_{n \geq 0} (\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} v^k) u^n = \sum_{n \geq 0} (1+v)^n u^n = \frac{1}{1-(1+v)u}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{2.4.1.} \quad \exp(a(z)) \exp(b(z)) &= \sum_{k \geq 0} \frac{a(z)^k}{k!} \sum_{j \geq 0} \frac{b(z)^j}{j!} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{j+k=n} \binom{n}{k} a(z)^k b(z)^j = \sum_{n \geq 0} \frac{(a(z)+b(z))^n}{n!} = \exp(a(z)+b(z)).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{2.4.2.} \quad 2 \operatorname{sen}(z) \cos(z) &= 2 \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} z^{2j+1} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \\
 &= 2 \sum_{n \geq 0} \sum_{j+k=n} \frac{(-1)^{j+k}}{(2j+1)!(2k)!} z^{2j+2k+1} \\
 &= 2 \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\sum_{j=0}^n \binom{2n+1}{2j+1} \right) \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= 2 \sum_{n \geq 0} (-1)^n 2^{2n} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen}(2z).
 \end{aligned}$$

2.5.1. Como $\log\left(\frac{1}{1-z}\right) + \log(1-z) = \log\left(\frac{1}{1-z}(1-z)\right) = \log(1) = 0$, entonces

$$\log\left(\frac{1}{1-z}\right) = -\log(1-z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}.$$

2.6.1. Sean $a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ y $b(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$. Entonces

$$\begin{aligned}
 1. \quad D(\lambda a(z) + \mu b(z)) &= D\left(\sum_{n \geq 0} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n\right) = \sum_{n \geq 1} (\lambda a_n + \mu b_n) n z^{n-1} \\
 &= \lambda \sum_{n \geq 1} a_n n z^{n-1} + \mu \sum_{n \geq 1} b_n n z^{n-1} = \lambda D a(z) + \mu D b(z).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad D(a(z)b(z)) &= D\left(\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right) z^n\right) \\
 &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right) n z^{n-1}, \quad (D a(z))b(z) + a(z)(D b(z)) \\
 &= \sum_{k \geq 1} k a_k z^{k-1} \sum_{j \geq 0} b_j z^j + \sum_{j \geq 0} a_j z^j \sum_{k \geq 1} k b_k z^{k-1} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n k a_k b_{n-k} z^{n-1} + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n k a_{n-k} b_k z^{n-1}
 \end{aligned}$$

3: Por el punto anterior $D(b(z)^2) = 2b(z)D(b(z))$, y por inducción resulta que $D(b(z)^k) = k b(z)^{k-1} D b(z)$. Como el coeficiente de z^n en $D a(b(z))$ sólo depende de los coeficientes de grado $\leq n+1$ en $a(z)$ y $b(z)$, para calcularlo podemos suponer que $a(z)$ es un polinomio de grado $n+1$. Entonces por la linealidad

$$D\left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k b(z)^k\right) = \sum_{k=0}^{n+1} k a_k b(z)^{k-1} D(b(z)) = D(a(b(z))) D(b(z)).$$

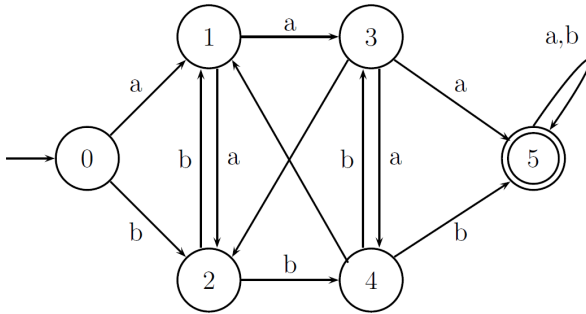
$$4. \quad D^k a(z) = \sum_{n \geq k} n^k a_n z^{n-k}, \text{ luego } (D^k a)_0 = k! a_k.$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{2.6.2.} \quad D^{k-1} \frac{1}{1-z} &= \frac{(k-1)!}{(1-z)^k}, \quad D^{k-1} \sum_{n \geq 0} z^n = \sum_{n \geq k} n^{\overline{k-1}} z^{n-k+1} \\
 &= \sum_{n \geq k} (k-1)! \binom{n}{k-1} z^{n-k+1} = (k-1)! \sum_{m \geq 1} (k-)! \binom{n+k-1}{n} z^n.
 \end{aligned}$$

3.4.1. Las composiciones de n en k partes pueden obtenerse escribiendo n unos e insertando $k-1$ *separadores*, cada uno de ellos entre dos unos

contiguos. Por ejemplo $11 = 5 + 2 + 4$ se puede obtener como 11111-11-1111. Luego hay tantas composiciones como maneras de elegir $k - 1$ posiciones de entre $n - 1$, es decir $\binom{n-1}{k-1}$.

3.4.2. a)



Por simetría es claro que $L_1 = L_2$ y $L_3 = L_4$. Entonces $L_5(z) = zL_5(z) + zL_5(z) + 1 = 2zL_5(z) + 1$, de donde $L_5(z) = \frac{1}{1-2z}$. $L_1(z) = zL_2(z) + zL_3(z) = zL_1(z) + zL_3(z)$, de donde $L_1(z) = \frac{z}{1-z}L_3(z)$. $L_3(z) = zL_2(z) + zL_5(z) = \frac{z^2}{1-z}L_3(z) + \frac{1}{1-2z}$, de donde se despeja $L_3(z) = \frac{z(1-z)}{(1-2z)(1-z-z^2)}$ y finalmente

$$L_0(z) = 2zL_1(z) = \frac{2z^2}{1-z}L_3(z) = \frac{2z^3}{(1-2z)(1-z-z^2)}.$$

Descomponiendo en fracciones parciales se tiene

$$L_0(z) = 1 + \frac{1}{1-2z} - \frac{2}{1-z-z^2}.$$

Como $\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n \geq 0} F_{n+1}z^n$ (donde F_n son los números de Fibonacci) resulta también que

$$L_0(z) = \sum_{n \geq 3} (2^n - 2F_{n+1})z^n.$$

(b) El autómata es el mismo de la parte (a) excepto que los estados 0, 1, 2, 3 y 4 ahora son de aceptación, y el 5 no lo es. La fgo es la diferencia entre la fgo del lenguaje $\{a, b\}^*$, que es $1/(1 - 2z)$, y la hallada, es decir que es

$$-1 + \frac{2}{1-z-z^2} = 1 + \sum_{n \geq 1} 2F_{n+1}z^n.$$

3.4.3. El vector de autocorrelación de abb es $(1, 0, 0)$ y $c(z) = 1$, luego

$$S(z) = \frac{1}{1 - 2z + z^3} = -\frac{1}{1 - z} + \frac{z + 2}{1 - z - z^2} = \sum_{n \geq 0} (-1 + F_n + 2F_{n+1})z^n,$$

y como $F_n + 2F_{n+1} = (F_n + F_{n+1}) + F_{n+1} = F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$, el coeficiente de z^n es $F_{n+3} - 1$.

3.6.1. Como $(1 + z^n)/(1 - z^{2n}) = 1/(1 - z^n)$, $p(z)m(z^2) = \prod_{n \geq 0} (1 + z^n)^{b_n} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^{2n})^{-b_n} = \prod_{n \geq 0} (1 - z^n)^{-b_n} = m(z)$.

5.1.1. (a) $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = e^z$; (b) $1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \cosh z$; (c) $z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sinh z$.

5.4.1.

$(1, 3, 2) \star (2, 1) = \{(1, 3, 2), (5, 4), ((1, 4, 2), (5, 3)), ((1, 5, 2), (4, 3)), ((1, 4, 3), (5, 2)), ((1, 5, 3), (4, 2)), ((1, 5, 4), (3, 2)), ((2, 4, 3), (5, 1)), ((2, 5, 3), (4, 1)), ((2, 5, 4), (3, 1)), ((3, 4, 5), (2, 1))\}$.

5.6.1. La clase \mathcal{A} de los pares (desordenados) de ciclos es $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{C}(\mathbb{Z}))$, y en consecuencia su fge es

$$a(z) = \frac{n!}{2!} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{k \geq 1} \frac{z^k}{k} \right)^2,$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} &= n! [z^n] a(z) = \frac{n!}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} \\ &= \frac{n!}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) = (n-1)! H_{n-1}. \end{aligned}$$

5.7.1. (a) La clase es $\mathfrak{P}_{\text{par}}(\mathfrak{P}_{\geq 1})$ y la fge es $\cosh(e^z - 1)$. Análogamente (b) $\sinh(e^z - 1)$; (c) $e^{\cosh z - 1}$; (d) $e^{\sinh z}$.

5.7.2. $\{k_{-1}^{n-1}\}$. En [22] hay 3 pruebas diferentes.

5.8.1. Derivando $G'(x)/G(x)$ resulta

$$\frac{G''(x)G(x) - (G'(x))^2}{G^2(x)} = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \dots - \frac{1}{(x+n-1)^2}$$

y calculando en $x = 1$ tenemos

$$G''(1) - (G'(1))^2 = -\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \dots - \frac{1}{n^2} = 1 - H_n^{(2)},$$

siendo $H_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n (1/k^2)$. Por lo tanto

$$\text{Var}(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 = H_n - H_n^{(2)}.$$

5.8.2. Usando el resultado del algoritmo del mínimo se tiene

$$\begin{aligned} (H_n - 1) + (H_{n-1} - 1) + \dots + (H_2 - 1) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{1}{j} - n \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n \frac{1}{j} - n = \sum_{j=1}^n \frac{n-j+1}{j} - n = (n+1)H_n - 2n, \end{aligned}$$

que asintóticamente es $n \log n$. Para más detalles sobre éste y otros algoritmos de ordenación vea [18].

5.8.3. Los puntos fijos de f son las permutaciones cuyos ciclos están formados por enteros consecutivos, y su número es 2^{n-1} (ver [24]).

5.8.4. Una involución sólo puede tener ciclos de longitud 1 o 2, luego la clase \mathcal{I} de las involuciones se puede especificar como $\mathfrak{B}(\mathcal{C}_{1,2}(\mathcal{Z}))$ y en consecuencia

$$I(z) = \exp\left(z + \frac{z^2}{2}\right) = 1 + z\left(1 + \frac{z}{2}\right) + \frac{1}{2!}z^2\left(1 + \frac{z}{2}\right)^2 + \dots$$

de donde

$$I_n = n! \sum_{j=\lceil n/2 \rceil}^n \frac{1}{j!} \binom{j}{n-j} 2^{-(n-j)} = n! \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{k!(n-2k)!} 2^{-k}.$$

5.9.1. La disposición de las tarjetas en el gabinete es una permutación al azar σ de los números del 1 al 100. La estrategia es la siguiente: el prisionero i , en su turno, comienza por abrir la gaveta i , donde encontrará la tarjeta $\sigma(i)$. Si $\sigma(i) \neq i$, abre a continuación la gaveta $\sigma(i)$, donde encontrará la tarjeta $\sigma^2(i)$. Si $\sigma^2(i) \neq i$, abre a continuación la gaveta

$\sigma^2(i)$ y así sucesivamente. Si el ciclo al que pertenece i tiene longitud a lo sumo 80, el prisionero encontrará seguramente su tarjeta en las 80 oportunidades que tiene. Por lo tanto si la descomposición en ciclos disjuntos de σ no contiene ningún ciclo de longitud mayor que 80, siguiendo esta estrategia todos se salvan. La probabilidad de que la estrategia funcione es

$$\begin{aligned} p &= [z^{100}] \exp\left(\sum_{k=1}^{80} \frac{z^k}{k}\right) = [z^{100}] \frac{1}{1-z} \exp\left(-\sum_{k \geq 81} \frac{z^k}{k}\right) \\ &= [z^{100}] (1+z+z^2+\dots+z^{100}) \left(1 - \sum_{k \geq 81} \frac{z^k}{k}\right) = 1 - \sum_{k=81}^{100} \frac{1}{k} \\ &= 1 - H_{100} + H_{80} \approx 1 + \log 0,8 \approx 0,78. \end{aligned}$$

Este interesante problema tiene su origen en [13]. Vea también [33].

Bibliografía

- [1] Ahlfors, L., *Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1979.
- [2] Apostol, T. M., *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.
- [3] Bergeron, F., Labelle, G., Leroux, P., *Combinatorial species and tree-like structures*, Cambridge University Press, 1998.
- [4] Bender, E. A., Goldman, J. R., *Enumerative uses of generating functions*, Indiana Univ. Math. J. (1971), 753–765.
- [5] Brookshear, J. Glenn, *Theory of Computation: Formal Languages, Automata, and Complexity*, Benjamin/Cummings, 1989. Hay traducción: *Teoría de la computación: Lenguajes Formales, Autómatas y Complejidad*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1993.
- [6] Bruijn, N. G. de, *Generalization of Polya's fundamental theorem in enumeration combinatorial analysis*, Indag. Math. **21**(1959) 59–69.
- [7] Cameron, P. J., *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, 1994.
- [8] Cartan, H., *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris, 1961.
- [9] Chomsky, N., Schützenberger, M. P. *The algebraic theory of context-free languages*, en *Computer Programming and Formal Languages*, P. Braffort and D. Hirschberg (Eds.), North Holland (1963) 118–161.
- [10] Dobiński, G., *Summirung der Reihe $\sum \frac{n^m}{n!}$ für $m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$* , Grunert's Archiv **61**(1877) 333–336.

- [11] Flajolet, P., Sedgewick, R., *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2009. Este libro se puede descargar gratuita (y legalmente) del sitio web del INRIA: <http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/AnaCombi/anacombi.html>
- [12] Flajolet, P., Odlyzko, A. M., *Singularity analysis of generating functions*, SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods, **3** (2), (1990), 216–240.
- [13] Gál, A., Miltersen, P. B., *The cell probe complexity of succinct data structures*, en *Automata, Languages and Programming*, Lecture Notes in Computer Science vol. 2719, Springer Verlag, 2003, 332–344.
- [14] Guibas, L. J., Odlyzko, A. M., *String overlaps, pattern matching, and nontransitive games*, J. Combin. Theory Ser. A **30**(2), 1981, 183–208.
- [15] Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnick, O., *Concrete Mathematics*, 2nd ed., Addison Wesley, 1995.
- [16] Harary, F., Palmer, E. M., *Graphical Enumeration*, Academic Press, 1973.
- [17] Joyal, A., *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. Math. **42**, **1**(1981), 1–82.
- [18] Knuth, D. E. *The Art of Computer Programming, vol. I: Fundamental Algorithms*, 3rd ed., Addison Wesley, 1997.
- [19] Méndez, M., *Teoría de especies combinatorias*, Octava Escuela Venezolana de Matemáticas, Mérida, 1995.
- [20] Nieto, J. H., Cáceres, L., Sánchez, R. *Combinatorial Problems in the Mathematical Olympiad of Central America and the Caribbean*, cap. 5 de A. Soifer (Ed.) *Competitions for Young Mathematicians*, Springer, 2017.
- [21] Nieto, J. H., *Combinatoria para Olimpiadas matemáticas*, Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, Caracas, 2014. Descargable de <http://www.acm.ciens.ucv.ve/main/Combinatoria-JHNieto.pdf>

- [22] Nieto, J. H., Scheinerman, E. R., Chapman, R., *Plucking Stirling Numbers from Trees (solution to Problem 10976 proposed by V. Voloshin)*, Am. Math. Monthly, **111**(5), (2004), 444–445.
- [23] Nieto, J. H. *Números de Stirling y Acción de Grupos*, Ciencia **8**(2) (2000), 188–190.
- [24] Nieto, J. H., *Fixed points of a Bijection of the Symmetric Group (solution to Problem 1525 proposed by E. Deutsch)*, Math. Mag. **71**(3), (1998), 227–228.
- [25] Nieto, J. H. *Teoría Combinatoria*, EDILUZ, Maracaibo, 1996.
- [26] Nieto, J. H. *Extremos en sucesiones*, Divulg. Mat. **2**(1) (1994), 5–9.
- [27] Polya, G., *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen, und chemische Verbindungen*, Acta Mathematica **68** (1937) 145–254.
- [28] Redfield, J. H., *The theory of group-reduced distributions*, Amer. J. Math. **49**(1927), 433–455.
- [29] Rota, G-C., *The number of partitions of a set*, Amer. Math. Monthly, **71**(1964), 498–504.
- [30] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, 1974.
- [31] Stanley, R. P., *Enumerative Combinatorics*, 2 Vols., Cambridge University Press, Cambridge, 1997, 1999.
- [32] Wilf, H. S., *Generatingfunctionology*, 3^a ed. CRC Press 2005. La 2^o edición se puede descargar de <https://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>
- [33] Winkler, P., *Seven puzzles you think you must not have heard correctly*, Preprint, 2006. Descargable de <https://math.dartmouth.edu/~pw/solutions.pdf>

Índice alfabético

- acción
 - de grupos, 11, 13, 72
 - de Polyá, 13
- admisibilidad, 27, 65
- alfabeto, 38
- algoritmo, VIII, 38, 72–74, 97
- árbol, 11, 31
 - binario, 32
 - de Cayley, 80
 - enraizado, 31
 - etiquetado, 79
 - ordenado, 31
 - unario-binario, 36
- arista, 9
- asintótica de coeficientes, 86, 88
- átomo, 61
- autómata finito, 41
- autocorrelación, 44

- Bürmann, H. H., 83
- Bell, E. T., 70
- Bruijn, N. G. de, 16
- bucle, 9
- Burnside, lema de C-F-B, 12

- camino, 11
- Cauchy, A.
 - fórmula de los coeficientes, 82
 - fórmula integral, 82
 - lema de C-F-B, 12

- Cayley, A., 80
- ciclo, 8, 11, 51, 63, 68
- clase
 - atómica, 27, 62
 - combinatoria, 25
 - multivariada, 55
 - etiquetada, 62
 - neutral, 27, 62
 - punteada, 53
- clique, 10
- coeficiente
 - binomial, 6
 - multinomial, 7
- coloraciones, 13
- combinatoria, VII
 - analítica, VIII, 81
 - simbólica, VII
- composición, 22, 34
 - de clases, 53
- concatenación, 39
- constante de Euler, 3
- construcción
 - admisible, 27
- continuación analítica, 84
- convolución, 27
 - binomial, 67
- cumpleaños, paradoja de los, 76
- cupones, problema de los, 78

- derivada formal, 24

- desarreglo, 75
- digrafo, 9
- Dobiński, G., 71

- equivalencia asintótica, 3
- especies combinatorias, VIII
- estabilizador, 11
- etiqueta, 61
- Euler, L., VIII, 3, 10, 29, 51, 74
- expresión regular, 39

- factorial, 2
 - ascendente, 2
 - descendente, 2
 - doble, 2
- fge, 26, 62
- fgo, 26
- Fibonacci, 37, 38, 45, 89, 93, 95
- floresta, 37
- Frobenius, lema de C-F-B, 12
- función
 - μ de Möbius, 4
 - φ de Euler, 3
 - ζ de Riemann, 4
 - analítica, 82
 - generatriz
 - de Dirichlet, 26
 - de momentos, 5
 - exponencial, 26, 62
 - ordinaria, 26
 - holomorfa, 81
 - meromorfa, 85
 - piso, 2
 - techo, 2
- funciones
 - simétricas, 15
 - inyectivas, 6
 - sobreyectivas, 7, 9, 69, 70, 87, 90
- grado, 10
- grafo, 9
 - k -partito, 10
 - cúbico, 10
 - completo, 10
 - conexo, 11
 - regular, 10
 - simple, 10
- grupo simétrico, 62

- identidad de Vallée, 49
- inversión
 - de Lagrange, 24, 35, 37, 79, 83
 - de Möbius, 4, 54
 - de series formales, 23
- involución, 74
- isomorfismo combinatorio, 26

- Lagrange, J-L., 24, 35, 37, 79, 83
- lazo, 9
- lenguaje, 38
 - regular, 40

- multiconjunto, 1, 8, 48
- multigrafo, 9

- número áureo, 37
- números
 - de Bell, 9, 70
 - de Catalan, 31
 - de Fibonacci, 37, 38, 45, 89, 93, 95
 - de Motzkin, 36
 - de Stirling
 - de primera clase, 8, 71
 - de segunda clase, 9, 70

- O grande, 3
- o pequeña, 3
- órbita, 11

- palabra, 38
- parte singular, 85
- partición
 - de un conjunto, 8, 9, 59, 70, 71
 - de un entero, 49
- permutación, 8, 62
 - cíclica, 63
- polinomio indicador de ciclos, 15
- polo, 85
- Polya, G., 15, 16, 64
- potencia, 47
- probabilidad discreta, 5
- producto
 - cartesiano, 27
 - etiquetado, 66
- punto
 - regular, 84
 - singular, 84

- Redfield, J. H., 15, 16
- reducción, 66
- región, 81
- residuo, 85
- rotación, 51

- secuencias, 33
 - etiquetadas, 67
 - restringidas, 33
- semifactorial, 2
- serie
 - de Laurent, 85
 - de potencias, 17, 81
 - formal, 17
 - multivariada, 18, 55
- singularidad, 84
 - dominante, 84
- Stirling, J., 3, 8, 9, 70–72, 88
- subgrafo, 10

- teorema
 - de los residuos, 85
 - de Pringsheim, 84
 - de Redfield-Polya, 15, 16
 - del binomio, 7
 - multinomial, 7
- topología formal, 20
- triangulaciones, 29

- ultramétrica, 20
- urna, 63

- Vallée, identidad de, 49
- valor esperado, 5
- varianza, 5
- vértice, 9

Asociación Matemática Venezolana

Presidente: Pedro Berrizbeitia

Consejo Directivo Nacional

Pedro Berrizbeitia
Capítulo Capital

Alexander Carrasco
Capítulo de Centro Occidente

Oswaldo Araujo
Capítulo de Los Andes

Said Kas-Danouche
Capítulo de Oriente

Oswaldo Larreal
Capítulo Zuliano

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela.

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Consejo Directivo

Director

Eloy Sira

Subdirector

Alexander Briceño

Representantes del Ministerio del Poder Popular para la Educación Universitaria, Ciencia y Tecnología

Guillermo Barreto

Luther Rodríguez

José Vicente Montoya

Gerencia General

Alejandro Rivas

Comisión Editorial

Eloy Sira (**Coordinador**)

Horacio Biord

Jesús Eloy Conde

María Teresa Curcio G.

Rafael Gassón

Pamela Navarro

Héctor Suárez

Erika Wagner

