XXVII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA–VENEZUELA 2014

ESPACIOS DE LEBESGUE CON EXPONENTE VARIABLE. UN ESPACIO DE BANACH DE FUNCIONES MEDIBLES

Humberto Rafeiro y Edixon Rojas

MÉRIDA, VENEZUELA, 31 de agosto al 5 de septiembre de 2014

XXVII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA - VENEZUELA 2014

Espacios de Lebesgue con Exponente Variable

Un espacio de Banach de funciones medibles

Humberto Rafeiro
Pontificia Universidad Javeriana
silva-h@javeriana.edu.co

Edixon Rojas
Universidad Nacional de Colombia
edixonr@gmail.com

MÉRIDA, VENEZUELA, 31 DE AGOSTO AL 5 DE SEPTIEMBRE DE 2014

XXVII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana. La XXVII Escuela Venezolana de Matemáticas recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Banco Central de Venezuela, el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) y Centre International de Mathematiques Pures et Appliquees (CIMPA).

2010 Mathematics Subject Classication: 46E30, 47B38

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
Rif: G-20004206-0

Espacios de Lebesgue con Exponente Variable. Un espacio de Banach de funciones medibles

Humberto Rafeiro, Edixon Rojas

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas
Preprensa e impresión: Gráficas Lauki C.A.
Deposito legal: If66020145102245
ISBN: 978-980-261-152-2
Caracas, Venezuela
2014

à Daniela pelo seu amor e paciência
H.R.

Índice general

Prefacio

Los espacios de Lebesgue con exponente variable $L^{p(\cdot)}$, como su nombre lo indica, son una generalización de los espacios clásicos de Lebesgue al reemplazar el exponente constante p por una función. Los espacios resultantes tienen muchas propiedades similares al caso clásico, sin embargo difieren de estos en muchas formas. Estos espacios aparecen en la literatura por primera vez en 1931 en el trabajo de W. Orlicz [105], no obstante después de este artículo Orlicz abandona el estudio de los espacios con exponente variable para concentrarse en la teoría de los espacios de funciones hoy llamados *espacios de Orlicz*. No es hasta 1950 que estos espacios reaparecen en la literatura por H. Nakano en [95] donde menciona a los espacios $L^{p(\cdot)}([0,1])$ como un ejemplo que ilustra la teoría de los espacios modulares (también llamados *espacios de Nakano*) y sus propiedades son luego estudiadas en [96]. Una década después, en 1961, los espacios de Lebesgue con exponente variable son introducidos en la literatura rusa por I.V. Tsenov [132]. Luego, en 1979 I.I. Sharapudinov [121] estudia aspectos topológicos de los espacios de Lebesgue con exponente variable en intervalos de la recta real, subsecuentemente en [122, 123, 124] considera otros aspectos de análisis en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$. Estos espacios también fueron considerados por otros autores rusos, siendo los trabajos de V.V. Zhikov [140, 141, 142, 143, 144, 145, 147] los más influyentes y donde se aplica $L^{p(\cdot)}$ a problemas en cálculo de variaciones integrales con condiciones de crecimiento no estándar. En 1991 O. Kováčik y J. Rákosník publican el trabajo [81] el cual es considerado el puente al periodo "moderno" del estudio de los espacios con exponente variable. Con este trabajo comienza el estudio de las propiedades básicas de $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Es de notar que el primer interés en estos espacios es puramente teórico y los primeros trabajos de investigación sobre ellos fueron realizados sin ninguna idea de posibles aplicaciones, aunque luego, no mucho tiempo después, comienzan a surgir aplicaciones modeladas mediante $L^{p(\cdot)}$.

Así, motivados por los trabajos de V.V. Zhikov sobre problemas variacionales con exponente variable, a mediados de la década de los noventa comienza una intensa actividad en este tópico así como también en ecuaciones diferenciales con exponente variable. Ver, por ejemplo [1, 2, 4, 18, 22, 27, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 80, 97, 146]. Las investigaciones recientes en estos temas han sido fuertemente estimuladas por aplicaciones en varios problemas relacionados con objetos con crecimiento local no estándar en los cuales condiciones de crecimiento de orden variable aparecen; por ejemplo, en *teoría de elasticidad* y *mecánica de fluidos* en donde son de especial interés los "fluidos inteligentes" tales como los llamados *fluidos electro-reológicos* (ER) (véase [117]). Estos flujos son líquidos viscosos especiales que tienen la habilidad de cambiar significativamente sus propiedades mecánicas cuando sobre ellos es aplicado un campo eléctrico. Como se establece en [134], los fluidos ER son "una clase de líquidos que se endurecen hasta un estado semi sólido cuando es sometido a un campo eléctrico. Los fluidos electro-relógicos son comúnmente suspensiones coloidales y su endurecimiento bajo el efecto de un campo eléctrico es reversible". Las interesantes propiedades de los flujos ER pueden ser exploradas en aplicaciones tecnológicas. Por ejemplo, T. Hao [58] dice que "estos pueden ser usados en la industria automotriz para los sistemas de embrague, frenos y amortiguadores. También pueden ser usados en articulaciones de brazos y manos robóticos. Más aún, la técnica ER puede ser usada para fabricar materiales funcionales avanzados tales como cristales fotónicos, tintas inteligentes y polímeros compuestos heterogéneos." Dado que estos fluidos tienen propiedades no homogéneas, los espacios clásicos de Lebesgue y Sobolev no son adecuados para describirlos ya que el exponente p en estas aplicaciones necesita variar de un punto a otro. Este problema fue de considerable importancia para estimular el desarrollo de la teoría de los espacios de Lebesgue y Sobolev con exponente variable.

Quisiéramos señalar que estos espacios también han demostrado ser de utilidad en el estudio de procesamiento de imágenes. Por ejemplo, Chen, Levine y Rao en [21], basados en exponentes variables, proponen un nuevo modelo de restauración y recuperación de una imagen desde una imagen con ruido. En este modelo el valor de $p = 1$ produce mejores resultados en los bordes, mientras que $p = 2$ produce los mejores resultados cerca de las regiones lisas, lo que nos lleva por tanto a un exponente variable. Muchos de los resultados en esta linea de investigación están resumidos en las monografías [33, 117].

Por otro lado, los espacios de Banach de funciones medibles (BFS) fueron introducidos en 1955 por W.A.J. Luxemburg en su tesis doctoral [92] como un aporte al estudio sistemático de los espacios (de Banach) de funciones medibles. Sin embargo ya en 1925-29 A.N. Kolmogorov, A. Zygmund y E.C. Titchmarsh conocían que los clásicos espacios L^p son insuficientes para describir algunas propiedades de los operadores [77, 130, 131, 148]. Además, el estudio de funcionales con cierto comportamiento hecho por W.H. Young y W. Orlicz en la década de los treinta [106, 138] impulsa el estudio de estos espacios desde un punto de vista general, el de los espacios de Banach, y no se consideran sus características principales. Esto, aunado al hecho de que en análisis existen muchos espacios importantes que no son en general invariantes bajo reordenamientos (ejemplos de estos incluyen a los espacios de: *Lebesgue ponderados*, *Lorentz*, *Orlicz* y *Musielak-Orlicz*), hace necesario un abordaje unificador para este tipo de espacios. Los intentos de unificar a los espacios de Orlicz y Lorentz en un ambiente axiomático fueron hechos a principio de los años cincuenta por I. Halperin [57], H.W. Ellis y I. Halperin [41] y G.G. Lorentz y D.G. Wertheim [91].

En estas notas presentaremos a $L^{p(\cdot)}$ visto como un caso particular de un BFS, aunque estos pueden ser estudiados independientemente de los espacios de Banach de funciones medibles como en [28]. Aún así, con la intención de motivar el estudio de espacios BFS, optamos por esta presentación para mostrar como con modificaciones menores algunos resultados dados en BFS son válidos en espacios concretos, lo que permite establecer fundamentos comunes para diversas clases de espacios de funciones (medibles) integrables.

Este enfoque ha permitido, en parte, un rápido desarrollo del estudio de diferentes tipos de espacios de funciones con exponente variable (y su correspondiente teoría de operadores) como por ejemplo los espacios de *Besov*, *Herz*, *Lorentz*, *Morrey-Campanato*, *Potenciales de Bessel*, *Sobolev* y *Triebel-Lizorkin* así como *amalgamas en espacios de Lebesgue* *variables.* Ver, v. gr. [6, 8, 12, 33, 55, 56, 63, 79, 112, 137] y algunas de sus referencias. Como consecuencia de este desarrollo se han modelado distintos problemas con datos en estos nuevos espacios con exponente variable tales como: *Problemas de Dirichlet-Neumann*, *de segundo orden parabólicos y elípticos*, *de frontera libre* y *de Riemman-Hilbert* entre otros. Consultar, v. gr. [3, 7, 38, 39, 40, 46, 60, 71, 100, 101, 133].

Este manuscrito se puede considerar dividido en dos partes. En la primera consideraremos los fundamentos matemáticos de los BFS y $L^{p(\cdot)}$. La segunda parte está enfocada al estudio de algunas herramientas de análisis armónico en estos espacios.

Para la conveniencia del lector dividimos el texto en 4 capítulos, los primeros dos, que se considera la primera parte del manuscrito (Fundamentos), están dedicados al estudio de las propiedades de los BFS y $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. El capítulo 1 es una breve introducción a los espacios BFS, empieza con la introducción del concepto de espacio de Banach de funciones medibles y su norma, después se estudia el espacio asociado, la desigualdad de Hölder y la inclusión del espacio asociado en el espacio dual. Además, los problemas de caracterización de la dualidad, reflexividad y separabilidad serán estudiados bajo el concepto de la continuidad absoluta de la norma.

En el capítulo 2 se estudiarán aspectos básicos de los espacios de Lebesgue con exponente variable, por ejemplo, se introducen varios tipos de normas, se obtiene dualidad, norma asociada, el teorema de representación de Riesz, teoremas de embebimiento y de densidad. Por último, mostraremos algunos resultados que evidencian el carácter esencialmente distinto de los espacios con exponente variable con respecto al espacio de Lebesgue clásico.

La segunda parte (Herramientas de Análisis Armónico) consta de los capítulos 3 y 4. El capítulo 3 está dedicado a estudiar la acotación, tanto en BFS como en $L^{p(\cdot)}$, de algunos operadores clásicos en análisis armónico como lo son los operadores pseudodiferenciales y de tipo convolución, los cuales han probado ser de gran utilidad para modelar distintos problemas en diversos campos del conocimiento como *física*, *ingeniería*, *economía* y *medicina*. Dado que en estos espacios las técnicas clásicas de extrapolación, así como la desigualdad de Young no se satisfacen, algo que marca una gran diferencia con el caso clásico de espacios de funciones integrables, mostraremos condiciones que garantizan la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood, lo que nos permitirá establecer las condiciones de acotación de los operadores en consideración. Quisiéramos hacer notar que ya han sido establecidas condiciones para garantizar la acotación en estos espacios de otros tipos de operadores tales como los operadores de Hardy y potenciales de Riesz y Wolff. Sin embargo, decidimos no incluir estos resultados para incluir en su lugar la teoría de solubilidad de ecuaciones singulares integrales. Estos operadores son tratados en [7, 29, 36, 70, 69, 118, 119].

En el capítulo 4 mostraremos la teoría de solubilidad de ecuaciones singulares integrales con coeficientes continuos y continuos a trozos sobre curvas de Lyapunov en BFS y $L^{p(\cdot)}$. Para esto probaremos criterios de Fredholm de operadores integrales mediante diversas técnicas de investigación para cada caso. Es de notar que este enfoque nos permite a la vez estudiar otras propiedades como lo son la invertibilidad y la teoría espectral de los operadores asociados a las correspondientes ecuaciones. La solubilidad de ecuaciones singulares integrales, así como la propiedad de Fredholm de los correspondientes operadores, (con o sin desplazamiento) cuyos coeficientes son esencialmente acotados en estos espacios no es considerada aquí, pero puede ser vista en [114]. En esta linea de investigación, el siguiente paso a seguir es considerar problemas de valor en la frontera para funciones analíticas representadas por integrales de tipo Cauchy con densidad en espacios BFS y en espacios de Lebesgue con exponente variable. Estos problemas son estudiados en [114] para el caso de espacios BFS y en [71] cuando son consideradas funciones con densidad en $L^{p(\cdot)}$.

Para una mejor comprensión del material recomendamos que el lector esté familiarizado con las técnicas clásicas de Teoría de la Medida, y en particular las técnicas usadas en espacios de Lebesgue, para ello recomendamos [84, 115, 116]. También es deseable que el lector conozca los métodos empleados en el estudio de operadores singulares integrales en espacios de funciones integrables, aunque esto último no es un requisito indispensable, de igual manera para esto recomendamos [52, 53, 102].

Finalmente, quisiéramos agradecer al comité organizador de la XXVII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS EMALCA - VENEZUELA 2014 por aceptar nuestra propuesta de presentar estos temas en esta edición.

El trabajo fue parcialmente soportado por el proyecto de investigación Study of non-standard Banach spaces, id-ppta: 6326 de la Facultad de Ciencias de la Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia.

Como es usual en estos casos, se deben atribuir a los autores todos los errores u omisiones contenidos en este texto.

Humberto Rafeiro
Edixon Rojas
Bogotá, mayo 2014.

Notación

Espacios de funciones

$S_0(\mathbb{R}^n)$	Espacio de funciones medibles de f en $\mathbb{R}^n$ tales que $\|\{x \in \mathbb{R}^n : \|f(x)\| > \lambda\}\| < \infty$.
$\mathcal{M}_0(\Omega)$	Espacio de funciones medibles definidas en Ω finitas en casi toda parte con respecto a la medida de Lebesgue. Veáse p. 3.
$\mathcal{M}(\Omega)$	Espacio de funciones medibles definidas en Ω respecto a la medida de Lebesgue. Veáse p. 3.
$\mathcal{M}_+(\Omega)$	Subconjunto de $\mathcal{M}_0(\Omega)$ de funciones no negativas. Veáse p. 3.
$L^\infty(\Omega)$	Espacio de funciones esencialmente acotadas en Ω.
$L^p(\Omega)$	Espacio de Lebesgue, véase (2.1).
$C(\Omega)$	Funciones continuas en Ω.
$C_c^\infty(\Omega)$	Funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω.
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$	Espacios de Banach de funciones medibles.
$\mathcal{X}_a$	Espacios de Banach de funciones medibles con norma absolutamente continua, véase Definición 1.3.2.
$\mathcal{X}_b$	La clausura del conjunto $\mathcal{S}$ en $\mathcal{X}$, véase Definición 1.3.4.
$\mathcal{X}'$	Espacio asociado del espacio $\mathcal{X}$.
$L^{p(\cdot)}(\Omega)$	Espacio de Lebesgue con exponente variable p en Ω, véase Definición 2.1.1.
$\mathfrak{L}^{p(\cdot)}(\Omega)$	Espacio de Lebesgue con exponente variable p en Ω, véase (2.46).
$\mathbf{L}^{p(\cdot)}(\Omega)$	Espacio de Lebesgue con exponente variable p en Ω, véase (2.65).
$L^1_{\text{loc}}(\Omega)$	Espacio de funciones localmente integrables en Ω.

$L^{p(\cdot)}_{\pm}(\mathbb{R})$	Subespacios de $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ de funciones con soporte en $\mathbb{R}_{\pm}$.
$PC(\Gamma)$	Funciones acotadas continuas a trozos en Γ.
$\mathcal{B}(X,Y)$	Espacio de los operadores lineales y continuos de X en Y.

Miscelánea

$f \lesssim g$	Existe un constante $C > 0$ tal que $\lvert f(x)\rvert \leqslant C\lvert g(x)\rvert$.
$f \sim g$	$f \lesssim g$ y $g \lesssim f$.
$\mathcal{S}$	Conjunto de las funciones simples.
$\lvert\Omega\rvert$	Medida de Lebesgue de un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
$A \hookrightarrow B$	A está continuamente contenido en B, i.e., $A \subset B$ y para $f \in A$ tenemos $\lVert f\rVert_B \leqslant C\lVert f\rVert_A$.
χ_E	Función característica del conjunto E.
Ω_1, Ω_*, Ω_∞	Conjuntos de la función exponente p, véase p. 22.
$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$	Conjunto de funciones medibles para las cuales el operador maximal de Hardy-Littlewood es acotado en $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$, véase Definición 3.1.7.
$\mathfrak{M}_p$	Conjunto de todos los multiplicadores de Fourier, véase Definición 3.3.5.
$[\arg a(t)]_\Gamma$	Incremento total de la función $\arg a(t)$ cuando t toma valores en Γ.
$\arg a(t)$	Argumento continuo de la función a.
$\operatorname{Ind} T$	Índice de Fredholm del operador T.
$\operatorname{ind} a$	Índice de Cauchy de la función a.
$X \dotplus Y$	Suma directa de X y Y.
$S^m_{\rho,\delta}$	Clase de símbolos de Hörmander.
$S^m_{\rho,\delta}(\varkappa,\varkappa')$	Clase de símbolos de Miyachi.

Normas

$\varrho(f)$	Función norma, véase Definición 1.1.1.
$\varrho'(f)$	Función norma asociada, véase Definición 1.2.1.
$\rho_{p(\cdot)}(f)$	Funcional $p(\cdot)$-norma, véase p. 22.
$\lVert\cdot\rVert_{\mathcal{X}}$	Norma de un BFS, véase (1.1).
$\lVert\cdot\rVert_{(p)}$	Véase (2.8).
$\lVert\cdot\rVert_p$	Véase (2.11).
$\lVert\cdot\rVert^1_p$	Véase (2.29).
$\lVert\cdot\rVert^*_p$	Véase (2.48).
$\lVert\cdot\rVert^{**}_p$	Véase (2.49).

$\left\|\left\|\cdot\right\|\right\|_{(p)}$	Véase (2.35).

Operadores

Avg_r	Operador de promedio integral, véase 3.1.
$\mathrm{op}(a)$	Operador pseudodiferencial con símbolo a.
τ_h	Operador de traslación, véase p. 52.
$f * g$	Operador de convolución, véase (2.71).
$\mathrm{Avg}_r(f)$	Operador de promedio integral, véase (3.1).
M_B, M_Q	Operador maximal de Hardy-Littlewood, véase p. 62.
$\mathcal{M}_\alpha$	Operador maximal fraccionario de Hardy-Littlewood, véase Definición 3.1.5.
$M_q f$	El q-ésimo operador maximal, véase (3.3).
$f^\sharp$	Función maximal de Fefferman-Stein, véase p. 63.
$f_\delta^\sharp$	Véase p. 63.
f^*	Reordenamiento no creciente, véase p. 63.
f^{**}	Véase p. 63.
$M_\lambda^\sharp$	Función maximal óptima local, véase p. 63.
f_Q	Véase p. 63.
φ_ε	Molificador de Friedrichs, véase Definición 3.3.2.
$\mathcal{B}^\alpha$	Operador potencial de Bessel, véase (3.3.2).
T	Operador de Calderón-Zygmund, véase (3.3.3)
S	Operador singular integral de Cauchy, véase Definición 3.3.4.
W_ϕ	Operador de Wiener-Hopf, véase (3.21).
H_ϕ	Operador de Hankel, véase (3.22).
$W_\phi \pm H_\phi$	Operador de Wiener-Hopf-Hankel, véase (3.23).

Propiedad de los exponentes

p_+, p_-	Supremo e ínfimo (esencial) de la función p, véase (2.2).
p'	El exponente dual o exponente conjugado, véase p. 23.
$LH_0(\Omega)$	Clase de funciones localmente log-Hölder continuas, véase Definición 3.1.4.
$LH_\infty(\Omega)$	Clase de funciones localmente log-Hölder continuas al infinito, véase Definición 3.1.6.
$LH(\Omega)$	Clase de funciones globalmente log-Hölder continuas, véase Definición 3.1.6.
$\mathcal{P}(\Omega)$	Familia de funciones medibles $p : \Omega \longrightarrow [1, \infty]$.

Parte I

Fundamentos

Capítulo 1

Espacios de Banach de funciones medibles

Los espacios de funciones son una herramienta moderna de análisis que permite encuadrar muchos problemas concretos en un contexto mas abstracto. Es posible estudiar cada uno de estos espacios por separado, sin embargo algunos matemáticos empezaron a notar que ciertas *estructuras* eran comunes a muchos de ellos. La teoría de los *espacios de Banach de funciones medibles* (BFS[1]) es una manera de categorizar espacios de funciones; el equivalente en biología sería una *especie* en un sistema taxonómico. Esto sirve como un principio de economía, pues si cierto espacio es BFS, entonces podemos decir muchas cosas del espacio sin mucho trabajo simplemente basados en la teoría de BFS.

1.1. BFS

Asumiremos siempre que (Ω, μ) es un espacio de medida σ-finita, esto es, existe una sucesión de conjuntos $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mu(\Omega_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$. Por $\mathcal{M}(\Omega, \mu)$ designaremos al conjunto de las funciones reales μ-medibles en Ω, $\mathcal{M}_0(\Omega, \mu)$ denotará las funciones en $\mathcal{M}(\Omega, \mu)$ finitas en casi toda parte (c.t.p.) y por $\mathcal{M}_+(\Omega, \mu)$ al subconjunto de $\mathcal{M}_0(\Omega, \mu)$ que consiste de funciones no negativas.
Como es usual en Teoría de la Medida, dos funciones son *iguales* cuando

[1] Del inglés *Banach Function Spaces.*

ellas son iguales μ-c.t.p.; i.e., las funciones de $\mathcal{M}(\Omega,\mu)$ son clases de equivalencia módulo μ-constante.

Definición 1.1.1. *El funcional* $\varrho : \mathcal{M}_+(\Omega,\mu) \longrightarrow [0,\infty]$ *se llama una* función norma de Banach *si, para toda* f, g, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathcal{M}_+$, *para todo* $\lambda \geqslant 0$ *y para todo conjunto* μ*-medible* E *de* Ω, *las siguientes propiedades son verdaderas:*

(P1) $\varrho(f) = 0$ *si, y sólo si,* $f = 0$ μ*-c.t.p. en* Ω*;*
$\varrho(\lambda f) = \lambda\varrho(f)$ *(homogénea);*
$\varrho(f_1 + f_2) \leqslant \varrho(f_1) + \varrho(f_2)$ *(subaditiva).*

(P2) $g \leqslant f$ μ*-c.t.p., entonces* $\varrho(g) \leqslant \varrho(f)$ *(propiedad de "lattice").*

(P3) *Si* $f_n \uparrow f$ μ*-c.t.p., entonces* $\varrho(f_n) \uparrow \varrho(f)$ *(propiedad de Fatou).*

(P4) *Si* $\mu(E) < \infty$*, entonces* $\varrho(\chi_E) < \infty$*.*

(P5) *Si* $\mu(E) < \infty$*, existe una constante finita* C_E *(que depende solamente del conjunto* E*) tal que* $\int_E f d\mu \leqslant C_E\varrho(f)$*.*

Es importante subrayar que esto no es un sistema axiomático, pues (P2) es una consecuencia de (P3), pero es usual dar esta definición por economía debido a la importancia de (P2) en muchas demostraciones.

EJERCICIO 1.1.1. Demuestre que la propiedad (P2) de la Definición 1.1.1 es una consecuencia de (P3).

Definición 1.1.2. *Sea* ϱ *una función norma de Banach. Al conjunto* $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\Omega,\mu)$ *definido como el conjunto de todas las funciones en* $\mathcal{M}(\Omega,\mu)$ *tal que* $\varrho(|f|) < \infty$ *lo llamaremos* Espacio de Banach de funciones medibles (BFS)*. Si* $f \in \mathcal{X}$ *definimos de manera natural la norma por*

$$\|f\|_{\mathcal{X}} = \|f\| = \varrho(|f|). \tag{1.1}$$

Como consecuencias de la Definición 1.1.1 tenemos:

Lema 1.1.1. *Sea* $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\Omega,\mu)$ *un BFS.*

(a) $\|f\|_{\mathcal{X}} = 0$ *es equivalente a* $f = 0$ μ*-c.t.p. en* Ω*.*

(b) Si $f_1 \leqslant f_2$ μ*-c.t.p. en* Ω*, entonces* $f_2 \in \mathcal{X}$ *implica que* $f_1 \in \mathcal{X}$*, y* $\|f_1\|_{\mathcal{X}} \leqslant \|f_2\|_{\mathcal{X}}$*.*

(c) *Si $f \in \mathcal{X}$, entonces f es finita μ-c.t.p. en Ω.*

(d) *Si $f_n \in \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geqslant 0$ y $f_n \uparrow f$ μ-c.t.p. en Ω, entonces o $f \in \mathcal{X}$ y $\|f_n\|_{\mathcal{X}} \uparrow \|f\|_{\mathcal{X}}$ o $\|f_n\|_{\mathcal{X}} \uparrow \infty$.*

(e) *Si $f_n \in \mathcal{X}$, y $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-c.t.p. en Ω, entonces tenemos el* Lema de Fatou*: $\|f\|_{\mathcal{X}} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{\mathcal{X}}$.*

(f) *Si E es cualquier conjunto acotado, entonces $\left\|\chi_E\right\|_{\mathcal{X}} < \infty$.*

(g) *Para todo conjunto de medida finita E, existe una constante finita C_E (que depende solamente del conjunto E) tal que $\int_E |f| d\mu \leqslant C_E \|f\|_{\mathcal{X}}$ para toda función $f \in \mathcal{X}$.*

Demostración. Solamente el ítem (c) y Lema de Fatou (e) no son inmediatas. Para demostrar el ítem (c), observe que si $f \in \mathcal{X}$, entonces $\|f\|_{\mathcal{X}} < \infty$. Sea E el conjunto en donde $|f(x)|$ es infinita y supongamos que $\mu(E) > 0$, por lo tanto $\left\|\chi_E\right\|_{\mathcal{X}} > 0$. Se sigue de (a) y (b) que $\|f\|_{\mathcal{X}} \geqslant n\left\|\chi_E\right\|_{\mathcal{X}}$ para $n = 1, 2, \ldots$, así $\|f\|_{\mathcal{X}} = \infty$, lo que contradice $f \in \mathcal{X}$. Para probar (e), escribimos $h_n(x) = \inf\left\{|f_n(x)|, |f_{n+1}(x)|, \ldots\right\}$. Entonces $0 \leqslant h_n(x) \uparrow |f(x)|$ μ-c.t.p. en Ω, por lo tanto $\|f\|_{\mathcal{X}} = \lim \|h_n\|_{\mathcal{X}} \leqslant \liminf \|f_n\|_{\mathcal{X}}$ por (P2) y (b). □

Ejemplo 1.1.1. El ejemplo clásico de un espacio de Banach de funciones medibles es el espacio de Lebesgue $L^p([0,1])$ tomando $\varrho(f)$ como

$$\varrho_p(f) = \begin{cases} \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leqslant p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in[0,1]} f(x), & p = \infty. \end{cases}$$

Definición 1.1.3. *Por $\mathcal{S}$ denotamos el conjunto de funciones simples en Ω.*

Teorema 1.1.1. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach de funciones. Tenemos que $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ es un espacio normado y además tenemos que*

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{M}_0. \tag{1.2}$$

Demostración. Como la medida μ es σ-aditiva, entonces las funciones localmente integrables son finitas μ-c.t.p.. Por lo tanto $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}_0$. Por otro lado, de la la propiedad (P5) todas las funciones en $\mathcal{X}$ son localmente integrables en Ω, luego, como $\mathcal{M}_0$ es un espacio vectorial, entonces $\mathcal{X}$ también lo es. Se sigue de (P1) que $\mathcal{X}$ es un espacio normado, de esta forma por (P4), $\chi_E \in \mathcal{X}$ para todo conjunto E tal que $\mu(E) < \infty$. Así, por la linealidad de $\mathcal{X}$, se tiene que $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$. Demostraremos ahora que $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{M}_0$ es continua. Supongamos que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface $f_n \to f$ en $\mathcal{X}$. Entonces, por (1.1) tenemos que $\varrho\left(|f_n - f|\right) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Dado $\varepsilon > 0$ y un conjunto $E \subset \Omega$ tal que $\mu(E) < \infty$, por (P5) obtenemos que

$$\mu\left\{x \in E : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_E |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{C_E}{\varepsilon}\varrho\left(|f - f_n|\right),$$

que converge a 0 cuando $n \to \infty$, pues C_E es independiente de n. En consecuencia, $f_n \to f$ en medida en todo conjunto de medida finita, en otras palabras, $f_n \to f$ en $\mathcal{M}_0$. $\square$

El siguiente teorema justifica la utilización de la palabra *Banach* en BFS.

Teorema 1.1.2. *El espacio $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Solamente tenemos que probar que $\mathcal{X}$ es completo; es decir, dada una sucesión de $f_n \in \mathcal{X}$ tal que $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{X}} \to 0$ cuando $n, m \to \infty$, tenemos que demostrar que existe una única función $f \in \mathcal{X}$ tal que $\|f_n - f\|_{\mathcal{X}} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{X}} \to 0$, existe una subsucesión $\{g_n\}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}\|g_{n+1} - g_n\|_{\mathcal{X}} < \infty$. Para cada $x \in \Omega$ escribimos $g(x) = |g_1(x)| + \sum_{n=1}^{\infty}|g_{n+1}(x) - g_n(x)|$, por lo tanto $\|g\|_{\mathcal{X}} \leqslant \|g_1\|_{\mathcal{X}} + \sum\|g_{n+1} - g_n\|_{\mathcal{X}}$ por (P2), lo que implica que el conjunto E en el cual $g(x) = \infty$ es de medida μ-cero (por el Lema 1.1.1(c)). Tomando $f(x) = 0$ para $x \in E$ y $f(x) = g_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}[g_{n+1}(x) - g_n(x)]$ para $x \in \Omega \backslash E$, obtenemos que $\|f\|_{\mathcal{X}} \leqslant \|g\|_{\mathcal{X}} < \infty$ y $\|f - g_i\|_{\mathcal{X}} \to 0$ cuando $i \to \infty$. La unicidad de f es consecuencia del Lema 1.1.1(a).[2] $\square$

Definición 1.1.4. *Sean X y Y dos espacios lineales normados. Si el operador de identidad $I_X : X \to Y$ es continuo, decimos que el espacio* X se embebe de forma continua en el espacio Y *y denotamos este hecho por $X \hookrightarrow Y$. En otras palabras, $\|I_X\|_{X\hookrightarrow Y} := \sup_{f\not\equiv 0}\frac{\|f\|_Y}{\|f\|_X}$ es finito.*

[2]Observe que la demostración no depende de (P3) y (P4).

Teorema 1.1.3. *Sean $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\Omega, \mu)$ y $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\Omega, \mu)$ espacios de Banach de funciones medibles. Si $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, entonces $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$.*

Observación 1.1.1. Recordemos el

> **Teorema de Riesz-Fischer.** *Sea V un espacio vectorial y q una semi-norma en V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
>
> 1. *(V, q) es completo;*
> 2. *para toda sucesión $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{j\in\mathbb{N}} q(v_j) < \infty$, la serie $\sum_{j\in\mathbb{N}} v_j$ converge en V.*

Demostración del Teorema 1.1.3. Supongamos que $\mathcal{X} \not\hookrightarrow \mathcal{Y}$. Entonces existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones $f_n \geqslant 0$ en $\mathcal{X}$ tal que $\|f_n\|_{\mathcal{X}} \leqslant 1$, $\|f_n\|_{\mathcal{Y}} > n^3$, $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Riesz-Fischer, $\sum f_n/n^2$ converge en $\mathcal{X}$ para alguna función $f \in \mathcal{X}$. Por la hipótesis $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, tenemos que $f \in \mathcal{Y}$. Sin embargo, como $0 \leqslant n^{-2} f_n \leqslant f$ y por lo tanto $\|f\|_{\mathcal{Y}} \geqslant n^{-2}\|f_n\|_{\mathcal{Y}} > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces obtenemos una contradicción con $f \in \mathcal{Y}$. □

Corolario 1.1.1. *Si dos espacios de Banach de funciones medibles tienen los mismos elementos, entonces sus normas son equivalentes.*

EJERCICIO 1.1.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio apropiado.

1. Sea $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y w un peso en Ω. Muestre que el espacio de Lebesgue ponderado $L^p(\Omega, w) = \left\{ f : \underbrace{\int_\Omega |f(x)|^p w(x)\,\mathrm{d}x}_{\varrho(f)} < \infty \right\}$ es un BFS.
2. Sea Φ una función de Young. Muestre que el espacio de Orlicz $L^\Phi(\Omega) := \left\{ f : \underbrace{\int_\Omega \Phi(f)\,\mathrm{d}x}_{\varrho(f)} < \infty \right\}$ es un BFS.
3. Sea $\lambda \geqslant 0$ y $p \in (1, \infty)$. Muestre que el espacio de Morrey definido como $L^{p,\lambda}(\Omega) := \left\{ f : \underbrace{\sup_{x\in\Omega, r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p\,\mathrm{d}y}_{\varrho(f)} < \infty \right\}$ es un BFS.

4. Sea $\lambda \geqslant 0$ y $p \in (1,\infty)$. Muestre que el espacio de Campanato $\mathfrak{L}^{p,\lambda}(\Omega) := \left\{ f : \underbrace{\sup_{x\in\Omega, r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)-f_B|^p \,\mathrm{d}y}_{\varrho(f)} < \infty \right\}$ no es un BFS, donde $f_B := \frac{1}{|B|}\int_B f\,\mathrm{d}\mu$ es el promedio integral.

1.2. Espacio asociado

Una propiedad muy importante de los espacios de Lebesgue es su caracterización "dual". Es decir:

$$\|f\|_{L^p([0,1])} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}([0,1])}\leqslant 1} \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

donde p y p' son exponentes conjugados $p^{-1}+p'^{-1}=1$.
Vamos introducir el *espacio asociado de* $\mathcal{X}$, que extiende este concepto para BFS.

Definición 1.2.1. *Para cualquier función norma $\varrho(f)$, definida en el conjunto P de las funciones no-negativas μ-medibles y que satisfacen (P1)-(P5), introducimos la* función asociada *$\varrho'(f)$ en P por*

$$\varrho'(f) = \sup_{\varrho(g)\leqslant 1} \int\limits_{\Omega} fgd\mu. \tag{1.3}$$

Teorema 1.2.1. *La función asociada ϱ' definida por* (1.3) *es una función norma.*

Demostración. Es suficiente demostrar que ϱ' satisface (P1)-(P5). Supongamos que $\varrho'(f)\leqslant 1$. Entonces (1.2) implica que $f(x)<\infty$ μ-c.t.p.. Si $g=0$ μ-c.t.p., entonces $\int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu = 0$, por lo tanto, por (1.3) tenemos que $\varrho'(g)=0$. Si $\varrho'(g)=0$, entonces $\int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu=0$ para toda $f\in\mathcal{M}^+$ con $\varrho(f)\leqslant 1$. Si $E\subset\Omega$ es un conjunto μ-medible con $0<\mu(E)<\infty$, entonces $0<\varrho(\chi_E)<\infty$ por las propiedades (P1) y (P4) de ϱ. La función $f:=\chi_E/\varrho(\chi_E)$ satisface $\varrho(f)=1$, así

$$\varrho(\chi_E)^{-1}\int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Por lo tanto, $g = 0$ μ-c.t.p. en E. Como E es arbitrario tenemos que $g = 0$ μ-c.t.p.. La homogeneidad y la subaditividad de ϱ' son fáciles de verificar. La propiedad (P2) es una consecuencia inmediata de la definición de ϱ'.

Mostraremos ahora (P3). Sea $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ con $0 \leqslant g_n \uparrow g$ μ-c.t.p. para alguna función $g \in \mathcal{M}$, entonces para $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, tenemos por (P2) que $\varrho'(g_m) \leqslant \varrho'(g_n) \leqslant \varrho'(g)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\varrho(g_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea ε cualquier número que satisface $\varepsilon < \varrho'(g_n)$. Por (1.3), existe una función $f \in \mathcal{M}_+$ con $\varrho(f) \leqslant 1$ tal que $\int fg \,\mathrm{d}\mu > \varepsilon$. Ahora, $0 \leqslant f_m \uparrow fg$ μ-c.t.p. entonces el Teorema de Convergencia Monótona implica que $\int fg_n \uparrow \int fg$. Así, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\int fg_n > \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_0$. Por lo tanto, por (1.3), obtenemos que $\varrho'(g_n) > \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_0$. De esta manera obtenemos que $\varrho'(g_n) \uparrow \varrho'(g)$, i.e. ϱ' satisface la propiedad (P3).

Para verificar (P4) para ϱ' utilizamos (P5) para ϱ y viceversa. Sea $E \subset \Omega$ el cual satisface $\mu(E) < \infty$, entonces por (P5), para ϱ, existe una constante $C_E < \infty$ tal que

$$\int\limits_{\Omega} \chi_E f \,\mathrm{d}\mu \leqslant C_E \varrho(f), \quad f \in \mathcal{M}_+.$$

Esto junto con (1.3) implica que $\varrho'(\chi_E) \leqslant C_E < \infty$, lo cual demuestra (P4) para ϱ'. Para demostrar (P5), sea $E \subset \Omega$ tal que $\mu(E) < \infty$. Si $\mu(E) = 0$, entonces $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$, y por lo tanto (P5) se cumple. Cuando $\mu(E) > 0$, tenemos por (P4) para ϱ que $\varrho(\chi_E) < \infty$ y por (P1) para ϱ que $\varrho(\chi_E) > 0$. Definiendo $C'_E := \varrho(\chi_E)$ y $f := \frac{\chi_E}{\varrho(\chi_E)}$, entonces $\varrho(f) = 1$, por lo tanto, para toda $g \in \mathcal{M}^+$, obtenemos por (1.3) que

$$\int\limits_E g \,\mathrm{d}\mu = C'_E \int\limits_{\Omega} fg \,\mathrm{d}\mu \leqslant C'_E \varrho'(g),$$

lo que demuestra (P5). $\square$

EJERCICIO 1.2.1. Sea $\mathcal{X}$ un BFS y $\mathcal{X}'$ su espacio asociado. Demuestre que

$$\|g\|_{\mathcal{X}'} := \sup_{\|f\|_{\mathcal{X}} \leqslant 1} \int\limits_{\Omega} |fg| \,\mathrm{d}\mu. \tag{1.4}$$

Podemos definir $\varrho^{(n)}$ de una manera inductiva. Tomando $\varrho^{(0)}(f) = \varrho(f)$, definimos

$$\varrho^{(n)}(f) = \sup_{\varrho^{(n-1)}(g)} \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu. \tag{1.5}$$

Definimos ahora el espacio asociado de $\mathcal{X}$.

Definición 1.2.2. *Por $\mathcal{X}^{(n)}$ definimos el conjunto de todas las funciones μ-medibles en Ω tal que $\|f\|_{\mathcal{X}^{(n)}} = \varrho^{(n)}(|f|)$ es finita, donde $\varrho^{(n)}$ es definida por* (1.5). *Cuando $n = 1$ o $n = 2$, escribiremos el espacio asociado como $\mathcal{X}'$ y $\mathcal{X}''$, respectivamente.*

Teorema 1.2.2. *Todo espacio $\mathcal{X}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, es un espacio de Banach.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de la Definición 1.2.2, del Teorema 1.2.1 y del Teorema 1.1.2. □

Definición 1.2.3. *El espacio de Banach $\mathcal{X}^{(n+1)}$ es llamado el* espacio asociado de *$\mathcal{X}^{(n)}$.*

Teorema 1.2.3 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean $f \in \mathcal{X}$, $g \in \mathcal{X}^{(1)}$, entonces*

$$\int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_{\mathcal{X}} \|g\|_{\mathcal{X}^{(1)}}\,. \tag{1.6}$$

Demostración. Supongamos primero que $\|f\|_{\mathcal{X}} = 0$. Entonces $f = 0$ μ-c.t.p. en Ω, por lo tanto ambos lados de (1.6) son cero. Cuando $\|f\|_{\mathcal{X}} > 0$, entonces

$$\left\| \frac{f}{\|f\|_{\mathcal{X}}} \right\|_{\mathcal{X}} = 1.$$

Por la definición de $\mathcal{X}'$ y por (1.4) obtenemos la desigualdad

$$\int_\Omega \left| \left(\frac{f}{\|f\|_{\mathcal{X}}} \right) g \right| \mathrm{d}\mu \leqslant \|g\|_{\mathcal{X}'}\,,$$

la cual implica el resultado. □

El teorema anterior nos dice que una de las desigualdades más importantes en análisis se cumple en BFS y su espacio asociado, esto es un indicador de la importancia del espacio asociado. Otro indicador es el teorema siguiente, donde obtenemos una relación entre el espacio asociado y el espacio dual.

Lema 1.2.1. *Toda función $g \in \mathcal{X}^{(1)}$ define un funcional lineal acotado en el espacio $\mathcal{X}$ poniendo $g^*(f) = \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu$ y norma $\|g^*\| = \|g\|_{\mathcal{X}^{(1)}}$.*

Demostración. El funcional lineal $g^*(f) = \int fg \, \mathrm{d}\mu$ es acotado por la desigualdad de Hölder $|g^*(f)| \leqslant \|g\|_{\mathcal{X}'} \|f\|_{\mathcal{X}}$, lo que implica que $\|g^*\| \leqslant \|g\|_{\mathcal{X}'}$. La desigualdad inversa es consecuencia de la definición de $\|g\|_{\mathcal{X}'}$. □

Ahora obtenemos el llamado *Teorema de Resonancia de Landau.*

Teorema 1.2.4. *La función $f \in \mathcal{X}^{(1)}$ si y solamente si fg es integrable sobre Ω para toda $g \in \mathcal{X}$.*

Demostración. "Solamente si" es inmediata. Para demostrar el "si", supongamos que fg es integrable en Ω para toda $g \in \mathcal{X}$ y que $\|f\|_{X^{(1)}} = \infty$. Entonces, existe una sucesión g_n tal que $0 \leqslant g_n \in \mathcal{X}$, $\|g_n\|_{\mathcal{X}} \leqslant 1$ y $\int_\Omega fgd\mu > n^3$. Escribamos $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} g_n(x)$. Por la propiedad (P2), tenemos que $\|g\|_{\mathcal{X}}$ es finita, lo que implica que $\int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu$ es finita por hipótesis. Por otro lado, para todo $n = 1, 2, \ldots$ tenemos que $\int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu > n^{-2} \int_\Omega |fg_n| \, \mathrm{d}\mu > n$ lo cual es una contradicción. □

EJERCICIO 1.2.2. Demuestre que $f \in \mathcal{X}^{(n)}$ si y solamente si fg es integrable en Ω para toda $g \in \mathcal{X}^{(n-1)}$.

EJERCICIO 1.2.3. Calcular $\mathcal{X}'$ cuando:

(a) $\mathcal{X} = L^p([0,1])$, $1 < p < \infty$;
(b) $\mathcal{X} = L^1([0,1])$;
(c) $\mathcal{X} = L^\infty([0,1])$.

Una propiedad muy importante del espacio asociado viene dada por el *Teorema de Lorentz-Luxemburg* (para una demostración algo técnica véase [13]).

Teorema 1.2.5 (Lorentz-Luxemburg)**.** *Todo espacio de Banach de funciones medibles $\mathcal{X}$ coincide con su segundo espacio asociado $\mathcal{X}^{(2)}$.*

Una pregunta natural es comparar el espacio asociado $\mathcal{X}'$ con el espacio dual $\mathcal{X}^*$. Del Lema 1.2.1 tenemos que $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}^*$, pero por el Teorema 1.2.5 sabemos que la inclusión contraria no siempre es verdad (considere p. ej. $\mathcal{X} = L^\infty$).

Teorema 1.2.6. *La norma de una función $g \in \mathcal{X}^{(1)}$ es dada por*

$$\|g\|_{\mathcal{X}^{(1)}} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{X}} \leqslant 1} \left| \int_\Omega f g \, \mathrm{d}\mu \right| . \tag{1.7}$$

Demostración. Por la desigualdad de Hölder (1.6), para toda $f \in \mathcal{X}$, con $\|f\|_{\mathcal{X}} \leqslant 1$ y toda $g \in \mathcal{X}'$, tenemos

$$\left| \int_\Omega f g \, \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int_\Omega |fg| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_{\mathcal{X}} \|g\|_{\mathcal{X}'} \leqslant \|g\|_{\mathcal{X}'} ,$$

lo que implica que $\sup \left\{ \left| \int_\Omega f g \, \mathrm{d}\mu \right| : f \in \mathcal{X}, \|f\|_{\mathcal{X}} \leqslant 1 \right\} \leqslant \|g\|_{\mathcal{X}'}$. Para demostrar la desigualdad contraria, denotemos por $\mathbb{B}_{\mathcal{X}}$ la bola unitaria en $\mathcal{X}$. Dada $g \in \mathcal{M}$, sea $E := \{ x \in \Omega : g(x) \neq 0 \}$ y escribimos g en forma polar como $g(x) = |g(x)|\psi(x)$ donde $|\psi(x)| = 1$. Sea ahora $f \in \mathbb{B}_{\mathcal{X}}$ y $h(x) := |f(x)|\psi(x)\chi_E(x)$, $x \in \Omega$. Luego $|h(x)| \leqslant |f(x)|$ para $x \in \Omega$, entonces por la propiedad (P2) en $\mathcal{X}$ tenemos también que $h \in \mathbb{B}_{\mathcal{X}}$. Tomando en consideración lo anterior obtenemos $\int_\Omega |fg| \, \mathrm{d}\mu = \int_E |fg| \, \mathrm{d}\mu = \int_E |f| g \psi^{-1} \, \mathrm{d}\mu$. Por lo tanto $\int_\Omega |fg| \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega hg \, \mathrm{d}\mu \leqslant |\int_\Omega hg \, \mathrm{d}\mu| \leqslant \sup_{f \in \mathbb{B}_{\mathcal{X}}} |\int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu|$. Tomando el supremo en el lado izquierdo sobre todo $f \in \mathbb{B}_{\mathcal{X}}$ y utilizando (1.4) obtenemos la desigualdad

$$\|g\|_{\mathcal{X}'} \leqslant \sup \left\{ \left| \int_\Omega f g \, \mathrm{d}\mu \right| : f \in \mathcal{X}, \, \|f\|_{\mathcal{X}} \leqslant 1 \right\}, \quad g \in \mathcal{M},$$

lo que termina la demostración. $\square$

EJERCICIO 1.2.4. Sea $\mathcal{X}$ un BFS y $\mathcal{X}'$ su espacio asociado. Demuestre que podemos expresar la norma $\|g\|_{\mathcal{X}'}$ de la siguiente manera:

$$\|g\|_{\mathcal{X}'} = \sup_{f \neq 0} \frac{\left| \int_\Omega f g \, \mathrm{d}\mu \right|}{\|f\|_{\mathcal{X}}} . \tag{1.8}$$

Introducimos ahora el concepto de espacio fundamental-norma.

Definición 1.2.4. *Un subespacio lineal cerrado $\mathcal{B}$ del espacio dual $\mathcal{X}^*$ de un espacio de Banach $\mathcal{X}$ se dice* fundamental-norma *si*

$$\|f\|_{\mathcal{X}} = \sup\left\{|L(f)| : L \in \mathcal{B},\ \|L\|_{\mathcal{X}^*} \leqslant 1\right\}$$

para toda $f \in \mathcal{X}$.

El siguiente teorema nos dice que el espacio asociado es *más pequeño* que el espacio dual.

Teorema 1.2.7. *El espacio $\mathcal{X}^{(1)}$ es isometricamente isomorfo a un subespacio fundamental-norma de $\mathcal{X}^*$.*

Demostración. Dada $g \in \mathcal{X}'$, definamos $g^* : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $g^*(f) = \int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu$, y ya sabemos que $g \mapsto g^*$ es un isomorfismo entre $\mathcal{X}'$ y algún subespacio $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}^*$ (Lema 1.2.1). Además, por la definición de norma en $\mathcal{X}^*$, la definición de g^* y por (1.7) tenemos:

$$\left\|g^*\right\|_{\mathcal{X}^*} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{X}}\leqslant 1} |g^*(f)| = \sup_{\|f\|_{\mathcal{X}}\leqslant 1} \left|\int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu\right| = \|g\|_{\mathcal{X}'}$$

por lo tanto la aplicación $g \mapsto g^*$ es una isometría. Como $\mathcal{X}'$ es un espacio de Banach, esta aplicación tiene rango cerrado en $\mathcal{X}^*$. Solo queda demostrar que $\mathcal{X}'$ es fundamental-norma. Por el Teorema de Lorentz-Luxemburg 1.2.5 y (1.7), tenemos

$$\|f\|_{\mathcal{X}} = \|f\|_{\mathcal{X}^{(2)}} = \sup_{\|g\|_{\mathcal{X}'}} \left|\int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu\right| = \sup_{\|g^*\|_{\mathcal{X}^*}\leqslant 1} |g^*(f)|,$$

es decir, $\mathcal{X}'$ es fundamental-norma. $\square$

Teorema 1.2.8. *Si $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ son espacios de Banach de funciones medibles y $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$, entonces $\mathcal{Y}^{(1)} \hookrightarrow \mathcal{X}^{(1)}$.*

Demostración. De la igualdad (1.8) tenemos

$$\begin{aligned}\|I_X\|_{X\hookrightarrow Y} &= \sup_{f\neq 0}\frac{\|f\|_{\mathcal{Y}}}{\|f\|_{\mathcal{X}}} = \sup_{f\neq 0}\sup_{g\neq 0}\frac{\left|\int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu\right|}{\|f\|_{\mathcal{X}}\|g\|_{\mathcal{Y}'}} = \sup_{g\neq 0}\sup_{f\neq 0}\frac{\left|\int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu\right|}{\|f\|_{\mathcal{X}}\|g\|_{\mathcal{Y}'}}\\ &= \sup_{g\neq 0}\frac{\|g\|_{\mathcal{X}'}}{\|g\|_{\mathcal{Y}'}} = \|I_X\|_{\mathcal{Y}'\hookrightarrow\mathcal{X}'}\,.\end{aligned}$$

Lo que demuestra el teorema. □

1.3. Continuidad absoluta de la norma

Definición 1.3.1. *Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos μ-medibles de Ω. Decimos que $E_n \to \emptyset$ cuando $\chi_{E_n} \to 0$ μ-c.t.p. en Ω. Escribimos $E_n \downarrow \emptyset$ cuando $E_n \to \emptyset$ y además la sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente.*

Definición 1.3.2. *Una función f en un espacio de Banach de funciones medibles $\mathcal{X}$ se dice que tiene* norma absolutamente continua *en $\mathcal{X}$ si, para toda sucesión de conjuntos $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisface $E_n \to \emptyset$ μ-c.t.p., tenemos $\left\|f\chi_{E_n}\right\|_{\mathcal{X}} \to 0$. Denotamos por*

$$\mathcal{X}_a := \{f \in \mathcal{X} : f \text{ tiene norma absolutamente continua en } \mathcal{X}\}\,.$$

Cuando $\mathcal{X}_a = \mathcal{X}$, decimos que el espacio $\mathcal{X}$ tiene norma absolutamente continua.

Ejemplo 1.3.1. Los espacios de Lebesgue L^p tienen norma absolutamente continua cuando $1 \leqslant p < \infty$, pues heredan la propiedad de la continuidad absoluta de la integral de Lebesgue. El caso $p = \infty$ es de naturaleza distinta pues su norma no proviene de una integral y la situación depende de la estructura de la medida, véase Ejercicio 1.3.1.

EJERCICIO 1.3.1. Demuestre que, si $(\mathcal{X}, \mu)$ es no-atómico, entonces $(L^\infty)_a = \{\text{función cero}\}$.

Lema 1.3.1. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS y sea $f \in \mathcal{X}$. Entonces f tiene norma absolutamente continua si y solamente si*

$$\left\|f\chi_{E_n}\right\|_{\mathcal{X}} \downarrow 0 \qquad (1.9)$$

para toda sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $E_n \downarrow \emptyset$ μ-c.t.p..

Demostración. Demostremos la parte "si". Supongamos que $f \in \mathcal{X}$ satisface (1.9) y sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$ una sucesión tal que $F_n \to \emptyset$ μ-c.t.p.. Para $n \in \mathbb{N}$, definimos $E_n := \cup_{m=n}^{\infty} F_m$. Entonces la sucesión $\{E_n\}$ es decreciente y satisface $\limsup_{n\to\infty} F_n = \limsup_{n\to\infty} E_n$. Como $\limsup_{n\to\infty} F_n$ es un conjunto de medida cero, tenemos que lo mismo pasa con $\limsup_{n\to\infty} E_n$ y además $E_n \supset E_{n+1}$. Por (1.9) tenemos $\left\|f\chi_{E_n}\right\|_{\mathcal{X}} \downarrow 0$. Por la inclusión $F_n \subset E_n$ para todo n tenemos que $\left\|f\chi_{F_n}\right\|_{\mathcal{X}} \to 0$. La parte "solamente si" es inmediata. □

Lema 1.3.2. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS y $f \in \mathcal{X}$. Entonces $f \in \mathcal{X}_a$ si y solamente si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $E \subset \Omega$ con $\mu(E) < \delta$ implica $\|f\chi_E\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon$.*

EJERCICIO 1.3.2. Demuestre el Lema 1.3.2.

Teorema 1.3.1. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS y $f \in \mathcal{X}$. Entonces $f \in \mathcal{X}_a$ si y solamente si, para toda sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $f_n \leqslant |f|$ y $f_n \downarrow 0$ μ-c.t.p., tenemos que $\|f_n\|_{\mathcal{X}} \downarrow 0$.*

Demostración. Tomando $f_n = f\chi_{E_n}$ la implicación ($\Leftarrow$) es inmediata. Para demostrar la implicación contraria, supongamos que $f \in \mathcal{X}_a$ y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que satisface $|f| \geqslant f_n$ y $f_n \downarrow 0$ μ-c.t.p. en Ω. Sea $\varepsilon > 0$ y $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión fija de conjuntos de Ω que satisface $0 < \mu(\Omega) < \infty$ y $\cup_{k=1}^{\infty} R_k = \Omega$. Definamos $Q_k := \Omega \backslash R_k$, $k \in \mathbb{N}$. Como $f \in \mathcal{X}_a$, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, con $k \geqslant k_0$, tenemos $\|f\chi_{Q_k}\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon/2$. Fijemos ahora $k \geqslant k_0$ y sea $\alpha := \varepsilon/4\left\|\chi_{R_k}\right\|_{\mathcal{X}}$ y $E_n := \big\{x \in R_k : f_n(x) > \alpha\big\}$, entonces $\lim_{k\to\infty} \mu(E_k) = 0$ pues $f_n \downarrow 0$ μ-c.t.p. en Ω y R_k tiene medida finita. Por lo tanto, por el Lema 1.3.2, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\mathbb{N} \ni n \geqslant n_0$ tenemos que $\left\|f\chi_{E_n}\right\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon/4$. Por último, para tal n obtenemos

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{X}} &\leqslant \left\|f_n\chi_{Q_k}\right\|_{\mathcal{X}} + \left\|f_n\chi_{R_k}\right\|_{\mathcal{X}} \\
&\leqslant \left\|f_n\chi_{Q_k}\right\|_{\mathcal{X}} + \left\|f_n\chi_{E_n}\right\|_{\mathcal{X}} + \left\|f_n\chi_{R_k\backslash E_n}\right\|_{\mathcal{X}} \\
&\leqslant \left\|f\chi_{Q_k}\right\|_{\mathcal{X}} + \left\|f\chi_{E_n}\right\|_{\mathcal{X}} + \alpha\left\|\chi_{R_k\backslash E_n}\right\|_{\mathcal{X}} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

y la prueba termina. □

Teorema 1.3.2. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS y $f \in \mathcal{X}$. Entonces $f \in \mathcal{X}_a$ si y solamente si, para toda sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y toda $g \in \mathcal{X}$, tal que $f_n \to g$ μ-c.t.p., tenemos*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_{\mathcal{X}} = 0.$$

Demostración. La implicación ($\Leftarrow$) es inmediata tomando $f_n = f\chi_{E_n}$ y $g \equiv 0$.
Para demostrar la implicación contraria, supongamos que $f \in \mathcal{X}_a$ y sea la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ con la propiedad $|f| \geqslant |f_n|$ y $f_n \to g$ μ-c.t.p. en Ω. Sea $h_n(x) := \sup_{m\geqslant n} |f_m(x)| - g(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces $2|f| \geqslant h_n \downarrow 0$ μ-c.t.p. en Ω. Por el Teorema 1.3.1 obtenemos que $\|h_n\|_{\mathcal{X}} \downarrow 0$. Así tenemos que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_{\mathcal{X}} = 0$, pues $\|f_n - g\|_{\mathcal{X}} \leqslant \|h_n\|_{\mathcal{X}}$. $\square$

Definición 1.3.3. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS y sea $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ un subespacio lineal cerrado de $\mathcal{X}$. Decimos que $\mathcal{Y}$ es* ideal *en $\mathcal{X}$ cuando para todo $f \in \mathcal{Y}$ y para todo $g \in \mathcal{M}$, $|g| \leqslant |f|$ μ-c.t.p. se tiene que $g \in \mathcal{Y}$.*

Teorema 1.3.3. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS. Entonces el espacio $\mathcal{X}_a$ es un ideal en $\mathcal{X}$.*

Demostración. La inclusión $\mathcal{X}_a \subset \mathcal{X}$ es inmediata. También es inmediato que si $f \in \mathcal{X}_a$ y $g \in \mathcal{M}$ con $|g| \leqslant |f|$ μ-c.t.p., entonces obtenemos que $g \in \mathcal{X}_a$. Solo necesitamos demostrar que $\mathcal{X}_a$ es cerrado en $\mathcal{X}$.
Supongamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones en $\mathcal{X}_a$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{X}} = 0$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, obtenemos $\|f_n - f\|_{\mathcal{X}} \leqslant \varepsilon/2$. Sea $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos μ-medibles de Ω tal que $E_k \downarrow \emptyset$ μ-c.t.p. cuando $k \to \infty$. Sea $n \geqslant n_0$. Como $f_n \in \mathcal{X}_a$, entonces existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant k_0$, $\left\| f_n\chi_{E_k} \right\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon/2$. Cuando $k \geqslant k_0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\| f\chi_{E_k} \right\|_{\mathcal{X}} &\leqslant \left\| (f - f_n)\chi_{E_k} \right\|_{\mathcal{X}} + \left\| f_n\chi_{E_k} \right\|_{\mathcal{X}} \\
&\leqslant \|f - f_n\|_{\mathcal{X}} + \left\| f_n\chi_{E_k} \right\|_{\mathcal{X}} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

De la desigualdad anterior obtenemos que $\lim_{k\to\infty} \left\| f\chi_{E_k} \right\|_{\mathcal{X}} = 0$ y así $f \in \mathcal{X}_a$, lo que demuestra que $\mathcal{X}_a$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{X}$. $\square$

Corolario 1.3.1. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS y $f \in \mathcal{X}_a$. Supongamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}$ es una sucesión de funciones en $\mathcal{X}$ tal que $0 \leqslant f_n \uparrow f$ μ-c.t.p. en Ω. Entonces $\|f - f_n\|_{\mathcal{X}} \to 0$.*

Definición 1.3.4. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS y sea $\mathcal{S}$ el conjunto de funciones simples. Denotamos por $\mathcal{X}_b$ la clausura de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{X}$.*

Teorema 1.3.4. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS. Entonces*

$$\mathcal{X}_b = \overline{\big\{f \in \mathcal{X} : f \text{ es acotada con } \mu(\operatorname{supp} f) < \infty\big\}},$$

donde la clausura se entiende en la topología de la norma del espacio $\mathcal{X}$.

Demostración. Solamente la inclusión $(\supset)$ necesita de prueba. Sea f una función acotada en Ω tal que $\mu\,(\operatorname{supp} f) < \infty$. Supongamos primero que $f \geqslant 0$. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones simples en Ω tal que $\operatorname{supp} f_n = \operatorname{supp} f$ y f_n converge uniformemente a la función f. Entonces $\|f_n - f\|_{\mathcal{X}} = \Big\|(f_n - f)\chi_{\operatorname{supp} f}\Big\|_{\mathcal{X}} \leqslant \|f_n - f\|_{\infty}\Big\|\chi_{\operatorname{supp} f}\Big\|_{\mathcal{X}}$. De la propiedad (P4) de $\mathcal{X}$ y del hecho que $\mu(\operatorname{supp} f) < \infty$ obtenemos que $\Big\|\chi_{\operatorname{supp} f}\Big\|_{\mathcal{X}} < \infty$; por lo tanto, $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{\mathcal{X}} = 0$, lo que termina la demostración. $\square$

Teorema 1.3.5. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS. Entonces $\mathcal{X}_b$ es un ideal en $\mathcal{X}$ y tenemos las inclusiones $\mathcal{X}_a \subset \mathcal{X}_b \subset \mathcal{X}$.*

Demostración. El conjunto $\mathcal{X}_b$ es cerrado en $\mathcal{X}$ por definición. Supongamos que $f \in \mathcal{X}_b$ y $g \in \mathcal{M}_0(\Omega)$, $|g| \leqslant |f|$ μ-c.t.p. en Ω. Supongamos además que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones simples en Ω tal que $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{\mathcal{X}} = 0$. Definimos, para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \Omega$, $g_n(x) := \operatorname{sign}(g(x)) \min\big\{|f_n(x)|, |g(x)|\big\}$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, g_n es acotada en Ω y $\mu(\operatorname{supp} f_n) < \infty$. Además, $|g - g_n| = \max\big\{|g| - |f_n|, 0\big\} \leqslant ||f| - |f_n|| \leqslant |f - f_n|$, por ende $\|g - g_n\|_{\mathcal{X}} \leqslant \|f - f_n\|_{\mathcal{X}} \to 0$. Por el Teorema 1.3.4 la función $g \in \mathcal{X}_b$, i.e., $\mathcal{X}_b$ es un ideal de $\mathcal{X}$. Por último, sea $f \in \mathcal{X}_a$ y $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos μ-medibles de Ω de medida finita. Entonces, por el Teorema 1.3.4, las funciones f_k definidas para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \Omega$ como $f_k(x) := \operatorname{sign}(f(x)) \min\Big\{|f(x)|, k\chi_{R_k}(x)\Big\}$, satisfacen que $f_k \in \mathcal{X}_b$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ μ-c.t.p. en Ω. Por el Teorema 1.3.2 obtenemos que $\lim_{k\to\infty}\|f_k - f\|_{\mathcal{X}} = 0$. Como $\mathcal{X}_b$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{X}$ se sigue que $f \in \mathcal{X}_b$, lo que establece la inclusión $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_b$. $\square$

Teorema 1.3.6. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS. Entonces $\mathcal{X}_b$ es isometricamente isomorfo a un subespacio fundamental-norma de $(\mathcal{X}')^*$.*

Demostración. Por el Teorema 1.2.7 tenemos que $\left(\mathcal{X}'\right)'$ es isometricamente isomorfo a un subconjunto cerrado de $\left(\mathcal{X}'\right)^*$. Como $\mathcal{X}_b$ es también un subespacio lineal cerrado de $\mathcal{X}'' = \mathcal{X}$, lo mismo es válido para $\mathcal{X}_b$; es decir, $\mathcal{X}_b$ es isometricamente isomorfo a un subespacio cerrado de $\left(\mathcal{X}'\right)^*$. Solo es necesario demostrar que es fundamental-norma. Sea $g \in \mathcal{X}'$ y $\varepsilon > 0$, entonces por la definición de espacio asociado existe una función $f \in \mathcal{X}$ con $\|f\|_{\mathcal{X}} \leqslant 1$ tal que $\|g\|_{\mathcal{X}'} \leqslant \int_\Omega |fg| \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon$. Para $k \in \mathbb{N}$, tomemos $\{R_k\}$ una sucesión creciente de conjuntos de medida finita cuya unión es Ω y $f_k := \text{mín}\left\{|f|, k\right\} \chi_{R_k}$, además consideremos $B = \left\{h \in \mathcal{X}_b : \|h\|_{\mathcal{X}} \leqslant 1\right\}$. Por el Teorema 1.3.4 tenemos que $f_k \in B$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $0 \leqslant f_k \uparrow |f|$, por el Teorema de Convergencia Monótona obtenemos

$$\|g\|_{\mathcal{X}'} \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega |f_k g| \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon \leqslant \sup_{h\in B} \int_\Omega |hg| \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario obtenemos $\|g\|_{\mathcal{X}'} \leqslant \sup_{h\in B} \int_\Omega |hg| \,\mathrm{d}\mu$, pero la desigualdad contraria es una consecuencia de la desigualdad de Hölder, así$\|g\|_{\mathcal{X}'} = \sup_{h\in B} \int_\Omega |hg| \,\mathrm{d}\mu$. Como $\mathcal{X}_b$ es un ideal, entonces utilizando el Teorema 1.2.6 obtenemos finalmente que $\|g\|_{\mathcal{X}'} = \left|\sup_{h\in B} \int_\Omega hg \,\mathrm{d}\mu\right|$. $\square$

Teorema 1.3.7. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS. Entonces $\mathcal{X}_a = \mathcal{X}_b$ si y solamente si $\chi_E \in \mathcal{X}_a$ para todo conjunto $E \subset \Omega$ de medida finita.*

Demostración. Para probar la implicación ($\Leftarrow$) supongamos que $E \subset \Omega$ con $\mu(E) < \infty$. Entonces, por el Teorema 1.3.5, obtenemos que $\chi_E \in \mathcal{X}_b \subset \mathcal{X}_a$. Para la implicación contraria, supongamos que $\chi_E \in \mathcal{X}_a$ para todo conjunto $E \subset \Omega$ de medida finita, esto significa que $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}_a$. Pero como $\mathcal{X}_a$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{X}$ por el Teorema 1.3.3, entonces $\mathcal{X}_b \subset \mathcal{X}_a$. Tomando ahora el Teorema 1.3.5 en consideración, la igualdad $\mathcal{X}_a = \mathcal{X}_b$ queda probada. $\square$

1.4. Dualidad, reflexividad y separabilidad

El siguiente teorema es citado sin prueba, para una demostración una véase [13].

Teorema 1.4.1. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS y $\mathcal{Y}$ un ideal de $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{S} \subset \mathcal{Y}$. Entonces $\mathcal{Y}^* = \mathcal{X}'$ si y solamente si $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}_a$.*

Corolario 1.4.1. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS y sea $\mathcal{Y}$ un ideal de $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{S} \subset \mathcal{Y}$. Entonces $\mathcal{Y} = \mathcal{X}_a = \mathcal{X}_b$.*

Demostración. Como $\mathcal{S} \subset \mathcal{Y}$ y $\mathcal{Y}$ es cerrado, tenemos $\mathcal{X}_b \subset \mathcal{Y} \subset \mathcal{X}_a \subset \mathcal{X}_b$, lo que demuestra el corolario. □

Corolario 1.4.2. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS tal que $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}_a$. Entonces $(\mathcal{X}_a)^* = \mathcal{X}'$.*

Demostración. Sea $\mathcal{Y} = \mathcal{X}_a$. Entonces $\mathcal{Y}$ es un ideal en $\mathcal{X}$ por el Corolario 1.3.1. Como $\mathcal{S} \subset \mathcal{Y}$, el resultado es consecuencia del Teorema 1.4.1. □

El siguiente corolario es muy importante pues caracteriza los espacios para los cuales el espacio asociado coincide con el espacio dual.

Corolario 1.4.3. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS. Entonces $\mathcal{X}^* = \mathcal{X}'$ si y solamente si $\mathcal{X} = \mathcal{X}_a$.*

Demostración. El resultado es consecuencia del Teorema 1.4.1 aplicado a $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$. □

Corolario 1.4.4. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS. Entonces $\mathcal{X}$ es reflexivo si y solamente si $\mathcal{X} = \mathcal{X}_a$ y $\mathcal{X}' = (\mathcal{X}_a)'$.*

Dado que las demostraciones de los siguientes resultados son demasiado técnicas, vamos solamente a citar los resultados, para las respectivas pruebas, véase [13].

Definición 1.4.1. *Una medida μ es* separable *si el espacio métrico (completo) $(\mathcal{A}, d)$ es separable, donde $\mathcal{A}$ es la colección de las clases de equivalencia de todos los subconjuntos de Ω de medida finita (dos elementos A y B están en la misma clase si $\mu(A \backslash B) = 0$). La métrica viene dada por:*

$$d(E,F) = \int\limits_{\Omega} |\chi_E - \chi_F| \, \mathrm{d}x.$$

Teorema 1.4.2. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS sobre (Ω, μ) y sea $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ un ideal en $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{S} \subset \mathcal{Y}$. Entonces $\mathcal{Y}$ es separable si y solamente si $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_a$ y μ es una medida separable.*

Teorema 1.4.3. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS sobre (Ω, μ). Entonces $\mathcal{X}$ es separable si y solamente si $\mathcal{X} = \mathcal{X}_a$ y μ es una medida separable.*

Teorema 1.4.4. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS y sea $\mathcal{X}_a = \mathcal{X}_b$. Entonces $\mathcal{X}_a$ es separable si y solamente si μ es separable.*

Teorema 1.4.5. *Sea $\mathcal{X}$ un BFS tal que $\mathcal{X}^*$ es separable. Entonces $\mathcal{X}$ es reflexivo.*

1.5. Notas y referencias bibliográficas

El estudio de espacios de Banach (de funciones medibles) empezó de una manera más formal en los años cincuenta con los escritos de Ellis y Halperin [41], de Luxemburg [92] y de Zaanen [139]. La introducción de (P3) y (P4) es debida a Zaanen, mientras que normas definidas utilizando función norma con (P1) y (P2) y otras propiedades empezaron con Ellis Y Halperin [41].
El contenido de este capítulo está basado en [13] y [92]. Las pruebas de los resultados aquí presentadas no difieren de las originales.

Capítulo 2

Espacios de Lebesgue con exponente variable

En este capítulo vamos a estudiar algunos conceptos básicos de los espacios de Lebesgue con exponente variable, equiparemos estos espacios con diferentes normas equivalentes lo que nos permite mostrar estos conceptos de forma más amplia. En el trascurso del capítulo deduciremos, mediante una serie de ejercicios y observaciones, que los espacios de Lebesgue con exponente variable son un BFS, y veremos como algunas propiedades se desprenden de los resultados del Capítulo 1.
Primero, recordemos que en el caso de los espacios de Lebesgue con exponente constante, definimos para $p \in (0, \infty)$ el espacio $\mathcal{L}^p(\Omega)$ como

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f : f \text{ es medible y } \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty \right\},$$

el cual es un espacio vectorial pues $|x+y|^p \leqslant |x|^p + |y|^p$ si $p \leqslant 1$ y $|x+y|^p \leqslant 2^{p-1} \left(|x|^p + |y|^p \right)$ si $p \geqslant 1$. Definiendo

$$\mathcal{N} := \{ f : f \text{ es medible y } f = 0 \text{ c.t.p.} \}$$

el espacio $L^p(\Omega)$ se define como el *espacio cociente*

$$L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega) / \mathcal{N},$$

y se puede introducir una norma en $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, de la siguiente manera:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}. \tag{2.1}$$

EJERCICIO 2.0.1. Demuestre que el funcional $f \mapsto \|f\|_{L^p(\Omega)}$ no es una norma cuando $0 < p < 1$.

2.1. Espacios de Lebesgue

La primera tarea es definir el *espacio de Lebesgue con exponente variable* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ de manera apropiada y después intentar normar el espacio, ya que cambiar el exponente p en (2.1) por una función $p(x)$ no tiene sentido.
Por $\mathcal{P}(\Omega)$ denotaremos a la familia de todas las funciones medibles $p : \Omega \longrightarrow [1, \infty]$. Para $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ definimos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} \Omega_1(p) &:= \Omega_1 = \{x \in \Omega : p(x) = 1\}, \\ \Omega_\infty(p) &:= \Omega_\infty = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}, \\ \Omega_+(p) &:= \Omega_* = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < \infty\}. \end{aligned}$$

Definición 2.1.1. *Por* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *denotamos el* espacio de Lebesgue con exponente variable *como el conjunto de las funciones medibles* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$\rho_{p(\cdot)}(f) := \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}x < \infty$$

y

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega_\infty} |f(x)| < \infty,$$

donde la función medible $p : \Omega \longrightarrow (0, \infty]$ *se llama el* exponente variable.

EJERCICIO 2.1.1. Demuestre que, bajo las condiciones de la Definición 2.1.1, la función $g(x) := |f(x)|^{p(x)}$ es una función medible.

Para la función exponente p definimos los siguientes números

$$p_-(\Omega) = p_- := \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega_*} p(x), \quad p_+(\Omega) = p_+ := \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_*} p(x) \tag{2.2}$$

si $|\Omega_*| > 0$, mientras que $p_- = p_+ = 1$ si $|\Omega_*| = 0$. Para $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ definimos el *exponente dual* o *exponente conjugado* como

$$p'(x) = \begin{cases} \infty, & x \in \Omega_1 \\ \frac{p(x)}{p(x)-1}, & x \in \Omega_*, \\ 1 & x \in \Omega_\infty \end{cases}$$

lo que implica la igualdad puntual

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1.$$

Si una función medible $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow [1, \infty)$ satisface

$$1 < p_-, \quad p_+ < \infty, \tag{2.3}$$

entonces la función

$$p'(x) := \frac{p(x)}{p(x) - 1}$$

está bien definida y también satisface (2.3).

EJERCICIO 2.1.2. Demuestre las siguientes relaciones:

(a) $\big(p'(\cdot)\big)_+ = (p_-)'$;

(b) $\big(p'(\cdot)\big)_- = (p_+)'$.

Introducimos ahora una topología natural en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ definida por la convergencia

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty} |f_m(x) - f(x)|^{p(x)}\, \mathrm{d}x + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_\infty} |f_m(x) - f(x)| \; < \; \varepsilon. \tag{2.4}$$

En el caso $p_+ < \infty$ definimos la métrica $d : L^{p(\cdot)}(\Omega) \times L^{p(\cdot)}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty)$ por

$$d(f,g) = \left\{ \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty} |f(x) - g(x)|^{p(x)}\, \mathrm{d}x \right\}^{1/p_1} + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_\infty} |f(x) - g(x)|$$

con $p_1 = \text{máx}\{p_+, 1\}$. Usaremos la siguiente notación

$$\delta_{p(\cdot)}(f) = d(f, 0). \tag{2.5}$$

EJERCICIO 2.1.3. Demuestre que d es una métrica en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Lema 2.1.1. *El espacio topológico definido por* (2.4) *es lineal si y solamente si* $p_+ < \infty$ *y en este caso* $d(f, g)$ *es una métrica en este espacio.*

Demostración. NECESIDAD. Supongamos que $p_+ = \infty$. Mostraremos entonces que existe una función $f_0 \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que $2f_0 \notin L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Sea $A_m = \{x \in \Omega\backslash\Omega_\infty : m - 1 \leqslant p(x) \leqslant m\}$. Como $p_+ = \infty$, existe una sucesión $m_k \to \infty, k = 1, 2, 3, ...,$ tal que $|A_{m_k}| > 0$. Construimos la función f_0 como una función simple; i.e., $f_0(x) = c_m$ para $x \in A_m$, donde c_m está determinada por la relación

$$\int\limits_{A_m} c_m^{p(x)}\, \mathrm{d}x = m^{-2}.$$

Esto determina c_m unívocamente si $|A_m| \neq 0$, pues el lado izquierdo es creciente con respecto a c_m. Entonces

$$\rho_{p(\cdot)}(f_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{A_m} c_m^{p(x)}\, \mathrm{d}x = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} < \infty$$

por lo tanto $f_0 \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Sin embargo,

$$\begin{aligned}\rho_{p(\cdot)}(2f_0) &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_{m_k}} (2c_{m_k})^{p(x)}\, \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{m_k-1} \int\limits_{A_{m_k}} c_{m_k}^{p(x)}\, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{m_k-1} m_k^{-2} = \infty,\end{aligned}$$

lo que implica que $2f_0 \notin L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

SUFICIENCIA. Sea $p_+ < \infty$. Entonces, $\rho_{p(\cdot)}(cf) \leqslant \text{máx}\{|c|^{p_+}, 1\}\rho_{p(\cdot)}(f)$ y $\rho_{p(\cdot)}(f+g) \leqslant 2^{p_+}[\rho_{p(\cdot)}(f) + \rho_{p(\cdot)}(g)]$ para toda función f y g en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Ahora es suficiente mostrar que $d(f+g,0) \leqslant d(f,0)+d(g,0)$ o

$$\left\{ \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty} |f(x)+g(x)|^{p(x)}\,\mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{p_1}}$$
$$\leqslant \left\{ \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)}\,\mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{p_1}} + \left\{ \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty} |g(x)|^{p(x)}\,\mathrm{d}x \right\}^{1/p_1}.$$

Para obtener la desigualdad anterior es suficiente utilizar la desigualdad $|f(x)+g(x)|^{p(x)/p_1} \leqslant |f(x)|^{p(x)/p_1} + |g(x)|^{p(x)/p_1}$ y después utilizar la desigualdad de Minkowski con los exponentes constantes $p_1 \geqslant 1$. Esto demuestra el lema. □

Lema 2.1.2. *Sea $p_+ < \infty$. Entonces $\mathcal{S} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Demostración. Sea $f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{\Omega_k}(x) \in \mathcal{S}$. Entonces

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Omega_k} |c_k|^{p(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{N} \text{máx}\{1, |c_k|^{p_+}\}|\Omega_k| < \infty. \qquad \square$$

2.1.1. Norma de tipo Luxemburg-Nakano

Por lo anterior ya tenemos que $L^{p(\cdot)}$ es un espacio topológico lineal si y sólo si $p_+ < \infty$ y es además un espacio metrizable. Ahora queremos introducir una norma en el espacio. Este tipo de norma se llama comúnmente *norma de Luxemburg* o *norma de Luxemburg-Nakano*, pero en realidad es basada en un teorema de Kolmogorov de normar espacios topológicos, véase [78], por lo tanto algunos autores la llaman *norma de Kolmogorov-Minkowski.*

Lema 2.1.3. *Sea $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $0 \leqslant p(x) \leqslant \infty$. La función*

$$F(\lambda) := \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right), \lambda > 0, \tag{2.6}$$

toma valores finitos para todo $\lambda \geqslant 1$. Además, es continua, decreciente y $\lim_{\lambda\to\infty} F(\lambda) = 0$. Si $p_+ < \infty$, lo mismo pasa para todo $\lambda > 0$.

Demostración. Es claro que $F(1) < \infty$. Decreciente es también obvio. Entonces $F(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda \geqslant 1$. La continuidad es directa

$$|F(\lambda) - F(\lambda_0)| \leqslant \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} |\lambda^{-p(x)} - \lambda_0^{-p(x)}| \, \mathrm{d}x \qquad (2.7)$$

donde la posibilidad de cambiar el limite dentro de la integral se justifica con el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, pues $\lambda^{-p(x)} \leqslant 1$ para $\lambda \geqslant 1$. Finalmente, $\lim_{\lambda\to\infty} F(\lambda) = 0$ por el mismo Teorema de Convergencia Dominada. Si $p_+ < \infty$, para $\lambda < 1$ tenemos que $F(\lambda) \leqslant F(1)\lambda^{-p_+} < \infty$. La continuidad también sigue de (2.7) pues $\lambda^{-p(x)} \leqslant c\lambda_0^{-p_+}$ para λ cercano a λ_0. $\square$

Teorema 2.1.1. *Sea* $0 \leqslant p(x) \leqslant \infty$. *Para cualquier* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *el funcional*

$$\|f\|_{(p)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} \mathrm{d}x \leqslant 1 \right\} \qquad (2.8)$$

toma valores finitos y

$$\rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\|f\|_{(p)}} \right) \leqslant 1 \, , \quad \|f\|_{(p)} \neq 0. \qquad (2.9)$$

Si $p_+ < \infty$ *o* $\|f\|_{(p)} \geqslant 1$, *entonces*

$$\rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\|f\|_{(p)}} \right) = 1 \quad , \; \|f\|_{(p)} \neq 0. \qquad (2.10)$$

Finalmente, si $1 \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty$, $x \in \Omega\setminus\Omega_\infty$, *entonces*

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \|f\|_{(p)} + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_\infty} |f(x)| \qquad (2.11)$$

es una norma en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Demostración. Por el Lema 2.1.3 tenemos que $\|f\|_{(p)}$ es finita para $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y (2.9)-(2.10) se derivan directamente de la definición (2.8). Para demostrar que (2.11) es una norma, es suficiente mostrar que satisface la desigualdad triangular para $\|f\|_{(p)}$, la cual es inmediata por la desigualdad

$$|\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2|^p \leqslant \lambda |y_1|^p + (1-\lambda)|y_2|^p \ , \ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \ p \geqslant 1. \quad (2.12)$$

□

EJERCICIO 2.1.4. Demuestre directamente de (2.8) que $\|\alpha f\|_{(p)} = |\alpha| \|f\|_{(p)}$.

Corolario 2.1.1. *El funcional* (2.8) *satisface las siguientes estimativas*

$$\left(\frac{\|f\|_{(p)}}{\lambda} \right)^{p_+} \leqslant \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leqslant \left(\frac{\|f\|_{(p)}}{\lambda} \right)^{p_-} \ , \ \lambda \geqslant \ \|f\|_{(p)}, \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{\|f\|_{(p)}}{\lambda} \right)^{p_-} \leqslant \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leqslant \left(\frac{\|f\|_{(p)}}{\lambda} \right)^{p_+} \ , \ 0 < \lambda \leqslant \ \|f\|_{(p)}, \quad (2.14)$$

donde los casos $p_- = 0$ o $p_+ = \infty$ son admitidos.

Demostración. Reescribamos (2.13) y (2.14) como

$$\lambda^{p_+} \leqslant \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{\lambda}{\|f\|_{(p)}} f \right) \leqslant \lambda^{p_-} \ , \ 0 < \lambda \leqslant 1 \quad (2.15)$$

$$\lambda^{p_-} \leqslant \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{\lambda}{\|f\|_{(p)}} f \right) \leqslant \lambda^{p_+} \ , \ \lambda \geqslant 1 \quad (2.16)$$

entonces (2.15) y (2.16) son una consecuencia de (2.10) si $p_+ < \infty$ o $p_+ = \infty$ pero $\|f\|_{(p)} \geqslant 1$. Si $p_+ = \infty$ y $\|f\|_{(p)} \leqslant 1$, el lado derecho de la desigualdad en (2.15) es una consecuencia de (2.9), y el lado izquierdo de (2.16) sale de $\|g\|_{(p)} = \lambda \geqslant 1$ para $g(x) = \lambda f(x)/\|f\|_{(p)}$. □

Corolario 2.1.2. *Para toda función p, $0 \leqslant p_- \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty$, $x \in \Omega \backslash \Omega_\infty$, tenemos las siguientes estimativas*

$$\|f\|_{(p)}^{p_+} \leqslant \rho_{p(\cdot)}(f) \leqslant \|f\|_{(p)}^{p_-} \ , \ \|f\|_{(p)} \ \leqslant \ 1, \quad (2.17)$$

$$\|f\|_{(p)}^{p_-} \leqslant \rho_{p(\cdot)}(f) \leqslant \|f\|_{(p)}^{p_+} \ , \ \|f\|_{(p)} \ \geqslant \ 1. \quad (2.18)$$

Observación 2.1.1. El Corolario 2.1.2 nos dice que, en cuestiones de convergencia, $\rho_{p(\cdot)}(\cdot)$ y $\|\cdot\|_{(p)}$ son equivalentes. Esta observación es muy importante pues calcular explícitamente la norma es imposible, excepto en casos triviales.

Corolario 2.1.3. *Sea E un conjunto medible en $\Omega\backslash\Omega_\infty$ y sea χ_E la función característica de E. Si $0 < p_- \leqslant p_+ < \infty$ tenemos*

$$|E|^{1/p_-} \leqslant \|\chi_E\|_{(p)} \leqslant |E|^{1/p_+},$$

cuando $|E| \geqslant 1$. En el caso $|E| \leqslant 1$, los signos de la desigualdad son opuestos. De lo anterior tenemos que $\|\chi_E\|_{(p)} = 1$ es equivalente a $|E| = 1$.

Observación 2.1.2. Un ejemplo que ilustra (2.9) en vez de (2.10) es el siguiente:

$$\Omega = [0,1], \quad p(x) = \frac{1}{x}\ , \quad \Omega_\infty = \{0\}, \ f(x) = 4^{-x}x^{-x/2}.$$

Tenemos $\|f\|_{(p)} = \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = 1$, pues $F(1) = \int_0^1 |f(x)|^{p(x)}\,\mathrm{d}x < 1$, pero $F(\lambda) \equiv \infty$ para todo $\lambda < 1$.

Observación 2.1.3. El espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es *ideal*; es decir, es un espacio completo y que la desigualdad $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ implica $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \|g\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ (la completitud del espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ será demostrada en §2.3).

Observación 2.1.4. Sea $1 \leqslant p(x) \leqslant \infty$ tal que $p_+ < \infty$. La semi-norma $\|f\|_{(p)}$ puede ser representada en la forma

$$\|f\|_{(p)} = \int\limits_{\Omega\backslash\Omega_\infty} \varphi_0(x) f(x)\,\mathrm{d}x\ , \ \varphi_0(x) \in L^{p'(\cdot)}(\Omega) \tag{2.19}$$

donde $\varphi_0(x) = \left|\frac{f(x)}{\|f\|_{(p)}}\right|^{p(x)-1} \frac{f(x)}{|f(x)|}$, $x \notin \Omega_\infty$ y $\|\varphi_0\|_{(p')} \leqslant 1$. En realidad (2.19) es simplemente (2.10), la desigualdad $\|\varphi_0\|_{(p')} \leqslant 1$ se verifica directamente.

EJERCICIO 2.1.5. Demuestre que $\rho : \mathcal{M}_+(\Omega,\mu) \longrightarrow [0,\infty]$ es una función norma en el sentido de la Definición 1.1.1 cuando $1 < p_- \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty$, donde $\rho(f) = \|f\|_{(p)}$ es definido por la fórmula (2.8) y $|\Omega| < \infty$.

EJERCICIO 2.1.6. Bajo las condiciones del Ejercicio 2.1.5, muestre que $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es un BFS.

Lema 2.1.4. *Sea* $0 < p_- \leqslant p_+ \leqslant \infty$. *Si*

$$\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{a}\right) \ < \ b, \quad a > 0, \ b > 0, \tag{2.20}$$

entonces $\|f\|_{(p)} \leqslant ab^{\nu}$ *con* $\nu = 1/p_-$ *si* $b \geqslant 1$ *y* $\nu = 1/p_+$ *si* $b \leqslant 1$.

Demostración. Por (2.20) tenemos la desigualdad $\rho_{p(\cdot)}(f/(ab^{\nu})) \leqslant 1$, y por la definición (2.8) tenemos $\|f\|_{(p)} \leqslant ab^{\nu}$. □

Lema 2.1.5. *Sea* $0 < \gamma(x) \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty, \ x \in \Omega \backslash \Omega_\infty$. *Entonces*

$$\|f\|_{(p)}^{\gamma_-} \leqslant \|f^\gamma\|_{(\frac{p}{\gamma})} \leqslant \|f\|_{(p)}^{\gamma_+}, \ \|f\|_{(p)} \geqslant 1, \tag{2.21}$$

$$\|f\|_{(p)}^{\gamma_+} \leqslant \|f^\gamma\|_{(\frac{p}{\gamma})} \leqslant \|f\|_{(p)}^{\gamma_-}, \ \|f\|_{(p)} \leqslant 1, \tag{2.22}$$

donde $f^\gamma = |f(x)|^{\gamma(x)}$. *Si* p *y* γ *son funciones continuas, existe un punto* $x_0 \in \Omega\backslash\Omega_\infty$ *tal que*

$$\|f^\gamma\|_{(\frac{p}{\gamma})} \ = \ \|f\|_{(p)}^{\gamma(x_0)}. \tag{2.23}$$

Demostración. Sea $\lambda = \|f\|_{(p)}$, $\mu = \|f^\gamma\|_{(\frac{p}{\gamma})}$. Como $\Omega_\infty(\frac{p}{\gamma}) = \Omega_\infty(p)$, por (2.10) se tiene

$$\int\limits_{\Omega\backslash\Omega_\infty} \left|\frac{|f(x)|^{\gamma(x)}}{\mu}\right|^{\frac{p(x)}{\gamma(x)}} \mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega\backslash\Omega_\infty} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} \mathrm{d}x = 1.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} \frac{\lambda^{p(x)} - \mu^{\frac{p(x)}{\gamma(x)}}}{\lambda^{p(x)}\mu^{p(x)/\gamma(x)}} \,\mathrm{d}x \ = \ 0. \tag{2.24}$$

Supongamos que $\lambda \geqslant 1$. Demostraremos la desigualdad de la derecha en (2.21), i.e. $\mu \leqslant \lambda^{\gamma_+}$. Supongamos que $\mu > \lambda^{\gamma_+}$, entonces $\mu^{\frac{p(x)}{\gamma(x)}} > \lambda^{\frac{p(x)}{\gamma(x)}\gamma_+}$. Esto significa que el numerador en (2.24) es no-positivo en casi todo punto, lo cual es imposible. Una suposición semejante: $\mu < \lambda^{\gamma_-}$ produce

no-negatividad en el numerador, lo cual es imposible. El caso $\lambda \leqslant 1$ es similar.
Ahora, si p y γ son funciones continuas, entonces de (2.24) se sigue que el numerador de la fracción tiene que ser igual a cero en algún punto, lo que implica (2.23). $\square$

Corolario 2.1.4. *Sea* $0 \leqslant p_- \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty,\ x \in \Omega \backslash \Omega_\infty$. *Si* p *es una función continua en* $\Omega \backslash \Omega_\infty$, *existe un punto* $x_0 \in \Omega \backslash \Omega_\infty$ *(el cual depende de* f*) tal que*

$$\|f\|_{(p)} = \left\{ \int\limits_{\Omega \backslash \Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{p(x_0)}}. \tag{2.25}$$

Demostración. Tomando $\gamma(x) = p(x)$ la igualdad (2.23) se convierte en (2.25). $\square$

Definición 2.1.2. *Definimos el* espacio suma $L^p(\Omega) + L^q(\Omega)$ *como*

$$L^p(\Omega) + L^q(\Omega) := \left\{ f = g + h : g \in L^p(\Omega), h \in L^q(\Omega) \right\},$$

el cual es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)+L^q(\Omega)} = \inf_{f=g+h} \{ \|g\|_{L^p(\Omega)} + \|h\|_{L^q(\Omega)} \}.$$

El espacio intersección $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *se define de manera usual el cual es un espacio de Banach con la norma*

$$\|f\|_{L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)} = \max\{ \|f\|_{L^p(\Omega)}, \|f\|_{L^q(\Omega)} \}.$$

Vamos ahora a demostrar que el espacio de Lebesgue con exponente variable está embebido entre el espacio suma y el espacio intersección de los espacios L^{p_-} y L^{p_+}.

Lema 2.1.6. *Sea* $0 < p_- \leqslant p(x) \leqslant p_+ \leqslant \infty$, $x \in \Omega$, $|\Omega_\infty| = 0$. *Entonces*

$$L^{p_-}(\Omega) \cap L^{p_+}(\Omega) \subseteq L^{p(\cdot)}(\Omega) \subseteq L^{p_-}(\Omega) + L^{p_+}(\Omega). \tag{2.26}$$

Además,

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \max\{\|f\|_{p_-}, \|f\|_{p_+}\}.$$

Demostración. Tenemos

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int\limits_{|f(x)|\leqslant\lambda} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} \mathrm{d}x \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|f(x)|>\lambda} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} \mathrm{d}x \leqslant 1 \right\}.$$

Como

$$\text{ínf}\{\lambda > 0 : A(\lambda) + B(\lambda) \leqslant 1\}$$
$$\leqslant \text{máx}\left\{\text{ínf}\{\lambda > 0 : A(\lambda) \leqslant 1\}, \text{ínf}\{\lambda > 0 : B(\lambda) \leqslant 1\}\right\},$$

donde $A(\lambda) > 0, B(\lambda) > 0$. Obtenemos así $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \text{máx}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ donde

$$\lambda_1 = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int\limits_{|f(x)|\leqslant\lambda} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} \mathrm{d}x \leqslant 1\right\},$$

y

$$\lambda_2 = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int\limits_{|f(x)|>\lambda} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} \mathrm{d}x \leqslant 1\right\}.$$

Tenemos que $\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} \leqslant \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p_-}$ si $|f(x)| \leqslant \lambda$ y $\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} \leqslant \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p_+}$ si $|f(x)| \geqslant \lambda$ (el último caso cuando $p_+ < \infty$; la modificación para $p_+ = \infty$ es obvia). De las desigualdades anteriores obtenemos que $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \text{máx}\{\|f\|_{p_-}, \|f\|_{p_+}\}$ lo que demuestra la contención izquierda en (2.26). La contención derecha es inmediata: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ donde $f_1(x) = f(x)$ si $|f(x)| \leqslant 1$ y $f(x) = 0$ en caso contrario; $f_2(x) = f(x) - f_1(x)$. $\square$

El Lema 2.1.6 admite la siguiente generalización natural.

Lema 2.1.7. *Sea* $0 < p_1(x) \leqslant p(x) \leqslant p_2(x) \leqslant \infty$ *y* $|\Omega_\infty(p_2)| = 0$. *Entonces*

$$L^{p_1(\cdot)}(\Omega) \cap L^{p_2(\cdot)}(\Omega) \subseteq L^{p(\cdot)}(\Omega) \subseteq L^{p_1(\cdot)}(\Omega) + L^{p_2(\cdot)}(\Omega).$$

EJERCICIO 2.1.7. Demuestre el Lema 2.1.7.

Lema 2.1.8. *Sea $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ y sea p una función en Ω, $p(x) \geqslant 1$ y $p_+ < \infty$. Entonces*

$$\text{máx}\{\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_1)}, \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_2)}\} \leqslant \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_1)} + \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_2)} \tag{2.27}$$

para toda función $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Demostración. Tomemos $|\Omega_\infty| = 0$ por simplicidad. Sin pérdida de generalidad, sea $a = \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_1)}$, $b = \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_2)}$ y $a \geqslant b$. Tenemos que

$$\int\limits_{\Omega} \left|\frac{f(x)}{\text{máx}\{a,b\}}\right|^{p(x)} \mathrm{d}x \geqslant \int\limits_{\Omega_1} \left|\frac{f(x)}{a}\right|^{p(x)} \mathrm{d}x = 1.$$

Por lo tanto $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \geqslant \text{máx}\{a,b\}$.
Para demostrar la desigualdad del lado derecho, escribimos

$$\frac{f(x)}{a+b} = \frac{a}{a+b}\frac{\chi_1(x)f(x)}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{\chi_2(x)f(x)}{b}$$

donde $\chi_i(x)$ son las funciones características de los conjuntos $\Omega_i, i = 1, 2$. Utilizando (2.12) obtenemos que

$$\int\limits_{\Omega} \left|\frac{f(x)}{a+b}\right|^{p(x)} \mathrm{d}x \leqslant 1$$

lo que demuestra la desigualdad del lado derecho en (2.27).
En el caso $|\Omega_\infty| > 0$, los argumentos son semejantes si tomamos en cuenta el hecho de que el lema ya fue demostrado para la situación $\Omega\backslash\Omega_\infty = \Omega_1^* \cup \Omega_2^*$ donde $\Omega_i^* = \Omega_i\backslash\Omega_\infty$, $i = 1, 2$. □

EJERCICIO 2.1.8. Demuestre que

$$\|f\|^r_{L^{rp(\cdot)}(\Omega)} = \left\||f|^r\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \tag{2.28}$$

cuando r es constante y $1 \leqslant r < \infty$.

2.1.2. Otra versión de la norma de Luxemburg-Nakano

La norma de tipo Luxemburg-Nakano puede ser introducida directamente con respecto a todo el conjunto Ω

$$\|f\|_p^1 \;=\; \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \; + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_\infty}\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right| \;\leqslant\; 1\right\}, \tag{2.29}$$

la cual está bien definida para $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y cualquier exponente variable p con $0 \leqslant p(x) \leqslant \infty$. Es una norma si $1 \leqslant p(x) \leqslant \infty$, lo cual se puede demostrar de manera semejante al Teorema 2.1.1. De manera análoga a (2.10) se puede demostrar que

$$\int\limits_{\Omega\backslash\Omega_\infty} \left|\frac{f(x)}{\|f\|_p^1}\right|^{p(x)} \mathrm{d}x + \frac{\|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}}{\|f\|_p^1} \;=\; 1 \tag{2.30}$$

si $p_+ < \infty$ o $p_+ = \infty$, pero $\|f\|_p^1 \geqslant 1$.

Teorema 2.1.2. *Las normas* (2.11) *y* (2.30) *son equivalentes:*

$$\frac{1}{2}\;\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \|f\|_p^1 \leqslant \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \tag{2.31}$$

donde $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $1 \leqslant p(x) \leqslant \infty$, $p_+ < \infty$.

Demostración. La desigualdad del lado derecho es equivalente a la desigualdad $\text{ínf}\left\{\lambda > 0 : F(\lambda) + c/\lambda \leqslant 1\right\} \;\leqslant\; \lambda_0{+}c$, donde $F(\lambda)$ es definida por (2.6) y

$$c = \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}\;, \quad \lambda_0 = \|f\|_{(p)}.$$

Por lo tanto, es suficiente demostrar que $F(\lambda_0 + c) + \frac{c}{\lambda_0+c} \leqslant 1$, o en otras palabras: $F(\lambda_0 + c) \leqslant \frac{\lambda_0}{\lambda_0+c}$. Como $F(\lambda_0 + c) = \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\|f\|_{(p)}+c}\right)$, por (2.13) obtenemos que $F(\lambda_0 + c) \leqslant \frac{\|f\|_{(p)}}{\|f\|_{(p)}+c} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0+c}$.
El lado izquierdo de la desigualdad en (2.31) es una consecuencia de las desigualdades

$$\text{ínf}\left\{\lambda : F(\lambda) + \frac{c}{\lambda} \leqslant 1\right\} \geqslant \text{ínf}\left\{\lambda : F(\lambda) \leqslant 1\;\right\} = \lambda_0,$$

y

$$\text{ínf}\left\{\lambda : F(\lambda) + \frac{c}{\lambda} \leqslant 1\right\} \geqslant \text{ínf}\left\{\lambda : \frac{c}{\lambda} \leqslant 1\right\} = c,$$

puesto que la desigualdad del lado izquierdo no es menor que $\frac{\lambda_0+c}{2}$. $\square$

2.2. Desigualdad de Hölder y dualidad

Teorema 2.2.1 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sea* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $\varphi \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ *y* $1 \leqslant p(x) \leqslant \infty$. *Entonces*

$$\int_{\Omega} |f(x)\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant k\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \tag{2.32}$$

donde $k = \frac{1}{p_-} + \frac{1}{(p')_-} = \sup \frac{1}{p(x)} + \sup \frac{1}{p'(x)}$.

Demostración. Primero notemos que bajo las condiciones del teorema, los funcionales $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ y $\|\varphi\|_{p'(\cdot)}$ pueden no ser normas y las clases $L^{p(\cdot)}$ y $L^{p'(\cdot)}$ no son necesariamente lineales, pero estos funcionales siempre existen por el Teorema 2.1.1.
Para demostrar (2.32), utilizamos la desigualdad de Young

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \tag{2.33}$$

con $a > 0, b > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $1 < p < \infty$. La desigualdad (2.33) es válida para $p = 1$ en la forma $ab \leqslant \frac{a^p}{p}$ si $b \leqslant 1$ y para $p = \infty$ en la forma $ab \leqslant \frac{b^{p'}}{p'}$ si $a \leqslant 1$. Entonces tenemos

$$\left|\frac{f(x)\varphi(x)}{\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\|\varphi\|_{p'(\cdot)}}\right| \leqslant \frac{1}{p(x)}\left|\frac{f(x)}{\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}}\right|^{p(x)} + \frac{1}{p'(x)}\left|\frac{\varphi(x)}{\|\varphi\|_{p'(\cdot)}}\right|^{p'(x)},$$

donde $x \in \Omega\backslash\Omega_\infty(p) \cup \Omega_\infty(p')$, mientras que para $x \in \Omega_\infty(p)$ y $x \in \Omega_\infty(p')$ tenemos que omitir el primer y segundo término respectivamente en el lado derecho, pues $\left|\frac{f(x)}{\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}}\right| \leqslant 1$ para $x \in \Omega_\infty$ y $\left|\frac{\varphi(x)}{\|\varphi\|_{p'(\cdot)}}\right| \leqslant 1$ para $x \in \Omega_\infty(p')$. Integrando en todo Ω y estimando p y p', llegamos a (2.32). $\square$

EJERCICIO 2.2.1. Demuestre la desigualdad de Hölder generalizada

$$\int_{\Omega} |f_1(x)\cdots f_m(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant c\|f_1\|_{p^1(\cdot)}\cdots\|f_m\|_{p^m(\cdot)} \tag{2.34}$$

donde $p^1(x) \geqslant 1, \ldots, p^m(x) \geqslant 1$ y $\sum_{k=1}^m 1/p^k(x) \equiv 1$, $x \in \Omega$, y $c = \sum_{k=1}^m 1/p_-^k, p_-^k = \min_{x\in\Omega} p^k(x)$.
Sugerencia: Utilizar la desigualdad generalizada de Young $a_1\cdots a_m \leqslant \frac{a_1^{p^1}}{p^1} + \ldots + \frac{a_m^{p^m}}{p^m}$.

EJERCICIO 2.2.2. Demuestre la desigualdad

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\delta^{p_-}}{p_-}\rho_{p(\cdot)}(f) + \max\left\{\frac{1}{\delta^{(p_-)'}(p_-)'}, \frac{1}{\delta^{(p_+)'}(p_+)'}\right\}\rho_{p'(\cdot)}(g)$$

donde $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, $0 < \delta < 1$, $p_- > 1$ y $p_+ < \infty$.
Sugerencia: Utilizar la *desigualdad de Peter-Paul:* $ab \leqslant \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{b^q}{\varepsilon^q q}$ y la monotonía de la función $p \mapsto \delta^p/p$ cuando $p \geqslant 1$.

EJERCICIO 2.2.3. Si en lugar de (2.8) introducimos la semi-norma $\left|\|f\|\right|_{(p)}$ como

$$\left|\|f\|\right|_{(p)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\Omega\setminus\Omega_\infty} \frac{2}{p(x)}\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)}\mathrm{d}x \leqslant 1\right\}. \tag{2.35}$$

Demuestre que la desigualdad de Hölder (2.32) se verifica pero ahora con constante k =1.

En el caso de exponente constante $p(x) \equiv p$, la desigualdad de Hölder tiene una generalización de la forma

$$\|uv\|_r \leqslant \|u\|_p\|v\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r},$$

la cual es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder y de la relación

$$\||u|^r\|_p = \|u\|_{pr}^r. \tag{2.36}$$

En el caso de espacios con exponente variable la relación (2.36) ya no es válida en general, véase Lema 2.1.5 y (2.28). Sin embargo, tenemos la desigualdad:

Lema 2.2.1. *Sea* $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} \equiv \frac{1}{r(x)}$, $p(x) \geqslant 1$, $q(x) \geqslant 1$, $r(x) \geqslant 1$ *y sea* $R = \sup_{x \in \Omega \setminus \Omega_\infty(r)} r(x) < \infty$. *Entonces*

$$\|uv\|_{L^{r(\cdot)}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\|v\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \tag{2.37}$$

para toda función $u \in L^{p(\cdot)}$ *y* $v \in L^{q(\cdot)}$ *con* $c_1 = \sup_{x \in \Omega \setminus \Omega_\infty(r)} \frac{r(x)}{p(x)}$, $c_2 = \sup_{x \in \Omega \setminus \Omega_\infty(r)} \frac{r(x)}{q(x)}$ *y* $c = c_1 + c_2$.

Demostración. Para demostrar (2.37) utilizamos la desigualdad

$$(AB)^r \leqslant \frac{r}{p} A^p \ + \ \frac{r}{q} B^q$$

con $A > 0, B > 0, p > 0, q > 0$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ (véase Ejercicio 2.4.2). Integrando la desigualdad

$$|u(x)v(x)|^{r(x)} \leqslant \frac{r(x)}{p(x)}|u(x)|^{p(x)} + \frac{r(x)}{q(x)}|v(x)|^{q(x)}$$

obtenemos

$$\int\limits_{\Omega \setminus \Omega_\infty(r)} |u(x)v(x)|^{r(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant c_1 \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_\infty(p)} |u(x)|^{p(x)}\,\mathrm{d}x + c_2 \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_\infty(q)} |v(x)|^{q(x)}\,\mathrm{d}x \tag{2.38}$$

pues $\Omega_\infty(r) = \Omega_\infty(p) \cap \Omega_\infty(q)$. De (2.38) y (2.9) se sigue que

$$\int\limits_{\Omega \setminus \Omega_\infty(r)} \left| \frac{u(x)v(x)}{\|u\|_{(p)}\|v\|_{(q)}} \right|^{r(x)} \mathrm{d}x \leqslant c_1 \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_\infty(p)} \left| \frac{u(x)}{\|u\|_{(p)}} \right|^{p(x)} \mathrm{d}x + c_2 \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_\infty(q)} \left| \frac{v(x)}{\|v\|_{(q)}} \right|^{q(x)} \mathrm{d}x \leqslant c_1 + c_2.$$

Utilizando ahora el Lema 2.1.4 obtenemos $\|uv\|_{(r)} \leqslant (c_1+c_2)\|u\|_{(p)}\|v\|_{(q)}$, pues $c_1 + c_2 \geqslant 1$. $\square$

Observación 2.2.1. La desigualdad (2.37) también es válida en la forma

$$\rho_{r(\cdot)}(uv) \leqslant c\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\|v\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)}$$

si $\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1$ y $\|v\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1$, la cual es consecuencia de la desigualdad de Hölder (2.32) y la estimación (2.22).

Teorema 2.2.2. *Sea* $1 < p_- \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty$*. Entonces*

$$\left[L^{p(\cdot)}(\Omega)\right]^* = L^{p'(\cdot)}(\Omega).$$

Demostración. La contención $L^{p'(\cdot)}(\Omega) \subseteq \left[L^{p(\cdot)}(\Omega)\right]^*$ es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder (2.32). Demostraremos ahora la contención contraria $\left[L^{p(\cdot)}(\Omega)\right]^* \subseteq L^{p'(\cdot)}(\Omega)$. Sea $\Phi \in \left[L^{p(\cdot)}(\Omega)\right]^*$, entonces definimos la función conjunto μ como $\mu(E) = \Phi(\chi_E)$ para todos los conjuntos medibles E tal que $E \subset \Omega$. Como $\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E\cap F}$ tenemos que μ es aditiva, pero es además σ-aditiva. Para mostrar la σ-aditividad, sea

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

donde $E_j \subset \Omega$ son disjuntos dos a dos, y sea

$$F_k = \bigcup_{j=1}^{k} E_j.$$

Entonces

$$\left\|\chi_E - \chi_{F_k}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant C\left\|\chi_E - \chi_{F_k}\right\|_{p_+} = C|E\backslash F_k|^{1/p_+}.$$

Como $|E| < \infty$, $|E\backslash F_k|$ tiende a 0 cuando $k \to \infty$, por tanto $\chi_{F_k} \to \chi_E$ en norma. Por lo tanto, por la continuidad de Φ tenemos que $\Phi(\chi_{F_k}) \to \Phi(\chi_E)$, equivalentemente

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) = \mu(E)$$

y por consiguiente μ es σ-aditiva. La función μ es una medida en Ω y es además absolutamente continua: si $E \subset \Omega$ y $|E| = 0$, entonces $\mu(E) = \Phi(\chi_E) = 0$, pues $|\Phi(f)| \leqslant \|\Phi\| \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$.
Por el Teorema de Radon-Nikodym, existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\Phi(\chi_E) = \mu(E) = \int\limits_{\Omega} \chi_E(x) g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Por la linealidad de Φ, para una función simple $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$, $E_i \subset \Omega$, tenemos

$$\Phi(f) = \int\limits_{\Omega} f(x) g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Ahora, por un argumento de densidad (igual al caso constante) obtenemos el resultado. $\square$

Corolario 2.2.1. *Bajo las suposiciones del Teorema 2.2.2 el espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es reflexivo.*

2.3. Convergencia y completitud

Teorema 2.3.1. *Sea $1 \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty$. El espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es completo.*

Demostración. El espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es la suma de $L^{p(\cdot)}(E) + L^{\infty}(\Omega_\infty)$ donde $E = \Omega \backslash \Omega_\infty$ y cada uno de los espacios se entiende como el espacio de funciones que son iguales a cero fuera de los conjuntos E y Ω_∞, respectivamente. Por lo tanto, solo necesitamos demostrar la completitud del espacio $L^{p(\cdot)}(E)$.
Sea $\{f_k\}$ una sucesión de Cauchy en $L^{p(\cdot)}(E)$ tal que para cualquier número positivo s existe un número N_s $(N_1 < N_2 < \ldots)$ tal que

$$\|f_{N_{s+1}} - f_{N_s}\|_{L^{p(\cdot)}(E)} < 2^{-s}, s = 1, 2, 3 \ldots.$$

Entonces

$$\sum_{s=1}^{\infty} \|f_{N_{s+1}} - f_{N_s}\|_{L^{p(\cdot)}(E)} < \infty.$$

Sea $\Omega_r = \left\{x \in E : |x| < r\right\}, r > 0$. Por la desigualdad de Hölder (2.32) obtenemos

$$\sum_{s=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_r} \left|f_{N_{s+1}}(x) - f_{N_s}(x)\right| \mathrm{d}x \leqslant c_r \sum_{s=1}^{\infty} \|f_{N_{s+1}} - f_{N_s}\|_{L^{p(\cdot)}(E)} < \infty \tag{2.39}$$

donde $c_r = \left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{(p')_-}\right) \|\chi_{\Omega_r}\|_{L^{p'(\cdot)}(E)} < \infty$. Por (2.39), $\{f_{N_s}(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(\Omega_r)$. Entonces, existe el límite $f(x) = \text{lím}_{s\to\infty} f_{N_s}(x)$ para casi todo punto $x \in \Omega_r$ y, consecuentemente, para casi todo punto en $x \in E$ pues $r > 0$ es arbitrario. Solo queda demostrar que

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^{p(\cdot)}(E)} = 0.$$

Como $\{f_k\}$ es una sucesión de Cauchy, tenemos que $\|f_k - f_{N_s}\|_{L^{p(\cdot)}(E)} < \varepsilon$ cuando k y s son suficientemente grandes. Entonces por (2.17)

$$\int\limits_E |f_k(x) - f_{N_s}(x)|^{p(x)} \,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon^{p_-} \leqslant \varepsilon.$$

Por el Lema de Fatou tenemos

$$\begin{aligned}
\int\limits_E |f_k(x) - f(x)|^{p(x)} \,\mathrm{d}x &\leqslant \liminf_{s\to\infty} \int\limits_E |f_k(x) - f_{N_s}(x)|^{p(x)} \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sup_s \int\limits_E |f_k(x) - f_{N_s}(x)|^{p(x)} \,\mathrm{d}x \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

y esto termina la prueba. □

EJERCICIO 2.3.1. Demuestre la completitud del espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ basado en el Teorema de Riesz-Fischer. (Véase p. 7).

EJERCICIO 2.3.2. Bajo las condiciones del Ejercicio 2.1.5, demuestre la completitud del espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ basado en el Teorema 1.1.2.

Lema 2.3.1. *Sea* $0 < p_- \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty$, $x \in \Omega\backslash\Omega_\infty$. *La convergencia "integral"* (2.4) *es equivalente a la convergencia de la norma:*

$$\|f - f_m\|_{(p)} + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_\infty} |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Corolario 2.1.2. □

2.4. Embebimientos y conjuntos densos

Teorema 2.4.1. *Sea* $0 \leqslant r(x) \leqslant p(x) \leqslant \infty$ *y sea* $|\Omega\backslash\Omega_\infty(r)| < \infty$. *Si* $\Omega_\infty(r) \subseteq \Omega_\infty(p)$ *y*

$$R := \sup_{x\in\Omega_\infty(p)\backslash\Omega_\infty(r)} r(x),$$

entonces $L^{p(\cdot)}(\Omega) \subseteq L^{r(\cdot)}(\Omega)$ *y*

$$\rho_{r(\cdot)}(f) \leqslant \rho_{p(\cdot)}(f) + |\Omega_\infty(p)\backslash\Omega_\infty(r)|\|f\|^R_{L^\infty(\Omega_\infty(p)\backslash\Omega_\infty(r))} \ + \ |\Omega\backslash\Omega_\infty(r)| \tag{2.40}$$

para cualquier $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. *(En el caso* $\Omega_\infty(p) = \Omega_\infty(r)$, *el segundo término del lado derecho se debe omitir y* R *puede ser infinito). Si, además,* $1 \leqslant r(x) \leqslant p(x)$ *y* $\Omega_\infty(p) = \Omega_\infty(r)$, *la desigualdad para normas también es válida:*

$$\|f\|_{(r)} \ \leqslant \ c_0^\nu\|f\|_{(p)} \tag{2.41}$$

donde

$$c_0 = c_2 + (1-c_1)|\Omega\backslash\Omega_\infty(p)|, \ c_1 = \inf_{x\in\Omega\backslash\Omega_\infty(p)} \frac{r(x)}{p(x)}, \ c_2 = \sup_{x\in\Omega\backslash\Omega_\infty(p)} \frac{r(x)}{p(x)},$$

$\nu = \frac{1}{r_0}$ *si* $c_0 \geqslant 1$ *y* $\nu = \frac{1}{R}$ *si* $c_0 \leqslant 1$.

Demostración. La estimación (2.40) se deriva directamente de la igualdad $\rho_{r(\cdot)}(f) = \int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2} + \int_{\Omega_3}$ con $\Omega_1 = \{x \in \Omega\backslash\Omega_\infty(p) : |f(x) \geqslant 1\}$, $\Omega_2 = \{x \in \Omega_\infty(p)\backslash\Omega_\infty(r) : |f(x)| \geqslant 1\}$, $\Omega_3 = \{x \in \Omega\backslash\Omega_\infty(r) : |f(x)| \leqslant 1\}$.

La técnica clásica para demostrar la desigualdad (2.41) para normas basada en la desigualdad de Hölder con los exponentes $p_1(x) = \frac{p(x)}{r(x)}$ y $p_2(x) = \frac{r(x)}{p(x)-r(x)}$ no es apropiada pues podemos tener $p(x) = r(x)$ en un conjunto arbitrario. Utilizando la desigualdad $(AB)^r \leqslant \frac{r}{p}A^p + \frac{r}{q}B^q$ y tomando $A = |f(x)/\|f\|_{(r)}$ y $B = 1$, llegamos, mediante (2.9), a que

$$\int\limits_{\Omega\backslash\Omega_\infty} \left|\frac{f(x)}{\|f\|_{(r)}}\right|^{r(x)} \mathrm{d}x \leqslant c_0.$$

Por lo tanto, por el Lema 2.1.4 obtenemos (2.41). $\square$

EJERCICIO 2.4.1. Bajo las condiciones del Ejercicio 2.1.5, obtenga el embebimiento $L^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$ cuando $p(x) \geqslant r(x)$ utilizando el Teorema 1.1.3.

EJERCICIO 2.4.2. Demuestre la desigualdad

$$(AB)^r \leqslant \frac{r}{p}A^p + \frac{r}{q}B^q$$

donde $A > 0$, $B > 0$, $p > 0$, $q > 0$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.

Lema 2.4.1. *Sea* $|\Omega_\infty(p)| = 0,\ 1 \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty$. *El conjunto de funciones acotadas y con soporte compacto es denso en* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Demostración. Para $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ escribimos $f_{N,m}(x) = f(x)$, si $|f(x)| \leqslant N$ y $|x| \leqslant m$ y $f_{N,m}(x) = 0$ en otro caso. Basado en la convergencia "integral" (2.4) de acuerdo al Lema 2.3.1, tenemos

$$\int\limits_{\Omega} |f(x) - f_{N,m}(x)|^{p(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_{\omega_m} |g(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega_N} |g(x)|\,\mathrm{d}x \to 0$$

cuando $m \to \infty, N \to \infty$, donde $\omega_m = \{x \in \Omega : |x| \geqslant m\}$, $\Omega_N = \{x \in \Omega : g(x) \geqslant N\}$ y $g(x) = |f(x)|^{p(x)} \in L^1(\Omega)$. □

Teorema 2.4.2. *Sea* $p \in \mathcal{P}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. *Entonces el conjunto* $C(\Omega) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *es denso en* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. *Además, si* Ω *es abierto, entonces el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto* $C_c^\infty(\Omega)$ *es denso en* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Demostración. Sea $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$. Del Lema 2.4.1 existe una función acotada $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que

$$\|f - g\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} < \varepsilon. \tag{2.42}$$

Por el Teorema de Lusin[1], existe una función $h \in C(\Omega)$ y un conjunto abierto U tal que

$$|U| < \min\left\{1, \left(\frac{\varepsilon}{2\|g\|_\infty}\right)^{p_+}\right\},$$

[1]también conocido como *Teorema de Luzin*.

$g(x) = h(x)$ para todo $x \in \Omega \setminus U$ y $\sup|h(x)| = \sup_{\Omega\setminus U}|g(x)| \leqslant \|g\|_\infty$. Luego,

$$\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{g-h}{\varepsilon}\right) \leqslant \text{máx}\left\{1, \left(\frac{2\|g\|_\infty}{\varepsilon}\right)^{p_+}\right\}|U| \leqslant 1$$

es decir, $\|g-h\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \varepsilon$, lo cual junto con (2.42) implica que

$$\|f-h\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 2\varepsilon. \tag{2.43}$$

Por otro lado, asumamos Ω abierto. Como $p \in L^\infty(\Omega)$, tenemos que $C_c^\infty(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{h}{\varepsilon}\right) < \infty$, de esta manera existe un conjunto abierto y acotado $G \subset \Omega$ tal que $\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{h\chi_{\Omega\setminus G}}{\varepsilon}\right) \leqslant 1$. Es decir,

$$\|h - h\chi_G\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \varepsilon. \tag{2.44}$$

Sea m un polinomio que satisface que $\sup|h(x)-m(x)| \leqslant \varepsilon\, \text{mín}\{1, |G|^{-1}\}$. Entonces $\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{h\chi_G - m\chi_G}{\varepsilon}\right) \leqslant \text{mín}\{1,|G|^{-1}\}|G| \leqslant 1$. Lo que es lo mismo:

$$\|h\chi_G - m\chi_G\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \varepsilon. \tag{2.45}$$

Finalmente, consideraciones similares a las que condujeron a (2.44) nos permiten concluir que para un número positivo suficientemente pequeño a, el conjunto compacto $K_a = \{x \in G \ : \ \text{dist}(x, \partial G) \geqslant a\}$ satisface que $\|m\chi_G - m\chi_{K_a}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \varepsilon$. Tomando $\varphi \in C_c^\infty(G)$ tal que $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ para $x \in G$ y $\varphi(x) = 1$ para $x \in K_a$ obtenemos

$$\|m\chi_G - m\varphi\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \|m\chi_G - m\chi_{K_a}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \varepsilon,$$

de lo cual, junto con (2.43) y (2.45), concluimos que

$$\|f - m\varphi\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 4\varepsilon.$$

Claramente $m\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, lo que concluye la prueba. □

El resultado anterior es válido en el contexto más general de BFS y su prueba se sigue con pocas modificaciones.

Proposición 2.4.1. *El conjunto $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en un espacio de Banach de funciones medibles separable $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.*

EJERCICIO 2.4.3. Pruebe la Proposición 2.4.1.

Por $L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ denotaremos la clase de todas las funciones acotadas en $\mathbb{R}^n$ con soporte compacto. Del Teorema 2.4.2 se obtiene el siguiente resultado.

Lema 2.4.2. *Sea $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ una función medible tal que $1 < p_-$ y $p_+ < \infty$. Entonces $L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ y en $L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

Teorema 2.4.3. *Bajo las suposiciones del Lema 2.4.1 el conjunto $\mathcal{S}$ de las funciones simples es denso en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Demostración. Es una consecuencia del Lema 2.1.2 y del Teorema 2.4.2 y del hecho que las funciones continuas en un conjunto compacto pueden ser uniformemente aproximadas por funciones simples. □

Teorema 2.4.4. *Bajo las suposiciones del Lema 2.4.1 el espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es separable.*

Demostración. Por el Teorema 2.4.2 es suficiente demostrar que cualquier función continua f con soporte compacto $F \subset \bar{\Omega}$ puede ser aproximada por funciones de algún conjunto contable. Se sabe que tales funciones pueden ser aproximadas uniformemente por polinomios $r_m(x)$ con coeficientes racionales. Colocando $f_m(x) = r_m(x)$ para $x \in F$ y $f_m(x) = 0$ para $x \notin F$, vemos que las funciones $f_m(x)$ aproximan uniformemente la función $f(x)$, lo que es suficiente. □

2.5. Otras normas

2.5.1. Norma asociada

Introduciremos ahora el espacio y la norma inspirados en el Teorema de Representación de Riesz de funcionales lineales en L^p. Sea

$$\mathfrak{L}^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ f : \left| \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| < \infty,\ \forall \varphi \in L^{p'(\cdot)}(\Omega) \right\} \tag{2.46}$$

donde $1 \leqslant p(x) \leqslant \infty$. Este espacio coincide con el espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ bajo ciertas condiciones naturales en el exponente variable p y es en realidad el espacio asociado de $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ (véase la Definición 1.2.2 donde se define el *espacio asociado* a un BFS). La contención

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) \subseteq \mathfrak{L}^{p(\cdot)}(\Omega),\ 1 \leqslant p(x) \leqslant \infty \tag{2.47}$$

es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder (2.32). Obsérvese que el espacio (2.46) es siempre lineal. Entonces, por el Lema 2.1.1, no puede coincidir con el espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ si $p_+ = \infty$.
Vamos utilizar la siguiente notación

$$p_-^1 \ = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega\setminus\Omega_1(p)} p(x)\ , \qquad (p')_-^1 \ = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega\setminus\Omega_1(p')} p'(x).$$

Evidentemente,

$$\Omega_1(p) = \Omega_\infty(p'),\ \Omega_1(p') = \Omega_\infty(p),\ (p')_+ = \frac{p_-^1}{p_-^1 - 1},\ (p')_-^1 = \frac{p_+}{p_+ - 1}.$$

El espacio (2.46) puede ser equipado con las normas naturales

$$\|f\|_p^* \ = \sup_{\delta_{p'(\cdot)}(\varphi)\leqslant 1} \left| \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right|, \tag{2.48}$$

y

$$\|f\|_p^{**} \ = \sup_{\|\varphi\|_{p'(\cdot)}\leqslant 1} \left| \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right|, \tag{2.49}$$

donde $\delta_{p'(\cdot)}(\varphi)$ es la distancia (2.5) y se asume que $(p')_+ < \infty$ (i.e., $p_-^1 > 1$) en (2.48), mientras que $p(x)$ puede ser arbitrario ($1 \leqslant p(x) \leqslant \infty$) en el caso (2.49). A veces a la norma (2.49) se le llama *norma de tipo Orlicz*.
Note que por (2.34) tenemos que

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \|f\|_p^{**}$$

en el caso $1 \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty$ y $|\Omega_\infty| = 0$.

Lema 2.5.1. *Sea $f \in \mathfrak{L}^{p(\cdot)}(\Omega)$, $(p')_-^1 > 1$. Entonces $\|f\|_p^* < \infty$ y*

$$\int_\Omega |f(x)\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_p^* \|\varphi\|_{p'}^1 \leqslant \|f\|_p^* \|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \tag{2.50}$$

para todo $\varphi \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, *donde* $\|\varphi\|^1_{p'}$ *es la norma* (2.29). *Además, el funcional* (2.48) *es una norma en* $\mathfrak{L}^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Demostración. Supongamos que $\|f\|^*_p < \infty$. Entonces existe una función $f_0(x) \in \mathfrak{L}^{p(\cdot)}(\Omega)$ y una sucesión $\varphi_k \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ tal que $\delta_{p'(\cdot)}(\varphi_k) \leqslant 1$ y

$$\int\limits_{\Omega} f_0(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x \;\geqslant\; 2^{Qk}, k = 1, 2, ...$$

$(f_0 \geqslant 0, \varphi_k \geqslant 0)$. Por lo tanto, $j_m = \sum_{k=1}^{m} 2^{-Qk}\varphi_k(x)$ es una sucesión creciente. Cálculos directos muestran que $\delta_{p'(\cdot)}(j_m) \leqslant 1$ y

$$\int\limits_{\Omega} f_0(x) j_m(x)\,\mathrm{d}x \;= \sum_{k=1}^{m} 2^{-Qk} \int\limits_{\Omega} f_0(x)\varphi_k(x)\,\mathrm{d}x \;\geqslant\; m. \tag{2.51}$$

La sucesión $j_m(x)$ converge monótonamente a la función

$$j(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-Qk}\varphi_k(x).$$

Así,

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty(p')} |j(x)|^{p'(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty(p')} |j_m(x)|^{p'(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant 1,$$

por el Teorema de Convergencia Monótona, y dado que

$$\sup_{x\in\Omega_\infty(p')} j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-Qk} < \infty$$

entonces $j \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$. Por el Teorema de Convergencia Monótona de nuevo y por (2.51), $\int_\Omega f_0(x)\, j(x)\,\mathrm{d}x = \infty$ lo que contradice el hecho de que $f_0(x) \in \mathfrak{L}^{p(\cdot)}(\Omega)$.
Por ende, $\|f\|^*_p < \infty$ y por la definición (2.48) tenemos

$$\left|\int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant A\|f\|^*_p$$

donde $A > 0$ y $\delta_{p'(\cdot)}(\varphi/A) \leqslant 1$. Tomando el ínfimo con respecto a A, llegamos a la desigualdad del lado izquierdo de (2.50) de acuerdo con la definición (2.29). El lado derecho de la desigualdad sigue de (2.31). Ahora solo queda verificar los axiomas de norma. La homogeneidad y la desigualdad triangular son evidentes. Sea $\|f\|_p^* = 0$, entonces $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ para toda $\varphi \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ y por lo tanto para toda función $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ por el Lema 2.1.2. Entonces $f(x) \equiv 0$ como queríamos demostrar. □

Lema 2.5.2. *Sea* $1 \leqslant p(x) \leqslant \infty$, $p_-^1 > 1$ *y* $p_+ < \infty$. *Las normas* (2.48) *y* (2.49) *son equivalentes en funciones* $f \in \mathfrak{L}^{p(\cdot)}(\Omega)$ *:*

$$2^{1-(p')_+/(p')_-^1}\|f\|_p^{**} \leqslant \|f\|_p^* \leqslant \|f\|_p^{**}. \tag{2.52}$$

Las normas coinciden en los casos: 1) $|\Omega_1(p)| = 0$, *2)* $p(x) = const$ *para* $x \in \Omega\backslash(\Omega_\infty \cup \Omega_1)$.

Demostración. Para llegar a la desigualdad del lado derecho, probemos que

$$\left\{\varphi : \delta_{p'(\cdot)}(\varphi) \leqslant 1\right\} \subseteq \left\{\varphi : \|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1\right\} \tag{2.53}$$

para $\varphi \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$. Sea $\delta_{p'(\cdot)}(\varphi) \leqslant 1$, entonces $\rho_{p'(\cdot)}(\varphi) \leqslant 1$ siempre que $\|\varphi\|_{(p')} \leqslant 1$ por (2.17)-(2.18). Entonces, por (2.17) tenemos que $\|\varphi\|_{(p')} \leqslant \left[\rho_{p'(\cdot)}(\varphi)\right]^{1/(p')_+} \leqslant 1$ lo que implica la siguiente desigualdad $\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \left[\rho_{p'(\cdot)}(\varphi)\right]^{1/(p')_+} + \sup_{x\in\Omega_\infty(p')}|\varphi(x)| = \delta_{p'(\cdot)}(\varphi) \leqslant 1$ así (2.52) queda demostrado.
Además, sea $c = 2^{1-(p')_+/(p')_-} \leqslant 1$. Vamos a demostrar que

$$\left\{\varphi : \|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1\right\} \subseteq \left\{\varphi : \delta_{p'(\cdot)}(c\varphi) \leqslant 1\right\},$$

lo que prueba la desigualdad del lado izquierdo en (2.52). Tenemos que $\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1$, por lo tanto $\|c\varphi\|_{(p')} \leqslant 1$ y así $\left[\rho_{p'(\cdot)}(c\varphi)\right]^{1/(p')_+} \leqslant \|c\varphi\|_{(p')}^{(p')_-^1/(p')_+}$ por (2.17). Luego, se tiene $\rho_{p'(\cdot)}(c\varphi) \leqslant \|c\varphi\|_{(p')}^{(p')_-^1/(p')_+} + \|c\varphi\|_{L^\infty(\Omega_\infty(p'))}$. Como $A^\lambda + B \leqslant 2^{1-\lambda}(A+B)^\lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $A \geqslant 0$, $0 \leqslant B \leqslant 1$, obtenemos que $\delta_{p'(\cdot)}(c\varphi) \leqslant 1$ y (2.53) queda demostrado, así como el lado izquierdo de la desigualdad en (2.52).

Para finalizar, si $|\Omega_1(p)| = 0$ o $p(x) = const$ para $x \in \Omega\backslash(\Omega_\infty \cup \Omega_1)$, entonces $\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega_\infty(p'))} = 0$ o $(p')_-^1/(p')_+ = 1$, respectivamente, y tenemos (2.53) con $c = 1$, lo que implica la coincidencia de las normas. $\square$

Teorema 2.5.1. *Sea $p_-^1 > 1$. Los espacios $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $\mathfrak{L}^{p(\cdot)}(\Omega)$ coinciden módulo la equivalencia de las normas:*

$$\frac{1}{3}\ \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\ \leqslant\ \|f\|_p^* \leqslant \left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{(p')_-}\right)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \tag{2.54}$$

donde $1/3$ puede ser reemplazado por 1 si $|\Omega_1| = |\Omega_\infty| = 0$.

Demostración. De la contención (2.47) es suficiente demostrar

$$\mathfrak{L}^{p(\cdot)}(\Omega) \subseteq L^{p(\cdot)}(\Omega). \tag{2.55}$$

Sea $f \in \mathfrak{L}^{p(\cdot)}(\Omega)$ y tomemos primero $\|f\|_p^* \leqslant 1$. Escribimos $\varphi_0(x) = |f(x)|^{p(x)-1}$ si $x \in \Omega\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_\infty)$ y $\varphi_0(x) = 0$ en otro caso. Demostraremos que

$$\varphi_0 \in L^{p'(\cdot)}(\Omega) \quad \text{y} \quad \rho_{p'(\cdot)}(\varphi_0) \leqslant 1. \tag{2.56}$$

Supongamos que $\rho_{p'(\cdot)}(\varphi_0) > 1$. Entonces

$$\rho_{p(\cdot)}(f) \geqslant \int\limits_{\Omega\backslash\Omega_\infty(p')} |\varphi_0(x)|^{p'(x)}\,\mathrm{d}x\ >\ 1.$$

Sea $f_{N,k}(x) = f(x)$ si $|x| \leqslant k$ y $|f(x)| \leqslant N$ y en caso contrario escribimos $f_{N,k} \equiv 0$. Entonces $\varphi_{N,k}(x) = |f_{N,k}|^{p(x)-1} \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$. De (2.56) derivamos que existe $N_0 \to \infty$ y $k_0 \to \infty$ tal que

$$\int\limits_{\Omega\backslash\Omega_\infty(p)} |f_{N_0,k_0}|^{p(x)}\,\mathrm{d}x > 1. \tag{2.57}$$

En consecuencia, de (2.50) tenemos que

$$1 < \rho_{p(\cdot)}(f_{N_0,k_0}) \leqslant \|f_{N_0,k_0}\|_p^*\ \|f_{N_0,k_0}^{p(\cdot)-1}\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)}.$$

Por lo tanto, en virtud de (2.17)-(2.18)

$$1 < \|f_{N_0,k_0}\|_p^* \max\left\{\left[\rho_{p(\cdot)}(f_{N_0,k_0})\right]^{\frac{1}{(p')_+}}, \left[\rho_{p(\cdot)}(f_{N_0,k_0})\right]^{\frac{1}{(p')_-}}\right\}. \tag{2.58}$$

Entonces,

$$\text{mín}\left\{\left[\rho_{p(\cdot)}(f_{N_0,k_0})\right]^{1-\frac{1}{(p')_+}},\left[\rho_{p(\cdot)}(f_{N_0,k_0})\right]^{1-\frac{1}{(p')_-}}\right\}\leqslant \|f_{N_0,k_0}\|_p^*$$

y así, de la desigualdad (2.57) concluimos que $1<\|f_{N_0,k_0}\|_p^*$. Esto significa que

$$\sup_{\rho_{p'(\cdot)}(\varphi)\leqslant 1}\left|\int_\Omega f(x)\varphi^{N,k}(x)\,\mathrm{d}x\right|>1$$

donde $\varphi^{N,k}(x)=\varphi(x)$ si $|x|\leqslant k$ y $|f(x)|\leqslant N$, y en caso contrario $\varphi^{N,k}=0$. Sin embargo, como $\rho_{p'(\cdot)}(\varphi^{N,K})\leqslant\rho_{p'(\cdot)}(\varphi)$, esto contradice la suposición que $\|f\|_p^*\leqslant 1$. De donde obtenemos (2.55).
Luego $\int_{\Omega\backslash(\Omega_1(p)\bigcup\Omega_\infty(p))}|f(x)|^{p(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant 1$ y para obtener el embebimiento (2.55) solo es necesario demostrar que $\int_{\Omega_1(p)}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$ y además que $\sup_{x\in\Omega_\infty(p)}|f(x)|<\infty$, lo cual se sigue de la desigualdad

$$\int\limits_{\Omega_i}|f(x)\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant c\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega_i)}\ ,\ i=1,2,$$

que se deriva de (2.50), donde $\Omega_1=\Omega_1(p),\Omega_2=\Omega_\infty(p)$ y $f\in L^1,\ \varphi\in L^\infty$ $(q=1)$ en el primero caso y $f\in L^\infty,\varphi\in L^1$ $(q=\infty)$ en el segundo caso.
Sea ahora $\|f\|_p^*>1$. Entonces $f(x)/\|f\|_p^*\in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ como ya fue demostrado. Así, $f\in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ por la linealidad del espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ bajo la condición $p_+<\infty$. El embebimiento (2.55) queda de esta forma demostrado.
Solo queda demostrar la desigualdad (2.54) para las normas. La desigualdad de la derecha es una consecuencia de la desigualdad de Hölder (2.32) y la definición de la norma (2.49). Para demostrar el lado izquierdo de la desigualdad escribimos $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$ con $f_2(x)=f(x),x\in\Omega_1$ y $f_2(x)=0,x\in\Omega\backslash\Omega_1$ y $f_3(x)=f(x),x\in\Omega_\infty$, y $f_3(x)=0,x\in\Omega\backslash\Omega_\infty$. Demostremos que

$$\|f_1\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\ \leqslant\ \|f\|^*_{p\left(\Omega\backslash(\Omega_1\bigcup\Omega_\infty)\right)}\ . \tag{2.59}$$

Tenemos que

$$\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f_1}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\Omega\backslash\Omega_\infty}|f_1(x)|\varphi_\lambda(x)\,\mathrm{d}x\ ,\ \lambda>0, \tag{2.60}$$

con $\varphi_\lambda(x) = \left|\frac{f_1(x)}{\lambda}\right|^{p(x)-1}$. Escogemos $\lambda = \|f_1\|_{(p)}$, en virtud de (2.50) y (2.59) obtenemos

$$1 = \frac{1}{\|f_1\|_{(p)}} \int\limits_{\Omega\backslash\Omega_\infty} \left|f_1(x)\right| \varphi_\lambda(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\|f_1\|_p^*}{\|f_1\|_{(p)}} \|\varphi_\lambda\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)}.$$

Como $\rho_{p'(\cdot)}(\varphi_\lambda) \leqslant \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f_1}{\lambda}\right) = 1$, también concluimos que $\|\varphi_\lambda\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1$ debido a (2.17)-(2.18) y obtenemos la coincidencia $\|\varphi_\lambda\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} = \|\varphi_\lambda\|_{(p')}$. Así (2.60) implica (2.58). Como $\|f_2\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \|f\|^*_{L^1(\Omega_1)}$ y $\|f_3\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \|f\|^*_{L^\infty(\Omega_\infty)}$, obtenemos el lado izquierdo de la desigualdad. $\square$

Corolario 2.5.1. *Sea* $f(x) \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $\varphi(x) \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, $1 \leqslant p(x) \leqslant \infty$*. Con respecto a las normas* (2.48)-(2.49) *la desigualdad de Hölder es válida con constante 1:*

$$\int\limits_\Omega |f(x)\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_p^*\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)}\ ,\ p_-^1 > 1, \tag{2.61}$$

y

$$\int\limits_\Omega |f(x)\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_p^{**}\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)}. \tag{2.62}$$

La desigualdad

$$\int\limits_\Omega |f(x)\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_p^*\|\varphi\|_{p'}^* \tag{2.63}$$

es válida en el caso

$$p_-^1 > 1,\ p_+ < \infty,\ |\Omega_\infty(p)| = |\Omega_1(p)| = 0. \tag{2.64}$$

En realidad, (2.61) ya fue dado en (2.50) mientras que (2.62) se sigue directamente de la definición (2.49). La desigualdad (2.63) se sigue de (2.61) pues $\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \|\varphi\|_{p'}^*$ bajo la condición (2.64) por el Teorema 2.5.1.

Observación 2.5.1. Nótese que la desigualdad (2.62) es la desigualdad de Hölder del Teorema 1.2.3 entre el BFS $\left(L^{p'(\cdot)}, \|\cdot\|_{(p')}\right)$ y su espacio asociado bajo las condiciones del Ejercicio 2.1.5.

2.5.2. Más sobre el espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ en el caso $p_+ = \infty$

La definición (2.46) es una de las maneras de definir el espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ para que sea lineal en el caso $p_+ = \infty$. Se puede también definir desde el comienzo como la cápsula lineal del espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ o como

$$\mathbf{L}^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ f : \exists\lambda > 0 \text{ tal que} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} \mathrm{d}x \;+\; \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} < \infty \right\}. \tag{2.65}$$

Este espacio es siempre lineal para $0 \leqslant p(x) \leqslant \infty$. La homogeneidad es obvia, mientras que la aditividad es evidente en el conjunto $\{x \in \Omega : p(x) \leqslant 1\}$ debido a la desigualdad $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p, p \leqslant 1$, mientras que en el conjunto $\{x \in \Omega : p(x) > 1\}$ se verifica por la convexidad (2.12) de la función $t \mapsto t^p$, $p > 1$.
Por lo tanto, en el caso $p_+ = \infty$ podemos utilizar las tres versiones de la definición, i.e., $\operatorname{span}(L^{p(\cdot)}), \mathbf{L}^{p(\cdot)}$ o $\mathfrak{L}^{p(\cdot)}$. Se puede constatar fácilmente que

$$\operatorname{span}\left(L^{p(\cdot)}\right) = \mathbf{L}^{p(\cdot)} \subseteq \mathfrak{L}^{p(\cdot)}. \tag{2.66}$$

La norma en el espacio $\mathfrak{L}^{p(\cdot)}$ es dada por (2.49) mientras que por (2.8) en los espacios $\operatorname{span}(L^{p(\cdot)}) = \mathbf{L}^{p(\cdot)}$.

EJERCICIO 2.5.1. Demuestre que las relaciones en (2.66) son verdaderas.

2.5.3. Desigualdad integral de Minkowski

Teorema 2.5.2. *Sean $1 \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty$ y $p_-^1 > 1$. Entonces*

$$\left\| \int\limits_\Omega f(\cdot, y)\,\mathrm{d}y \right\|_p^{**} \leqslant \int\limits_\Omega \|f(\cdot, y)\|_p^{**}\,\mathrm{d}y. \tag{2.67}$$

Demostración. Sea J la expresión del lado izquierdo. Tenemos que

$$J \leqslant \sup_{\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1} \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega |\varphi(x) f(x,y)|\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Por lo tanto, por la definición de la norma (2.49), obtenemos la desigualdad (2.67). □

Corolario 2.5.2. *Sea* $1 \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty$ *y* $p_-^1 > 1$. *Entonces*

$$\left\| \int_\Omega f(\cdot, y)\, \mathrm{d}y \right\|_p^* \leqslant c_1 \int_\Omega \|f(\cdot, y)\|_p^* \, \mathrm{d}y, \tag{2.68}$$

y

$$\left\| \int_\Omega f(\cdot, y)\, \mathrm{d}y \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant c_2 \int_\Omega \|f(\cdot, y)\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \, \mathrm{d}y \tag{2.69}$$

donde $c_1 = 1$ *si* $|\Omega_1| = 0$ *y* $c_1 = 2^{-1+(p')_+/(p')_-^1}$ *en otro caso, mientras que* $c_2 = kc_1$ *si* $|\Omega_\infty| = |\Omega_1| = 0$ *y* $c_2 = 3kc_1$ *en otro caso;* $k = \frac{1}{p_-} + \frac{1}{(p')_-}$.

Demostración. La desigualdad (2.68) con $c_1 = 2^{-1+(p')_+/(p')_-^1}$ se sigue de (2.67) en virtud de (2.52). Del mismo modo (2.69) se sigue de (2.67) como consecuencia de (2.54) y (2.52). Para demostrar que $c_1 = 0$ en (2.68) en el caso $|\Omega_1| = 0$, notemos que

$$\left\| \int_\Omega f(\cdot, y)\, \mathrm{d}y \right\|_p^* \leqslant \sup_{\delta_{p'(\cdot)}(\varphi) \leqslant 1} \int_\Omega \|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \|f(\cdot, y)\|_p^* \, \mathrm{d}y.$$

Solo queda notar que las condiciones $\delta_{p'(\cdot)}(\varphi) \leqslant 1$ y $\|\varphi\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1$ son equivalentes en el caso $|\Omega_1| = 0$, esto se debe a (2.17)-(2.18). □

2.6. Diferencias entre los espacios con exponente variable y exponente constante

Empecemos con una propiedad de los espacios de Lebesgue con exponente variable que es contraria a la intuición que se tiene de los espacios clásicos. En este caso tomemos el espacio $\mathbf{L}^{p(\cdot)}(\Omega)$ dado en (2.65). Sea $\Omega = [1, \infty)$, $p(x) = x$ y $f(x) \equiv a$ donde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tenemos que $f \in \mathbf{L}^x(\Omega)$ pues tomando $\lambda > a$ la integral $\int_1^\infty |f(x)/\lambda|^x \, \mathrm{d}x$ es finita pero $f \notin L^p(\Omega)$ para cualquier p constante.

2.6.1. Invariancia bajo traslaciones

Un resultado importante en la teoría de los espacios de Lebesgue tiene que ver con la acotación del operador de traslación, i.e., si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces tenemos que $\tau_h f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, donde $\tau_h f(x) := f(x-h)$. Este resultado está relacionado con el hecho de que el espacio clásico es *isótropo* con respecto al exponente, pues la potencia p es igual en todas las direcciones. Como el espacio con exponente variable es *anisótropo* entonces la acotación de la traslación no es válida en general. Por ejemplo, tomando la función $f(x) = |x|^{-\frac{1}{3}}$, entonces $f \in L^{p(\cdot)}\big((-1,1)\big)$ donde

$$p(x) = \begin{cases} 2, & x \in |x| < \varepsilon \\ 5, & x \in |x| \geqslant \varepsilon \end{cases} \tag{2.70}$$

pero $\tau_\delta f \notin L^{p(\cdot)}\big((-1,1)\big)$, cuando $\delta > \varepsilon$, pues trasladamos la singularidad de cero hacia δ pero el exponente se queda fijo. ($\tau_\delta f$ se entiende como la extensión cero cuando necesaria). El exponente se puede "suavizar" y todavía $\tau_\delta f \notin L^{p(\cdot)}\big((-1,1)\big)$; por ejemplo, para volver la función (2.70) continua es suficiente utilizar la función de Urysohn. Nuestro ejemplo no es un caso aislado, pues L. Diening demostró que este fenómeno es *persistente*, i.e., si $p_+ > p_-$, entonces existe un $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que el operador de traslación τ_h no es continuo, véase [31].

EJERCICIO 2.6.1. Demuestre:

1. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces tenemos que $\tau_h f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, donde $\tau_h f(x) := f(x-h)$, para todo $h > 0$;
2. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces $\text{lím}_{h\to 0}\|f - \tau_h f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$.

El Ejercicio 2.6.1(2) nos dice que $\tau_h : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ es un operador de *aproximación de la identidad* en el espacio de Lebesgue clásico, véase §3.3.1.

2.6.2. Desigualdad de Young

Sea

$$Kf(x) = (k * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} k(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y \tag{2.71}$$

donde $*$ se llama *convolución*, véase §3.3 para más detalles. La *desigualdad de Young para convoluciones* afirma que

$$\|k * f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r},$$

la cual se puede demostrar, por ejemplo, mediante una descomposición en la forma $|f(x-y)k(y)| = |f(x-y)|^{1-s}|k(y)||f(x-y)|^s$, para $s = 1-p/r$, la desigualdad de Hölder y la desigualdad integral de Minkowski. Como la convolución depende de una translación y ya sabemos que la traslación no es continua, la pregunta es: ¿Es la desigualdad de Young válida para el caso de exponentes variables? La respuesta es negativa en general, pero hay casos muy particulares en donde se tiene una versión de la desigualdad. Empecemos con un contra-ejemplo.

Ejemplo 2.6.1. La desigualdad de Young en la forma

$$\|k * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

no es válida para un núcleo arbitrario $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y un exponente variable arbitrario p. Para simplicidad consideremos $n = 1$. Sea

$$p(x) = \begin{cases} p_1, & \text{si } x < 0 \\ p_2, & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

donde $1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$. Definamos el núcleo k de la siguiente manera

$$k(x) = \begin{cases} |x-2|^{\alpha-1}, & \text{si } |x| \leqslant 3 \\ 0, & \text{si } |x| > 3 \end{cases},$$

donde $0 < \alpha < 1/p_1 - 1/p_2$, por lo tanto $k \in L^1(\mathbb{R}^1)$. Tomemos ahora f como

$$f(x) = \begin{cases} |x+1|^{-\nu}, & \text{si } x \in (-2,0) \\ 0, & \text{si } x \notin (-2,0) \end{cases},$$

lo que implica que $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ si $0 < \nu < 1/p_1$. Pero la función $k * f \notin L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ si $\nu > \alpha + 1/p_2$. Esto se infiere pues

$$(k * f)(x) = \int\limits_{\text{máx}\{x-3,-2\}}^{\text{mín}\{x+3,0\}} |x-y-2|^{\alpha-1}|y+1|^{-\nu}\, \mathrm{d}y,$$

y tomando $1 < x < 3/2$ tenemos

$$(k*f)(x) \leqslant \int\limits_{x-3}^{-1} |x-y-2|^{\alpha-1}|y+1|^{-\nu}\,\mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{2-x} s^{-\nu}(x-1+s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s$$
$$= (x-1)^{\alpha-\nu} \int\limits_{0}^{\frac{2-x}{x-1}} \xi^{-\nu}\,(1+\xi)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\xi \geqslant \frac{c}{(x-1)^{\nu-\alpha}}$$

donde $c = \int_0^1 \xi^{-\nu}(1+\xi)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\xi$. Por lo tanto $k*f$ no puede ser p_2-integrable en $[1,3/2]$, pues $(\nu-\alpha)p_2 > 1$.

Ahora mostramos una versión muy particular de la desigualdad de Young (véase también el Teorema 3.3.3)

Teorema 2.6.1. *Sean p y q exponentes variables tal que $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} \equiv 1 + \frac{1}{r}$ donde $r = \mathrm{const} \geqslant 1$. Si $k \in L^{q_-}(\mathbb{R}^n) \cap L^{(p')_+}(\mathbb{R}^n)$ entonces el operador de convolución* (2.71)

$$k*\cdot : L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^r(\mathbb{R}^n)$$

es acotado.

Demostración. Tomemos $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1$. Entonces

$$\big|(k*f)(x)\big|$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} A^{1-\mu(y)}|f(y)|^{\frac{p(y)}{r}}\,\big|k(x-y)\big|^{\mu(y)}\,|f(y)|^{1-\frac{p(y)}{r}}\,\left|\frac{k(x-y)}{A}\right|^{1-\mu(y)}\mathrm{d}y$$

donde la constante $A > 0$ y la función $\mu(y)$, $0 < \mu(y) < 1$, serán elegidas más tarde. Utilizando la desigualdad generalizada de Hölder (2.34) con los exponentes

$$p_1(y) = r, \quad p_2(y) = \frac{rp(y)}{r-p(y)}, \quad p_3(y) = p'(y) = \frac{p(y)}{p(y)-1}$$

obtenemos

$$\big|(k*f)(x)\big| \leqslant c\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} A^{r-r\mu(y)}|f(y)|^{p(y)}\,\big|k(x-y)\big|^{r\mu(y)}\,\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{r}}$$

$$\times\left\|\,|f(y)|^{1-\frac{p(y)}{r}}\right\|_{p_2(y)}\left\|\left|\frac{k(x-y)}{A}\right|^{1-\mu(y)}\right\|_{p\prime(y)}. \quad (2.72)$$

Por la estimación (2.22) obtenemos

$$\left\|\,|f(y)|^{1-\frac{p(y)}{r}}\right\|_{p_2(y)} \leqslant \|f\|_{p(y)}^{\text{ínf}[1-\frac{p(y)}{r}]} \leqslant 1 \quad (2.73)$$

pues $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1$.
Para estimar el tercer factor en (2.72) es natural escoger $\mu(y)$ de tal manera que $\big[1-\mu(y)\big]\,p(y) = q(y)$, i.e.

$$\mu(y) = \frac{q(y)}{r}.$$

Queremos utilizar la desigualdad (2.22) en el tercer factor. Luego, estamos interesados en tener

$$\left\|\frac{k(x-y)}{A}\right\|_{q(y)} = \frac{1}{A}\,\big\|k(x-y)\big\|_{q(y)} \leqslant\; 1. \quad (2.74)$$

Para obtener (2.74) escogemos

$$A = \|k\|_{q_-} + \|k\|_{(p')_+}.$$

De esta manera (2.74) es válida por el Lema 2.1.6. Así podemos aplicar (2.22) y obtener

$$\left\|\left|\frac{k(x-y)}{A}\right|^{1-\mu(y)}\right\|_{p'(y)} \leqslant 1. \quad (2.75)$$

De las desigualdades (2.73) y (2.75) obtenemos mediante (2.72)

$$\|k * f\|_r \leqslant cA^{\nu} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p(y)} |k(x-y)|^{q(y)} \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{r}}$$
$$= cA^{\nu} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p(y)} \, \mathrm{d}y \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x)|^{q(x+y)} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{r}}$$

donde $\nu = 1 - (p')_+/r$ si $A \leqslant 1$ y $\nu = 1 - q_-/r$ si $A \geqslant 1$. Por lo tanto

$$\|k * f\|_r \leqslant cA^{\nu} \left(\|k\|_{q_-}^{\frac{q_-}{r}} + \|k\|_{(p')_+}^{\frac{(p')_+}{r}} \right) \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p(y)} \, \mathrm{d}y.$$

Finalmente, ahora es solo necesario tener en cuenta que la integral no es mayor que 1 debido a (2.17). $\square$

2.7. Notas y referencias bibliográficas

El contenido de esta sección es basado en gran parte en el manuscrito no publicado de Samko [120] y en el artículo de Sharapudinov [121].

La primera referencia a los espacios de Lebesgue con exponente variable aparece en 1931 en un articulo de Orlicz [105] donde introduce el espacio $L^{p(\cdot)}([0,1])$ y demuestra que la condición necesaria y suficiente (en una función arbitraria g para que $\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ es que exista algún $\lambda > 0$ tal que $\int_0^1 (|g(x)|/\lambda)^{p'(x)}\,\mathrm{d}x < \infty$, i.e., que $g \in \mathbf{L}^{p'}([0,1])$ en nuestro lenguaje. La siguiente referencia a estos espacios aparece en el libro de Nakano [96] en la década de los cincuenta como un caso particular de los llamados espacios modulares. El espacio variable aparece en la década de los sesenta en un artículo de Tsenov [132] el cual considera el caso cuando las funciones p y f son continuas y establece un criterio para que un polinomio P_n^* minimice la integral $\int_0^1 |f(t) - a_0\varphi_0(t) - \ldots - a_n\varphi_n(t)|^{p(t)}\,\mathrm{d}t$ entre todos los polinomios $P_n(t) = a_0\varphi_0(t) + \ldots + a_n\varphi_n(t)$ donde $\{\varphi_0(t), \cdots, \varphi_n(t)\}$ es un sistema

linealmente independiente de funciones continuas. Basado en el artículo de Tsenov, Sharapudinov [121] estudia las propiedades topológicas, métricas y de norma del espacio $L^{p(\cdot)}([0,1])$, introduciendo una topología, una métrica y una norma, esta última basada en un teorema de Kolmorogov de como normar espacios topológicos [78] (hoy llamada la norma de Luxemburg debido al trabajo de Luxemburg en BFS, véase [92]), en este trabajo demostró la separabilidad y el espacio dual. Destacamos otros trabajos de Sharapudinov en espacios de Lebesgue con exponente variable; a decir, [122, 123, 124]. Los espacios con exponente variable también aparecen en los trabajos de otros autores ruso, destacamos Kozlov [83] y Zhikov [140, 142, 143, 144, 145, 146].
Pero el artículo más influyente en la historia de los espacios con exponente variable es el artículo de Kovácĭk y Rákosnĭk [81] donde además de estudiar muchas de las propiedades fundamentales del espacio, introduce de manera natural los espacios de Sobolev con exponente variable.

Parte II

Herramientas de Análisis Armónico

Capítulo 3

Operadores definidos en BFS

En este capítulo estudiaremos algunos operadores considerados clásicos en análisis armónico, a decir: *operadores pseudodiferenciales* y de *tipo convolución*, estos últimos incluyen operadores *potenciales de Bessel*, de *Calderón-Zygmund*, *singulares integrales de Cauchy* y *Wiener-Hopf-Hankel*.

Las diversas aplicaciones que pueden ser modeladas mediante espacios de Lebesgue con exponente variable, como por ejemplo el llamado *crecimiento local no estándar* en mecánica de fluidos, teoría de elasticidad, ecuaciones diferenciales (ver, [34, 117]), han motivado el desarrollo de la teoría de operadores en estos espacios. Sin embargo, este desarrollo ha encontrado dificultades esenciales debido a que los espacios $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ poseen propiedades indeseadas, tales como que estos espacios no son invariante bajo traslaciones y, en general, los operadores de convolución no son acotados. Esto último se debe a que la desigualdad de Young no es válida en este caso general, véase §2.6.2.

A pesar de este tropiezo inicial, la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood permite determinar el comportamiento de los operadores anteriormente mencionados.

3.1. Operador maximal de Hardy-Littlewood

Definición 3.1.1 (Operador de promedio integral)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto. Para* $f \in L^1(\Omega)$ *y* $r > 0$ *definimos el* operador de promedio integral $\mathrm{Avg}_r(f) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *como*

$$\mathrm{Avg}_r(f)(x) := \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)\cap\Omega} |f(y)| \, \mathrm{d}y. \tag{3.1}$$

Asociado al operador de promedio integral, tenemos el operador maximal de Hardy-Littlewood.
Dada una función f localmente integrable, la función maximal Mf nos da el valor medio más grande de f en cada punto.

Definición 3.1.2. *Dada una función* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$*, se define la* función maximal de Hardy-Littlewood *para cualquier* $x \in \mathbb{R}^n$ *como*

$$M_B f(x) := \sup_{r>0} \mathrm{Avg}_r\, f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)| \, \mathrm{d}y.$$

La definición adoptada de función maximal está basada en bolas centradas en el punto x, pero es posible definir otras funciones maximales de Hardy-Littlewood, como por ejemplo M_Q

$$M_Q f(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int\limits_{Q} |f(y)| \, \mathrm{d}y,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos $Q \subset \mathbb{R}^n$ que contienen a x cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados y

$$\widetilde{M}_B f(x) := \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int\limits_{B} |f(y)| \, \mathrm{d}y.$$

donde el supremo es tomado sobre todos las bolas $B \subset \mathbb{R}^n$ que contienen a x.

EJERCICIO 3.1.1. Demuestre las siguientes estimaciones puntuales

$$M_B f(x) \sim M_Q f(x) \sim \widetilde{M}_B f(x). \tag{3.2}$$

La estimación (3.2) nos garantiza que en cuestiones de convergencia y acotación podemos tomar cualquiera de las definiciones de operador maximal. Por eso vamos a tomar Mf como $M_B f$, $M_Q f$ o $\widetilde{M}_B f$ indistintamente.
Para $f \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, el q-ésimo operador maximal es definido como

$$M_q f(x) := \sup_{Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^q \, \mathrm{d}y \right)^{1/q}. \tag{3.3}$$

Definición 3.1.3. *Dada una función $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, se define la función maximal óptima de Fefferman-Stein, para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, como*

$$f^{\sharp}(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| \, \mathrm{d}y,$$

donde

$$f_Q := \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) \, \mathrm{d}y.$$

Para $\delta > 0$ y $f \in L^\delta_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$f^{\sharp}_{\delta}(x) := \sup_{Q \ni x} \inf_{c \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - c|^\delta \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{\delta}}.$$

El *reordenamiento no creciente* de una función medible f en $\mathbb{R}^n$ se define por

$$f^*(t) := \inf \left\{ \lambda > 0 \ : \ |\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |f(x)| > \lambda\}| \leqslant t \right\}, \quad (0 < t < \infty).$$

Así definamos $f^{**}(t) := t^{-1} \int_0^t f^*(\tau) \, \mathrm{d}\tau$.
Para $\lambda \in (0,1)$ fijo y una función medible f en $\mathbb{R}^n$ dada, consideremos la función *maximal óptima local* $M^{\sharp}_{\lambda} f$ dada mediante la fórmula

$$M^{\sharp}_{\lambda} f(x) := \sup_{Q \ni x} \inf_{c \in \mathbb{R}} ((f - c)\chi_Q)^*(\lambda |Q|).$$

Ahora mostraremos algunas propiedades de estas funciones que serán de utilidad para probar la acotación diferentes operadores en el ambiente de los espacios de Banach de funciones medibles.
Sea $S_0(\mathbb{R}^n)$ el espacio de todas las funciones medibles f en $\mathbb{R}^n$ tales que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |f(x)| > \lambda\}| < \infty$$

para cualquier $\lambda > 0$. La desigualdad de Chebyshev

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |f(x)| > \lambda\}| \leqslant \frac{1}{\lambda^q} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q \,\mathrm{d}x$$

se satisface para todo $q \in (0,\infty)$ y $\lambda > 0$. En particular, esto implica que

$$\bigcup_{q \in (0,\infty)} L^q(\mathbb{R}^n) \subset S_0(\mathbb{R}^n).$$

Debido a que $f^\sharp$ es puntualmente dominado por Mf, entonces del Lema 1.1.1(b) tenemos que

$$\|f^\sharp\|_{\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)} \leqslant K\|f\|_{\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)}$$

siempre que M sea acotado en $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$.

EJERCICIO 3.1.2. Pruebe que $f^\sharp$ es puntualmente dominado por Mf.

La acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood en el espacio asociado $\mathcal{X}'(\mathbb{R}^n)$ es caracterizada mediante la llamada Desigualdad de Fefferman-Stein. La prueba de este resultado requiere de cierto andamiaje de análisis armónico clásico el cual no es de interés en estas notas. Para ver la prueba de esta consultar [87].

Teorema 3.1.1 (Desigualdad de Fefferman-Stein)**.** *Sea el operador maximal de Hardy-Littlewood M acotado en $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$, entonces M es acotado en su espacio asociado $\mathcal{X}'(\mathbb{R}^n)$ si y solamente si existe una constante $C_\sharp$ tal que, para todo $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|f\|_{\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_\sharp\|f^\sharp\|_{\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)}.$$

Notemos que si $1 < q < \infty$, entonces de la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$Mf(x) \leqslant M_q f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Así, la acotación de cualquier M_q, $1 < q < \infty$ en un espacio de Banach de funciones medibles $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ implica inmediatamente la acotación del operador M. De hecho, una versión parcial del recíproco de esta afirmación, llamada la *propiedad de auto mejora* del operador maximal de Hardy-Littlewood, es válida de donde tenemos el siguiente resultado [88]:

Teorema 3.1.2. *Sea $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ un espacio de Banach de funciones medibles. Entonces el operador de Hardy-Littlewood M es acotado en $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ si y solamente si M_q es acotado en $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ para algún $q \in (1, \infty)$.*

Los siguientes resultados serán de utilidad para probar la acotación del operador de Calderón-Zygmund.

Teorema 3.1.3. *Para una función $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y una función medible φ que satisface*

$$|\{x \,:\, |\varphi(x)| > \alpha\}| < \infty \quad \textit{para todo } \alpha > 0,$$

tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x) g(x)| \,\mathrm{d}x \leqslant c_n \int_{\mathbb{R}^n} M^{\sharp}_{\lambda}\varphi(x) Mg(x) \,\mathrm{d}x.$$

Proposición 3.1.1. *Para $\delta > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ y $f \in L^{\delta}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tenemos que*

$$M^{\sharp}_{\lambda} f(x) \leqslant \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\delta}} f^{\sharp}_{\delta}(x), \quad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{3.4}$$

Demostración. Sea $\varphi \in L^{\delta}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Para cada cubo Q que contiene al punto $x \in \mathbb{R}^n$, de la desigualdad de Chebyshev tenemos

$$\left(|\varphi|^{\delta} \chi_{Q}\right)^{*} (\lambda |Q|) \leqslant \frac{1}{\lambda |Q|} \int_{Q} |\varphi(y)|^{\delta} \,\mathrm{d}y. \tag{3.5}$$

Por otro lado, tenemos que

$$(|\varphi|^{\delta} \chi_{Q})^{*} = [(\varphi \chi_{Q})^{*}]^{\delta} \tag{3.6}$$

(ver, [13, Capítulo 2, Proposición 1.7]). Así, considerando $\varphi = f - c$ con $c \in \mathbb{R}$, entonces de (3.5) y (3.6) concluimos la siguiente estimación

$$((f-c)\chi_Q)^*(\lambda|Q|) \leqslant \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-c|^\delta \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{\delta}}.$$

Tomando el ínfimo sobre $c \in \mathbb{R}$ y el supremo sobre los cubos $Q \subset \mathbb{R}^n$ que contienen al punto x en la desigualdad anterior, obtenemos (3.4). □

3.1.1. Acotación del operador maximal en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Antes de estudiar el operador maximal en el espacio con exponente variable, vamos a citar un resultado clásico en espacios de Lebesgue.

Proposición 3.1.2 (p. 5, Teorema 1 de [129]). *Sea f una función definida en $\mathbb{R}^n$.*

1. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, entonces la función Mf es finita en casi todo los puntos;*
2. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p \leqslant \infty$, entonces $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant A_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

donde A_p solo depende de p y de la dimensión n.

Para el operador de promedio integral (3.1) tenemos la caracterización del Teorema 3.1.4, pero necesitamos una condición en el exponente variable:

Lema 3.1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $p : \Omega \longrightarrow [1, \infty)$ una función uniformemente continua. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe una constante C_0 tal que para todo $x, y \in \Omega$, $|x - y| < 1/2$, tenemos*
$$|p(x) - p(y)| \leqslant \frac{C_0}{-\ln|x-y|}. \tag{3.7}$$
2. *Existe una constante C_1 tal que para toda bola abierta $B \subset \mathbb{R}^n$ con $|\Omega \cap B| > 0$, tenemos*
$$|B|^{p_-(B) - p_+(B)} \leqslant C_1.$$

Demostración. Supongamos que *2.* es válida. Sea $x, y \in \Omega$ tal que $|x - y| < 1/2$ y sea $B \subset \mathbb{R}^n$ una bola abierta tal que $x, y \in B$ y $\operatorname{diam} B \leqslant 1/2|x-y| < 1$. Como Ω es abierto entonces tenemos que $|\Omega \cap B| > 0$, por tanto

$$|B|^{p_-(B)-p_+(B)} \leqslant C_1.$$

Como $|B| \leqslant \operatorname{diam}(B)^n \leqslant (2|x-y|)^n$, tenemos

$$\Big((2|x-y|)^n \Big)^{-|p(x)-p(y)|} \leqslant |B|^{p_{-,B}-p_{+,B}} \leqslant C_1,$$

y

$$|x-y|^{-|p(x)-p(y)|} \leqslant C_1^{1/n} 2^{|p(x)-p(y)|} \leqslant C_1^{1/n} 2^{p_+-p_-},$$

ahora tomando el logaritmo obtenemos

$$|p(x)-p(y)| \leqslant \frac{\ln \Big(C_1^{1/n} 2^{p_+-p_-} \Big)}{-\ln |x-y|}.$$

lo que demuestra *1.*

Asumamos *1.* válida. Sea $B \subset \mathbb{R}^n$ una bola abierta con $|\Omega \cap B| > 0$, lo que implica $1 \leqslant p_-(\Omega) \leqslant p_-(B) \leqslant p_+(B) \leqslant p_+(\Omega) < \infty$. Si $\operatorname{diam}(B) \geqslant 1/2$ tenemos

$$\begin{aligned} |B|^{p_-(B)-p_+(B)} &= \Big(|B(0,1)| \big(\operatorname{diam}(B)/2\big)^n \Big)^{p_-(B)-p_+(B)} \\ &\leqslant \Big(|B(0,1)| 4^{-n} \Big)^{p_-(\Omega)-p_+(\Omega)}, \end{aligned}$$

lo que nos permite restringir al caso $\operatorname{diam}(B) < 1/2$. Escojamos $x_0, x_\infty \in B \cap \Omega$ tal que $0 \leqslant 1/2 \big(p_+(B) - p_-(B)\big) \leqslant p(x_0) - p(x_\infty)$. Como tenemos que el $\operatorname{diam}(B) < 1/2$ implica que $|x_0 - x_\infty| < 1/2$, y por la hipótesis en p

$$|p(x_0) - p(x_\infty)| \leqslant \frac{C_0}{-\ln |x_0 - x_\infty|},$$

lo que implica

$$\exp(C_0) \geqslant |x_0 - x_\infty|^{-|p(x_0)-p(x_\infty)|} \geqslant |x_0 - x_\infty|^{\frac{1}{2}(p_-(B)-p_+(B))}.$$

Como $2^n|B| \geqslant |x_0 - x_\infty|^n |B(0,1)|$, obtenemos

$$\exp(2C_0) \geqslant |x_0 - x_\infty|^{p_-(B)-p_+(B)} \geqslant \left(2\left(\frac{|B|}{|B(0,1)|}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{p_-(B)-p_+(B)}$$

luego

$$\begin{aligned}(2|B|)^{p_-(B)-p_+(B)} &\leqslant \exp(2nC_0)|B(0,1)|^{p_-(B)-p_+(B)} \\ &\leqslant \exp\left(2nC_0\right) \text{máx}\left\{1, |B(0,1)|^{p_-(\Omega)-p_+(\Omega)}\right\},\end{aligned}$$

lo cual demuestra que *1.* implica *2.* □

Definición 3.1.4. *Cuando un exponente* $p : \Omega \longrightarrow [1, \infty)$ *satisface la condición* (3.7) *decimos que el exponente* p *es* localmente log-Hölder continuo *y escribimos que* $p \in LH_0(\Omega)$[1].

Corolario 3.1.1. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y acotado, y sea* $p : \Omega \longrightarrow [1, \infty)$ *una función uniformemente Hölder continua con índice* $\alpha > 0$*, i.e.*

$$|p(x) - p(y)| \leqslant H|x - y|^\alpha$$

para todo $|x - y| < 1/2$*. Entonces* $p \in LH_0(\Omega)$*.*

Demostración. Cuando $\alpha > 0$ existe una constante $A > 0$ tal que

$$|x - y|^\alpha \leqslant \frac{A}{-\ln|x - y|} \tag{3.8}$$

para todo $|x - y| < 1/2$. □

El Corolario 3.1.1 nos dice que la continuidad Hölder uniforme es más fuerte que la continuidad log-Hölder local. Con esto podemos generar una panoplia de funciones que satisfacen la condición (3.7).

EJERCICIO 3.1.3. Demuestre la desigualdad (3.8).

EJERCICIO 3.1.4. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $p \in LH_0(\Omega)$;

[1] véase Definición 3.1.6 para una caracterización del comportamiento en el infinito.

(b) $1/p \in LH_0(\Omega)$;

(c) $p' \in LH_0(\Omega)$.

Teorema 3.1.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $p \in LH_0(\Omega)$. Entonces existe una constante $C = C(p)$ tal que para toda función $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ con $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1$ tenemos*

$$|\operatorname{Avg}_r(f)(x)|^{p(x)} \leqslant C(p)\left(\operatorname{Avg}_r\left(|f(\cdot)|^{p(\cdot)}\right)(x) + 1\right)$$

para todo $r > 0$.

Demostración. Vamos a demostrar el Teorema por casos: cuando $r \geqslant 1/2$ y cuando $0 < r < 1/2$.

Sea $r \geqslant 1/2$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Avg}_r(f)(x)|^{p(x)} &= \left(\frac{1}{|B_r(x)|}\int\limits_{B_r(x)\cap\Omega} |f(y)|\,\mathrm{d}y\right)^{p(x)} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{|B_r(x)|}\int\limits_{B_r(x)\cap\Omega} |f(y)|^{p(y)}\,\mathrm{d}y + 1\right)^{p(x)} \\
&\leqslant \left(\frac{r^{-n}}{|B(0,1)|}\rho_{p(\cdot)}(f) + 1\right)^{p(x)} \leqslant \left(\frac{2^n}{|B_1(0)|} + 1\right)^{p_+}
\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad es consecuencia de

$$f = f\chi_{\{|f|\leqslant 1\}} + f\chi_{\{|f|>1\}}. \tag{3.9}$$

Sea ahora $0 < r < 1/2$. Tenemos

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{Avg}_r(f)(x)|^{p(x)} &= \left(\frac{1}{|B_r(x)|} \int\limits_{B_r(x)\cap\Omega} |f(y)|\,\mathrm{d}y \right)^{p(x)} \\
&\overset{(d_1)}{\leqslant} \left(\frac{1}{|B_r(x)|} \int\limits_{B_r(x)\cap\Omega} |f(y)|^{p_-(B_r(x))}\,\mathrm{d}y \right)^{\frac{p(x)}{p_-(B_r(x))}} \\
&\overset{(d_2)}{\leqslant} \left(\frac{1}{|B_r(x)|} \int\limits_{B_r(x)\cap\Omega} |f(y)|^{p(y)}\,\mathrm{d}y + 1 \right)^{\frac{p(x)}{p_-(B_r(x))}} \\
&\leqslant |B_r(x)|^{-\frac{p(x)}{p_-(B_r(x))}} 2^{\frac{p_+(B_r(x))}{p_-(B_r(x))}} \left(\frac{1}{2}\rho_{p(\cdot)}(f) + \frac{1}{2}|B_r(x)| \right)^{\frac{p(x)}{p_-(B_r(x))}}
\end{aligned}
$$

donde la desigualdad (d_1) es consecuencia de la desigualdad integral de Jensen y para la (d_2) utilizamos (3.9). Como $\rho_{p(\cdot)}(f) \leqslant 1$ y $0 < r < \frac{1}{2}$, tenemos la desigualdad

$$
\frac{1}{2} \int\limits_{B_r(x)\cap\Omega} |f(y)|^{p(y)}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}|B_r(x)| \leqslant \frac{1}{2}\rho_{p(\cdot)}(f) + \frac{1}{2}(2r)^n < 1,
$$

la cual implica

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{Avg}_r(f)(x)|^{p(x)} &\leqslant |B_r(x)|^{-\frac{p(x)}{p_-(B_r(x))}} 2^{\frac{p_+(B_r(x))}{p_-(B_r(x))}} \left(\frac{1}{2}\rho_{p(\cdot)}(f) + \frac{1}{2}|B_r(x)| \right) \\
&= |B_r(x)|^{\frac{p_+(B_r(x))-p(x)}{p_-(B_r(x))}} 2^{\frac{p_-(B_r(x))}{p_+(B_r(x))}-1} \left(\operatorname{Avg}_r(|f(\cdot)|^{p(\cdot)})(x) + 1 \right) \\
&\leqslant |B_r(x)|^{\frac{p_+(B_r(x))-p_-(B_r(x))}{p_-(B_r(x))}} 2^{\frac{p_-(B_r(x))}{p_+(B_r(x))}-1} \left(\operatorname{Avg}_r(|f(\cdot)|^{p(\cdot)})(x) + 1 \right) \\
&\leqslant C(p) \left(\operatorname{Avg}_r(|f(\cdot)|^{p(\cdot)})(x) + 1 \right)
\end{aligned}
$$

donde la ultima desigualdad es consecuencia del Lema 3.1.1. □

Una consecuencia inmediata del Teorema 3.1.4 es el siguiente corolario.

Corolario 3.1.2. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y* $p \in LH_0(\Omega)$*. Entonces existe una constante* $C = C(p)$ *tal que para toda función* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *con* $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1$ *tenemos*

$$|Mf(x)|^{p(x)} \leqslant C(p)\left(M\left(|f(\cdot)|^{p(\cdot)}\right)(x) + 1\right).$$

El corolario anterior es la clave para obtener la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood en el espacio de Lebesgue con exponente variable cuando Ω es un conjunto acotado.

Teorema 3.1.5. *Sea* Ω *un conjunto abierto y acotado y* $p : \Omega \longrightarrow [1, \infty)$ *medible.*

1. *Si* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *con* $1 \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty$ *en* Ω*, entonces* Mf *es finita en casi todo el punto en* $\mathbb{R}^n$*;*
2. *Sea* $p \in LH_0(\Omega)$ *y* $1 < p_- \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty$ *en* Ω*. Entonces existe una constante* $C(\Omega, p) > 0$ *tal que para todo* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *tenemos*

$$\|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant C(\Omega, p)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

Demostración. Hagamos la demostración por casos:

1. Como $L^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ pues Ω es acotado, el resultado ahora sigue de la Proposición 3.1.2 con $p = 1$.
2. Tomando $q(x) := p(x)/p_-$, tenemos que $1 \leqslant q(x) \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty$. Como $L^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ pues Ω es acotado, tenemos que existe una constante $C_e > 0$ tal que $\|f\|_{L^{q(\cdot)}}(\Omega) \leqslant C_e \|f\|_{L^{p(\cdot)}}(\Omega)$ para toda $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Ahora sea $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1/C_e$, lo que implica $\|f\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1$. Ahora demostremos que $\rho_{q(\cdot)}(Mf)$ es acotado independientemente de f. Como el exponente $q \in LH_0(\Omega)$ podemos utilizar el Corolario 3.1.2 y obtenemos

$$\begin{aligned}\rho_{p(\cdot)}(f) = \left\|M(f)^{q(\cdot)}\right\|^{p_-}_{L^{p_-}(\Omega)} &\leqslant \left\|C(p)\left(M(|f(\cdot)^{q(\cdot)}|) + 1\right)\right\|^{p_-}_{L^{p_-}(\Omega)} \\ &\leqslant (C(p))^{p_-}\left(\left\|M(|f(\cdot)^{q(\cdot)}|)\right\|_{L^{p_-}(\Omega)} + \|1\|_{L^{p_-}(\Omega)}\right)^{p_-}.\end{aligned}$$

Utilizando la Proposición 3.1.2 con exponente constante $p_- > 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}\rho_{p(\cdot)}(f) &\leqslant C(p)^{p_-}\left(C(p_-)\Big\||f(\cdot)^{p(\cdot)}|\Big\|_{L^{p_-}(\Omega)} + \|1\|_{L^{p_-}(\Omega)}\right)^{p_-}\\ &= C(p)^{p_-}\left(C(p_-)[\rho_{p(\cdot)}(f)]^{\frac{1}{p_-}} + \|1\|_{L^{p_-}(\Omega)}\right)^{p_-}\\ &\leqslant C(\Omega, p).\end{aligned}$$

Lo anterior muestra que $\rho_{p(\cdot)}(f)$ es acotado para toda la función f con $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1/C_e$, por lo tanto la norma $\|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ también es acotada para estas funciones. Como $M(\lambda f) = |\lambda| M(f)$ y $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$ obtenemos

$$\begin{aligned}\big\|M(f)\big\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} &= C_e\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\left\|M\left(\frac{f}{C_e\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}}\right)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\\ &\lesssim C_e\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.\end{aligned}$$

□

Definición 3.1.5. *Dada una función $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, se define el* operador maximal fraccionario de Hardy-Littlewood *para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ como*

$$\mathcal{M}_\alpha f(x) := \sup_{x\in B} \frac{1}{|B|^{1-\alpha/n}} \int_B |f(y)|\,\mathrm{d}y$$

donde se toma el supremo en todas las bolas que contienen al punto x.

El operador fraccionario de Hardy-Littlewood es una generalización del operador maximal, pues para $\alpha = 0$, tenemos que $\mathcal{M}_0 = M$, donde M es el operador maximal de Hardy-Littlewood. El resultado clásico con respecto al operador maximal fraccionario dice que $\mathcal{M}_\alpha$ es $(L^p \to L^q)$-acotado, cuando $1 < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$. Nuestro interés es demostrar que el resultado se puede generalizar al contexto variable. Para eso necesitamos del siguiente lema.

Lema 3.1.2. *Sea $0 < \alpha < n$ y p una función exponente tal que $1 < p_- \leqslant p(x) \leqslant p_+ < n/\alpha$ y la función q se define puntualmente por*

$1/q(x) = 1/p(x) - \alpha/n$. Entonces para toda función f tenemos la siguiente estimación puntual

$$\mathcal{M}_\alpha(f)(x) \leqslant \left[M\left(|f(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}\frac{n}{n-\alpha}} \right)(x) \right]^{1-\alpha/n} \left(\int\limits_\Omega |f(y)|^{p(y)}\,\mathrm{d}y \right)^{\alpha/n}. \tag{3.10}$$

Demostración. Sea B cualquier bola que contiene al punto x. Como

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{\alpha p(x)}{n} = 1$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|^{1-\alpha/n}} \int\limits_B |f(y)|\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{|B|^{1-\alpha/n}} \int\limits_B |f(y)|^{\frac{p(x)}{q(x)}} |f(y)|^{\frac{\alpha p(x)}{n}}\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \left(\frac{1}{|B|} \int\limits_B |f(y)|^{\frac{p(x)}{q(x)}\frac{n}{n-\alpha}}\,\mathrm{d}y \right)^{1-\alpha/n} \left(\int\limits_\Omega |f(y)|^{p(y)}\,\mathrm{d}y \right)^{\alpha/n} \\
&\leqslant \left[M\left(|f(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}\frac{n}{n-\alpha}} \right)(x) \right]^{1-\alpha/n} \left(\int\limits_\Omega |f(y)|^{p(y)}\,\mathrm{d}y \right)^{\alpha/n},
\end{aligned}$$

lo que demuestra el lema. □

Utilizando la desigualdad puntual (3.10) y la acotación del operador maximal probamos la acotación del operador maximal fraccionario.

Teorema 3.1.6. *Sea $1 < p(x) < n/\alpha$ y $1/q(x) = 1/p(x) - \alpha/n$. Entonces $\mathcal{M}_\alpha : L^{p(\cdot)}(\Omega) \longrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ es acotado.*

Demostración. Sea $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que $\rho_{p(\cdot)}(f) = 1$. Entonces por la desigualdad (3.10) y la propiedad de bola unitaria tenemos

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathcal{M}_\alpha(f)\right\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} &\leqslant \left\|\left[M\left(|f(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}\frac{n}{n-\alpha}}\right)\right]^{1-\frac{\alpha}{n}}\right\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \\
&= \left\|M\left(|f(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}\frac{n}{n-\alpha}}\right)\right\|^{1-\frac{\alpha}{n}}_{L^{(1-\frac{\alpha}{n})q(\cdot)}(\Omega)} \\
&\leqslant \left\||f|^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}\frac{n}{n-\alpha}}\right\|^{1-\frac{\alpha}{n}}_{L^{(1-\frac{\alpha}{n})q(\cdot)}(\Omega)} = \left\||f|^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}\right\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \\
&\leqslant 1.
\end{aligned}
$$

El resultado general se obtiene de la linealidad del operador maximal fraccionario. □

La acotación en espacios de Lebesgue con exponente variable de muchos de los operadores considerados clásicos en análisis armónico depende del comportamiento del operador maximal de Hardy-Littlewood, aqui solo nos limitamos a probar el caso cuando Ω es acotado. Sin embargo la siguiente definición provee, de alguna manera, un control sobre el comportamiento local y al infinito del operador maximal sobre dominios generales.

Definición 3.1.6. *Dado Ω y $r : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que r es localmente* log-*Hölder continua; y denotamos esto por $r \in LH_0(\Omega)$, si existe una constante C_0 tal que para todo $x \in \Omega$, $|x-y| < 1/2$,*

$$|r(x) - r(y)| \leqslant \frac{C_0}{-\ln(|x-y|)}. \tag{3.11}$$

Decimos que r es log-*Hölder continua al infinito; y denotamos esto por $r \in LH_\infty(\Omega)$, si existen constantes C_∞ y r_∞ tales que para todo $x \in \Omega$*

$$|r(x) - r_\infty| \leqslant \frac{C_\infty}{\ln(e+|x|)}. \tag{3.12}$$

Si $r \in LH_0(\Omega) \cap LH_\infty(\Omega)$ diremos que r es globalmente log-*Hölder continua y escribiremos $r \in LH(\Omega)$.*

Teorema 3.1.7 (Acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood)**.** *Dado un conjunto* Ω *y* $p \in \mathcal{P}(\Omega)$*, si* $1/p \in LH(\Omega)$*, entonces*

$$\|t\chi_{\{x\,:\,Mf(x)>t\}}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

Si además $p_- > 1$*, entonces*

$$\|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

En ambas desigualdades las constantes dependen de la dimensión n*, las constantes* log*-Hölder de* $1/p$*,* p_1*,* p_+ *y de* p_∞ *(en el caso en que este valor sea finito).*

Nótese que si Ω es acotado, entonces $1/p \in LH_\infty(\Omega)$ automáticamente con constante que depende de $\|1/p\|_\infty$. Así, en este caso es suficiente asumir que $1/p \in LH_0(\Omega)$ para concluir que el operador maximal es acotado. En este caso las constantes de las desigualdades dependen solo de n, p_-, p_+ y $|\Omega|$.
La asunción $1/p \in LH_0(\Omega)$ es una condición de regularidad débil, sin embargo en [28, Ejemplo 3.21] se muestra que una condición de regularidad de este tipo es necesaria. La condición $LH_\infty(\Omega)$ puede ser vista como una condición de regularidad al infinito. La necesidad de una condición de este tipo se muestra en [28, Ejemplo 3.23].
En [85], A. Lerner construye exponentes p discontinuos en cero o al infinito tales que; sin embargo, el operador maximal es acotado. Así, las condiciones (3.11) y (3.12) no son necesarias en el Teorema 3.1.7. A pesar de esto, las condiciones $LH_0(\Omega)$ y $LH_\infty(\Omega)$ son óptimas en el sentido que ninguna otra condición de decrecimiento puntual a cero que sea más lenta es suficiente para garantizar que el operador maximal sea acotado. Quisieramos hacer notar que recientemente estas condiciones han sido debilitadas en [86, 94]. También ver [33].

Definición 3.1.7. *El conjunto de todas las funciones medibles que satisfacen* (2.3) *y para las cuales el operador maximal de Hardy-Littlewood sea acotado en* $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *se denotará por* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$*.*

Un ejemplo de una función en $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ que no satisface la condición (3.11) aparece en [30], y una función que no satisface (3.12) en [107]. A. Nekvinda [93, 94] define una clase de exponentes $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ (llamada ahora *clase de Nekvinda*) al relajar la condición (3.12) tal que $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) \subset$

$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. V. Rabinovich y S. Samko en [111] introducen la clase $\mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$ como la colección de exponentes variables $p \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ para los cuales existen constantes $p_0 \in (1, \infty)$, $\theta \in (0, 1)$ y un exponente variable $p_1 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p(x)},$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Esta clase es tal que $LH(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$.

3.2. Operadores pseudodiferenciales

En esta sección mostraremos que podemos definir operadores pseudodiferenciales acotados en $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ para símbolos que satisfacen, punto a punto, cierta cota. A modo de ilustración consideraremos símbolos en la clase Hörmander y en la clase de Miyachi como ejemplos de símbolos infinitamente diferenciables y otros que no lo son.

Denotaremos a los usuales operadores de diferenciación parcial de primer orden en $\mathbb{R}^n$ por $\partial_{x_j} := \partial/\partial x_j$. Para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con α_j entero no negativo escribiremos

$$\partial^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}.$$

Además, sea $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, y para cada vector $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos $\xi^\alpha := \xi^{\alpha_1} \cdots \xi^{\alpha_n}$. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar en $\mathbb{R}^n$ y $|\xi| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$ para $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Definición 3.2.1. *Dada $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, un operador pseudodiferencial con símbolo a, $\mathrm{op}(a)$, es formalmente definido por la fórmula*

$$\mathrm{op}(a)u(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\xi \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x, \xi) u(y) e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \, \mathrm{d}y,$$

donde el símbolo a se asume acotado en la variable espacial x y la variable de frecuencia ξ, y además satisface ciertas condiciones de regularidad.

La prueba de la acotación de operadores pseudodiferenciales en $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ que aquí mostraremos es válida para toda clase de símbolos a que satisfacen la siguiente desigualdad puntual:

$$(\mathrm{op}(a)f)^\sharp(x) \leqslant C_q (M_q f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.13}$$

donde $q \in (1, \infty)$ y $C_q > 0$ es independiente de $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Aquí, ejemplificaremos este hecho mediante la consideración de operadores pseudodiferenciales con símbolos en la *clase de Hörmander* $S^m_{\rho,\delta}$ introducida en [62], donde $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ pertenece a $S^m_{\rho,\delta}$ si

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

con

$$m \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \delta, \rho \leqslant 1$$

y las constantes positivas $C_{\alpha,\beta}$ dependen solo de α y β. También consideraremos símbolos en la clase de Miyachi $S^m_{\rho,\delta}(\varkappa, \varkappa')$, la cual es una generalización de la clase de Hörmander [103]: si $h \in \mathbb{R}^n$ y f es una función en $\mathbb{R}^n$, la primera y segunda diferencia se denotan por

$$\begin{aligned} \Delta_x^1(h) f(x) :=& f(x + h) - f(x), \\ \Delta_x^2(h) f(x) :=& f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x). \end{aligned}$$

Sean

$$m \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \delta, \rho \leqslant 1, \quad \varkappa, \varkappa' > 0.$$

Consideremos además los enteros no negativos k y k' que satisfacen las desigualdades

$$k < \varkappa \leqslant k + 1, \quad k' < \varkappa' \leqslant k' + 1.$$

La *clase de Miyachi* $S^m_{\rho,\delta}(\varkappa, \varkappa')$ consiste de todas las funciones a (no necesariamente infinitamente diferenciable) en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tales que las derivadas $\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)$ existen en el sentido clásico para $|\beta| \leqslant k$ y $|\alpha| \leqslant k'$ y si las siguientes condiciones se cumplen:

(i) Si $|\beta| \leqslant k$ y $|\alpha| \leqslant k'$, entonces

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leqslant A(1 + |\xi|)^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|};$$

(ii) Si $|\beta| = k$ y $|\alpha| \leqslant k'$, $h \in \mathbb{R}^n$ y $|h| \leqslant (1 + |\xi|)^{-\delta}$, entonces

$$|\Delta_x^2(h) \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leqslant A(1 + |\xi|)^{m+\delta\varkappa-\rho|\alpha|} |h|^{\varkappa-k};$$

(iii) Si $|\beta| \leqslant k$ y $|\alpha| = k'$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ y $|\eta| \leqslant (1 + |\xi|)^\rho/4$, entonces

$$|\Delta_\xi^2(\eta) \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leqslant A(1 + |\xi|)^{m+\delta|\beta|-\rho\varkappa'} |\eta|^{\varkappa'-k'};$$

(iv) Si $|\beta| = k$ y $|\alpha| = k'$, $h, \eta \in \mathbb{R}^n$ y $|h| \leqslant (1+|\xi|)^{-\delta}$, $|\eta| \leqslant (1+|\xi|)^{\rho}/4$, entonces

$$|\Delta_x^2(h)\Delta_\xi^2(\eta)\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leqslant A(1+|\xi|)^{m+\delta\varkappa-\rho\varkappa'}|h|^{\varkappa-k}|\eta|^{\varkappa'-k'}.$$

Aquí la constante A es independiente de los multi-índices α, β y de las variables $x, \xi, h, \eta \in \mathbb{R}^n$. La menor constante es denotada por $\|a\|_{m,\rho,\delta,\varkappa,\varkappa'}$.

EJERCICIO 3.2.1. Pruebe que si $\varkappa_2 \leqslant \varkappa_1$ y $\varkappa_2' \leqslant \varkappa_1'$, entonces

$$S^m_{\rho,\delta} \subset S^m_{\rho,\delta}(\varkappa_1, \varkappa_1') \subset S^m_{\rho,\delta}(\varkappa_2, \varkappa_2')$$

y

$$\|a\|_{m,\rho,\delta,\varkappa_2,\varkappa_2'} \leqslant K\|a\|_{m,\rho,\delta,\varkappa_1,\varkappa_1'}.$$

Si $\varkappa$ (resp. $\varkappa'$) no es entero, entonces $\Delta_x^2(h)$ (resp. $\Delta_\xi^2(\eta)$) se puede reemplazar por $\Delta_x^1(h)$ (resp. $\Delta_\xi^1(\eta)$). También quisiéramos hacer notar que las asunciones $|h| \leqslant (1+|\xi|)^{-\delta}$ y $|\eta| \leqslant (1+|\xi|)^{\rho}/4$ pueden ser reemplazadas por $h \in \mathbb{R}^n$ y $|\eta| \leqslant (1+|\xi|)/4$ si modificamos la constante A.

El siguiente resultado muestra que la clase de Hörmander y la clase de Miyachi satisfacen la desigualdad puntual (3.13). La prueba de la parte (a) aparece en [99] y la prueba de (b) en [104].

Proposición 3.2.1. *Si a pertenece a una de las siguientes clases de símbolos:*

(a) La clase de Hörmander $S^{n(\rho-1)}_{\rho,\delta}$ *con* $0 < \rho \leqslant 1$ *y* $0 \leqslant \delta < 1$*;*

(b) La clase de Miyachi $S^{n(\rho-1)}_{\rho,\delta}(\varkappa, n)$*, con* $0 \leqslant \delta \leqslant \rho \leqslant 1$*,* $0 \leqslant \delta < 1$ *y* $\varkappa > 0$*;*

entonces para todo $q \in (1,\infty)$ *existe una constante* C_q *tal que*

$$(\mathrm{op}(a)f)^\sharp(x) \leqslant C_q M_q f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.14}$$

para todo $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$*.*

Corolario 3.2.1. *Si las condiciones de la Proposición 3.2.1 se satisfacen, entonces* $\mathrm{op}(a)f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$*.*

Demostración. Usando las clásicas cotas L^p para la función maximal dadas por Stein y Fefferman [51, Teorema 5] aplicadas al operador M_q se prueba que si (3.14) es válida para todo $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathrm{op}(a)$ extiende a un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $q < p < \infty$. En particular, esto implica que $\mathrm{op}(a)f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ para toda función $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Teorema 3.2.1. *Sea $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ un BFS tal que el operador maximal de Hardy-Littlewood M sea acotado en $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ y en su espacio asociado $\mathcal{X}'(\mathbb{R}^n)$. Si a pertenece a una de las siguientes clases de símbolos:*

(a) La clase de Hörmander $S^{n(\rho-1)}_{\rho,\delta}$, con $0 < \rho \leqslant 1$ y $0 \leqslant \delta < 1$;

(b) La clase de Miyachi $S^{n(\rho-1)}_{\rho,\delta}(\varkappa, n)$, con $0 \leqslant \delta \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \delta < 1$ y $\varkappa > 0$.

Entonces, $\mathrm{op}(a)$ *extiende a un operador acotado en $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Supongamos que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces del Corolario 3.2.1 tenemos que $\mathrm{op}(a)f \in S_0(\mathbb{R}^n)$. Del Teorema 3.1.1, existe una constante $C_\sharp > 0$ tal que

$$\|\mathrm{op}(a)f\|_{\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_\sharp \|(\mathrm{op}(a)f)^\sharp\|_{\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.15}$$

Además, de la Proposición 3.2.1, para cada $q \in (1, \infty)$, existe una constante $C_q > 0$ tal que

$$(\mathrm{op}(a)f)^\sharp(x) \leqslant C_q (M_q f)(x), \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Por las Propiedades (P1) y (P2) tenemos

$$\|(\mathrm{op}(a)f)^\sharp\|_{\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_q \|M_q f\|_{\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)}.$$

Por otro lado, como M es acotado en $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$, del Teorema 3.1.2 existe un exponente constante $q_0 \in (1, \infty)$ y una constante $C'_{q_0} > 0$ tales que

$$\|M_{q_0} f\|_{\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C'_{q_0} \|f\|_{\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.16}$$

Combinando (3.15)–(3.16) obtenemos

$$\|\mathrm{op}(a)f)\|_{\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_\sharp C_{q_0} C'_{q_0} \|f\|_{\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)}$$

para toda $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. De la Proposición 2.4.1 tenemos que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ siempre que $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ sea separable. Así, $\mathrm{op}(a)$ extiende continuamente a un operador acotado en todo $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

3.2.1. Caso espacios de Lebesgue con exponente variable

Debido a que en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ conocemos diferentes clases de funciones medibles p para las cuales el operador maximal de Hardy-Littlewood es acotado en estos espacios, del Teorema 3.2.1 se obtiene directamente el siguiente resultado:

Teorema 3.2.2. *Supongamos que $p \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Si a pertenece a una de las siguientes clases de símbolos:*

(a) La clase de Hörmander $S^{n(\rho-1)}_{\rho,\delta}$, con $0 < \rho \leqslant 1$ y $0 \leqslant \delta < 1$;

(b) La clase de Miyachi $S^{n(\rho-1)}_{\rho,\delta}(\varkappa, n)$, con $0 \leqslant \delta \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \delta < 1$ y $\varkappa > 0$.

Entonces, $\mathrm{op}(a)$ *extiende a un operador acotado en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

Más aún, como $LH(\mathbb{R}^n)$ es un subconjunto propio de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.2.2. *Sea $p \in LH(\mathbb{R}^n)$ que satisface* (2.3). *Si $a \in S^0_{1,0}$, entonces* $\mathrm{op}(a)$ *extiende a un operador acotado en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

3.3. Operadores de tipo convolución en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

Un operador de convolución se define como

$$C\varphi(\xi) := (K * \varphi)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(\xi - \eta)\psi(\eta)\,\mathrm{d}\eta, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

donde K es llamado el *núcleo de convolución* de C.

EJERCICIO 3.3.1. Demuestre que la función maximal

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\,\mathrm{d}y = \sup_{r>0} (\varphi_r * |f|)(x),$$

donde $\varphi_r(x) = \frac{\chi_{B(0,r)}(x)}{|B(0,r)|}$.

La desigualdad de Young para convoluciones en los espacios de Lebesgue clásicos nos dice que

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \tag{3.17}$$

cuando $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ y además los exponentes satisfacen la relación

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1.$$

Infortunadamente la desigualdad de Young (3.17) no es válida en general para los espacios de Lebesgue con exponente variable. Véase §2.6.2.

Los operadores de convolución pueden ser considerados actuando en diferentes espacios de funciones así como también sus núcleos de convolución. Por ejemplo, si consideramos al operador C actuando en $L^1(\mathbb{R})$ con $K \in L^1(\mathbb{R})$, el operador de convolución puede ser escrito como

$$C = \mathcal{F}^{-1} \phi_c \cdot \mathcal{F}$$

con $\phi_c = \mathcal{F}K$, donde $\mathcal{F}$ denota la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\eta} \varphi(\eta) \, \mathrm{d}\eta, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

y $\mathcal{F}^{-1}$es la transformada inversa de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}\psi(\eta) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\eta} \psi(\xi) \, \mathrm{d}\xi, \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

3.3.1. Aproximación de la identidad

Una de las aplicaciones del operador de convolución es la construcción de los llamados *operadores de aproximación de la identidad.*

Definición 3.3.1. *Una sucesión $\{\varphi_k\}$ de funciones continuas en $\mathbb{R}^n$ a valores reales se llama una* sucesión de Dirac *si satisface:*

DIR1 *Para la sucesión $\{\varphi_k\}$ tenemos que $\varphi_k \geqslant 0$ para todo k;*

DIR2 *Para cada k tenemos que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) \, \mathrm{d}x = 1$;*

DIR3 *Dado $\varepsilon, \delta > 0$ existe un k_0 tal que*

$$\int_{|x| \geqslant \delta} \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

para todo $k \geqslant k_0$.

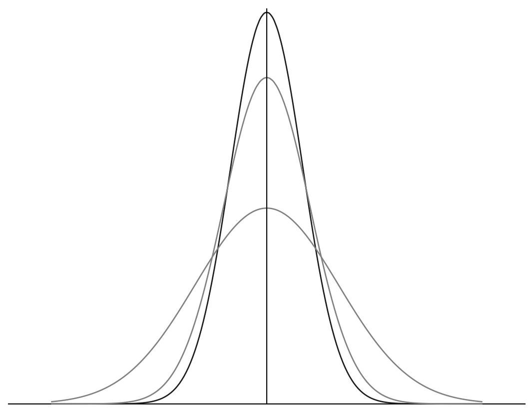

Figura 3.1: Ejemplo de sucesión de Dirac

EJERCICIO 3.3.2. Demuestre que las siguientes sucesiones de funciones son sucesiones de Dirac:

1. La *función de Landau*

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{c_k}\left(1 - x^2\right)^k, & \text{cuando } |x| \leqslant 1 \\ 0, & \text{cuando } |x| > 1 \end{cases}$$

   donde $c_k = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^k \,\mathrm{d}x$.

2. El *núcleo de Gauss*

$$\varphi_k(x) := k^{-n}\,(4\pi)^{-n/2}\,e^{-|x/k|^2/4}$$

   para $x \in \mathbb{R}^n$ y $k > 0$.

La utilidad de las sucesiones de Dirac se puede inferir del siguiente teorema

Teorema 3.3.1. *Sea f una función medible y acotada en $\mathbb{R}^n$. Sea K un conjunto compacto en el cual la función f es continua. Sea $\{\varphi_k\}$ una sucesión de Dirac. Entonces $\varphi_k * f$ converge a f uniformemente en el conjunto K.*

Demostración. Sea $x \in K$. Tenemos

$$\begin{aligned}
|(\varphi_k * f)(x) - f(x)| &= \left| \int \varphi_k(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y - \int f(x)\varphi_k(y)\,\mathrm{d}y \right| \\
&\leqslant \int \varphi_k(y) \big| f(x-y) - f(x) \big| \,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \left(\int\limits_{|y|<\delta} + \int\limits_{|y|\geqslant\delta} \right) \varphi_k(y) \big| f(x-y) - f(x) \big| \,\mathrm{d}y \\
&= I_{1,\delta} + I_{2,\delta},
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad es consecuencia de **DIR2**. Dado $\varepsilon > 0$, escojamos $\delta > 0$ tal que si $|y| < \delta$, entonces para todo $x \in K$ tenemos $|f(x-y)-f(x)| < \varepsilon$. Por la escogencia de $\delta > 0$ tenemos que $I_{1,\delta} < \varepsilon$. Para acotar $I_{2,\delta}$, observamos que **DIR3** nos garantiza que $I_{2,\delta} < 2\|f\|_\infty\,\varepsilon$ para k suficientemente grande. □

Podemos construir sucesiones de Dirac de una manera fácil conteniendo más "regularidad" utilizando el *molificador de Friedrichs*

Definición 3.3.2 (Molificador de Friedrichs)**.** *Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ una función que satisface las siguientes condiciones:*

1. $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$*;*
2. $\varphi(x) = 0$ *cuando* $|x| > 1$*; y*
3. $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$*.*

Definimos el molificador de Friedrichs φ_ε *como*

$$\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

Utilizando el molificador de Friedrichs podemos construir aproximaciones de la identidad con propiedades "suaves", basta con hacer convolución de la función con el molificador de Friedrichs. Tenemos el siguiente resultado para espacios de Lebesgue clásicos.

Teorema 3.3.2. *Sea φ_ε un molificador de Friedrichs, $1 \leqslant p < \infty$ y $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces:*

1. $\varphi_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;
2. $\|\varphi_\varepsilon * f\|_{L^p} \leqslant \|u\|_{L^p}$;
3. $\lim_{\varepsilon\to 0}\|\varphi_\varepsilon * u - u\|_{L^p} = 0$.

La demostración del teorema no es difícil. La idea de demostración del ítem 3 es como la demostración del Teorema 3.3.1 con los respectivos cambios.

Observación 3.3.1. A la función

$$(\varphi_\varepsilon *)f(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-u}{\varepsilon}\right) f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) f(x-u)\,\mathrm{d}u$$

a veces se llama, especialmente en la literatura soviética, *el ε-promedio de Sobolev*, .

El problema con extender el Teorema 3.3.2 para el caso variable es que la demostración utiliza el hecho de que la traslación es continua

$$\|\varphi_\varepsilon * u - u\|_p \leqslant \int\limits_\Omega \left\|\tau_{\varepsilon y} u - u\right\|_p |\varphi(y)|\,\mathrm{d}y,$$

lo que no es válido en general para el caso variable, véase §2.6.1. Afortunadamente es posible probar un resultado semejante para el espacio $L^{p(\cdot)}$ utilizando la acotación del operador maximal. Necesitaremos para ello algunos lemas auxiliares.

Lema 3.3.1. *Sea $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función radial, positiva y decreciente tal que $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\psi(r) = o(r^n)$ cuando $r \to 0$ y $r \to \infty$.*

Demostración. El resultado se sigue de la siguiente estimación

$$\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \geqslant \int\limits_{r/2\leqslant|x|\leqslant r} \psi(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \psi(r) \int\limits_{r/2\leqslant|x|\leqslant r} \mathrm{d}x = c\psi(r)r^n. \qquad \square$$

Lema 3.3.2. *Sea $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Entonces tenemos la siguiente estimación*

$$\int\limits_{B(0,r)} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant v_n r^n Mf(0)$$

donde M es la función maximal y v_n es el volumen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$ dado por $v_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$.

Demostración. La prueba es directa, pues

$$\int\limits_{B(0,r)} f(x)\,\mathrm{d}x = |B(0,r)|\frac{1}{|B(0,r)|}\int\limits_{B(0,r)} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant |B(0,r)|Mf(0). \qquad \square$$

Lema 3.3.3. *Sea φ una función positiva, radial (i.e. $\varphi(x) = \varphi(|x|)$), decreciente en $\mathbb{R}_+$ e integrable. Entonces*

$$\sup_{\varepsilon>0} |(\varphi_\varepsilon *)f(x)| \leqslant \|\varphi\|_{L^1} Mf(x).$$

Demostración. Vamos primero a demostrar que $(\varphi * f)(0) \leqslant \|\varphi\|_{L^1} Mf(0)$ y demostrar el resultado más general utilizando este caso particular. Sea $Mf(0) < \infty$ y definamos las siguientes funciones $\lambda(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(rx)\,\mathrm{d}\sigma(x)$ y $\Lambda(r) = \int_{\mathbb{B}(0,r)} f(x)\,\mathrm{d}x$, donde $\mathbb{S}^{n-1}$ es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{B}(0,r)$ denota la bola centrada en cero de radio r en $\mathbb{R}^n$. Entonces haciendo un cambio de variables a coordenadas esféricas tenemos

$$\Lambda(r) = \int_0^r \lambda(t)t^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

Luego

$$\begin{aligned}
(\varphi * f)(0) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lambda(r)\varphi(r)r^{n-1}\,\mathrm{d}r \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_\varepsilon^N \varphi(r)\,\mathrm{d}(\Lambda(r)) \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} [\Lambda(N)\varphi(N) - \Lambda(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)] - \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_\varepsilon^N \Lambda(r)\,\mathrm{d}(\varphi(r)).
\end{aligned}$$

Utilizando los Lemmas 3.3.1 y 3.3.2, la estimación anterior y (3.18) tenemos

$$\begin{aligned}(\varphi * f)(0) &= \int_0^\infty \Lambda(r)\,\mathrm{d}\big(-\varphi(r)\big) \leqslant v_n Mf(0) \int_0^\infty r^n\,\mathrm{d}(-\varphi(r)) \\ &\leqslant \|\varphi\|_{L^1} Mf(0).\end{aligned}$$

pues $v_n = \omega_{n-1}/n$, lo que demuestra el resultado para $x = 0$ and $\varepsilon = 1$. Sea ahora $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario, entonces tomando τ_h como la función traslación: $\tau_h \circ f(x) = f(x-h)$, tenemos

$$(\varphi * f)(x) = \big(\varphi * (\tau_x \circ f)\big)(0) \leqslant \|\varphi\|_{L^1} M(\tau_x \circ f)(0) = \|\varphi\|_{L^1} Mf(x). \quad \square$$

EJERCICIO 3.3.3. Demuestre que, utilizando las hipótesis del Lema 3.3.3, tenemos

$$\int_0^\infty r^n\,\mathrm{d}(-\varphi(r)) = \frac{n}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{3.18}$$

donde $\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ es el área de la superficie de la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$.

Después de una preparación, llegamos al teorema más importante:

Teorema 3.3.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Sea $p \in LH_0(\Omega)$. Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y sea φ_ε el molificador de Friedrichs. Supongamos que el menor mayorante radial decresciente de φ es integrable, i.e., $\psi(x) = \sup_{|y|\geqslant|x|} |\varphi(y)|$ entonces $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,\mathrm{d}x = A < \infty$. Entonces*

1. *$\sup_{\varepsilon>0} |(f * \varphi_\varepsilon)(x)| \leqslant AMf(x)$ para toda función $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$;*
2. *Si $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$, entonces $\lim_{\varepsilon\to 0+} (f * \varphi_\varepsilon)(x) = f(x)$ en casi todo punto en Ω para toda $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$;*
3. *Para toda $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tenemos $f * \varphi_\varepsilon \to f$ en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ cuando $\varepsilon \to 0+$;*
4. *Para toda $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tenemos la siguiente estimación (uniforme con respecto a $\varepsilon > 0$)*

$$\|f * \varphi_\varepsilon\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \lesssim \|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

Demostración. Como Ω es conjunto acotado, tenemos $L^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, lo que implica que las estimaciones puntuales (a) y (b) son consecuencia de la Proposición 3.1.2. Para demostrar (c), para $x \in \Omega$ fijo, tenemos

$$\begin{aligned} |(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)|^{p(x)} &\lesssim (|(f * \varphi_\varepsilon)(x)| + |f(x)|)^{p(x)} \\ &\lesssim (AMf(x) + |f(x)|)^{p(x)} \end{aligned}$$

lo que implica que $|(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)|^{p(x)} \in L^1(\Omega)$. Utilizando (b) con el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0+} \rho_{p(\cdot)}(f * \varphi_\varepsilon - f) &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\Omega |(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \lim_{\varepsilon \to 0+} |(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}x \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo que implica convergencia en norma debido al Lema 2.3.1; es decir, $\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. Para demostrar (d) tomamos en consideración el Teorema 3.1.5(1) y el hecho de que el espacio de Lebesgue con exponente variable es ideal (véase Observación 2.1.3). $\square$

Observación 3.3.2. El Teorema 3.3.3 sigue siendo válido para $\Omega = \mathbb{R}^n$ cuando $p \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, véase [9].

Para demostrar una aplicación del Teorema 3.3.3, vamos a estudiar la acotación del operador potencial de Bessel.

3.3.2. Operador potencial de Bessel

El *operador potencial de Bessel* $\mathcal{B}^\alpha$, de orden $\alpha > 0$, se define como

$$\mathcal{B}^\alpha \varphi(x) := \int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(x - y)\varphi(y) \, \mathrm{d}y,$$

donde G_α es el llamado *núcleo de Bessel* dado a través de su transformada de Fourier

$$\widehat{G}_\alpha(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}},$$

y φ se llama la *densidad* del potencial de Bessel.

Tenemos una fórmula exacta para el núcleo de Bessel, a saber

$$G_\alpha(x) = C(\alpha, d) \int_0^\infty e^{-\frac{\pi|x|^2}{t} - \frac{t}{4\pi}} t^{\frac{\alpha-d}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $C(\alpha, d) > 0$ es una cierta constante (ver, por ejemplo, [129, §V.3.1.]), lo que implica que G_α es una función no-negativa, radial y decreciente. Además, G_α es integrable con $\|G_\alpha\|_1 = \widehat{G}_\alpha(0) = 1$ y se puede demostrar que puede ser representada con la *función de McDonald*:

$$G_\alpha(x) = C(\alpha, d)\, |x|^{\frac{\alpha-d}{2}} K_{\frac{d-\alpha}{2}}(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Tenemos la siguiente estimación del núcleo de Bessel

$$G_\alpha(x) \sim \begin{cases} c(\alpha, d)\, |x|^{\alpha-d}, & \text{si } 0 < \alpha < d \\ c(d)\, \ln\left(\frac{1}{|x|}\right), & \text{si } \alpha = d \\ c(\alpha, d), & \text{si } \alpha > d. \end{cases}$$

cuando $|x| \to 0$, y

$$G_\alpha(x) \sim c(\alpha, d)\, |x|^{\frac{\alpha-d-1}{2}}\, e^{-|x|}$$

cuando $|x| \to \infty$.
El siguiente resultado nos garantiza la acotación del operador potencial de Bessel en los espacio de Lebesgue con exponente variable.

Teorema 3.3.4. *Sea $p \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, entonces el operador potencial de Bessel $\mathcal{B}^\alpha$ es acotado en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Como el núcleo G_α es radial, decreciente e integrable, por el Teorema 3.3.3 y la Observación 3.3.2, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|\mathcal{B}^\alpha \varphi\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|G_\alpha * \varphi\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \|\varphi\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $\varphi \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

3.3.3. Operador singular integral de Calderón-Zygmund

Definición 3.3.3. *Un operador singular integral de Calderón-Zygmund T es formalmente definido por la fórmula*

$$Tf(x) := \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

con núcleo $K(x) = \frac{\Phi(x)}{|x|^n}$, donde Φ es homogénea de grado cero, infinitamente diferenciable en la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$ y $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Phi = 0$. Esta integral se entiende en el sentido del valor principal.

Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $t > 0$, este operador satisface la siguiente desigualdad

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > t\}| \leqslant \frac{(12)^n}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

La desigualdad anterior es llamada *desigualdad débil* $(1,1)$ y es equivalente a decir que T es nunca acotado en $L^1(\mathbb{R}^n)$.
El siguiente resultado nos proporciona una cota puntual para el operador de Calderón-Sygmund.

Teorema 3.3.5. *Si $0 < \delta < 1$, entonces para toda $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ existe una constante $c_{\delta,n}$ tal que*

$$(Tf)_\delta^\sharp(x) \leqslant c_{\delta,n} Mf(x), \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Teorema 3.3.6 (Acotación del operador de Calderón-Zygmund)**.** *Si $p, p' \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una constante c_p tal que para toda $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|Tf\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant c_p \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

Demostración. Sea $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Primero probemos que para cualquier función $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(Tf)(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant c_n \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)Mg(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.19}$$

En efecto, esto se obtiene reemplazando φ por Tf en el Teorema 3.1.3 y usando la Proposición 3.1.1 junto con el Teorema 3.3.5. Note que

podemos aplicar el Teorema 3.1.3 ya que el operador T es de tipo débil (1,1).
Ahora, de la desigualdad (3.19), la desigualdad de Hölder (2.32) y la condición $p, p' \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ se sigue que

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(Tf)(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant & c_n r_p \|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \|Mg\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)} \\ \leqslant & c_p \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)}\end{aligned}$$

donde $c_p = c_n r_p \|M\|_{\mathcal{B}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))} \|M\|_{\mathcal{B}(L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n))}$. Así, de la equivalencia de normas dada en §2.5 tenemos

$$\|Tf\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \|Tf\|^0_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant c_p \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

De esta manera el teorema se sigue de la desigualdad anterior y el Lema 2.4.2. □

Observación 3.3.3. L. Diening en [32] obtiene una nueva caracterización de la clase $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. En particular, $p \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ si, y solamente si, $p' \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Además, $p \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ implica que $(p/s)' \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ para algún $s \in (0,1)$. Así, la condición $p' \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ en el Teorema 3.3.6 puede ser removida.

3.3.4. Operador singular integral de Cauchy

Uno de los operadores singulares integrales fundamentales es el operador singular integral de Cauchy.

Definición 3.3.4. *Para una función $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, se define el operador singular integral de Cauchy mediante*

$$(Sf)(x) = \frac{1}{\pi i}\mathrm{p.v.}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau)}{\tau - x}\,\mathrm{d}\tau \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Sf puede ser considerado como la convolución de f con $(\pi i x)^{-1}$. Del Teorema 3.3.6 se obtiene lo siguiente:

Teorema 3.3.7 (Acotación del operador singular integral de Cauchy)**.** *Sea $p \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, entonces el operador singular de Cauchy es acotado en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$.*

El operador singular de Cauchy es una involución; es decir, $S^2 = I_{p(\cdot)}$ ($I_{p(\cdot)}$ el operador identidad en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$) lo cual nos permite definir las proyecciones complementarias generadas por S mediante

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(I_{p(\cdot)} \pm S). \tag{3.20}$$

EJERCICIO 3.3.4. Demuestre que $P_{\pm}$ son proyecciones complementarias. Esto es, $P_{\pm}$ satisfacen que

$$P_+P_- = P_-P_+ = 0, \quad P_+ + P_- = I_{p(\cdot)}, \quad P_+ - P_- = S.$$

El operador de multiplicación por una función ϕ se define mediante la fórmula $(\phi I_{p(\cdot)})f = \phi I_{p(\cdot)} f$. Por simplicidad denotaremos esto por $(\phi I_{p(\cdot)})f = \phi f$. Para $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ que satisface (2.3) y $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ este operador es lineal y continuo en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$; es decir $\phi I_{p(\cdot)} \in \mathcal{B}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}))$ y además

$$\|\phi I_{p(\cdot)}\|_{\mathcal{B}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}))} \leqslant \|\phi\|_\infty.$$

Por lo tanto, el operador (lineal) singular integral definido como

$$A := aI_{p(\cdot)} + bS$$

está bien definido y es acotado en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$, para $p \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. De forma más general, definimos el operador acotado singular integral en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ por la fórmula

$$aP_+ + bP_-, \quad a, b \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

3.3.5. Operadores de Wiener-Hopf-Hankel

Definición 3.3.5. *Para $p \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, una función $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ es llamada un multiplicador de Fourier en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ si el operador $\mathcal{F}^{-1}\phi \cdot \mathcal{F}$ actuando en $L^2(\mathbb{R}) \cap L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$, extiende unívocamente a un operador acotado en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$. El conjunto de todos los multiplicadores de Fourier es denotado por $\mathfrak{M}_p$.*

Sea $L_+^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ el subespacio de $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ formado por todas las funciones cuyo soporte está en la clausura de $\mathbb{R}_+$ y $L_-^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ el subespacio de $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ formado por todas las funciones con soporte en la clausura de $\mathbb{R}_-$. Esto nos permite definir en espacios de Lebesgue con exponente variable los bien conocidos operadores de Wiener-Hopf, los cuales fueron introducidos por N. Wiener y E. Hopf en 1931 [136] en relación con la solución de ecuaciones integrales cuyo núcleo núcleo depende solo de la diferencia de los argumentos:

$$cf(x) + \int_0^\infty k(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = g(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Definición 3.3.6. *Un operador de Wiener-Hopf clásico se define como*

$$W_\phi = r_+\mathcal{F}^{-1}\phi \cdot \mathcal{F} : L_+^{p(\cdot)}(\mathbb{R}) \longrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}_+), \tag{3.21}$$

donde r_+ es el operador restricción de $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}_+)$ y $\phi \in \mathfrak{M}_p$ es llamado símbolo de Fourier.

De la misma manera, el operador integral de Hankel asociado a la ecuación

$$cf(x) + \int_0^\infty k(x+y)f(y)\,\mathrm{d}y = g(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

se define como:

Definición 3.3.7. *Para $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$, el operador de Hankel es definido mediante la regla*

$$H_\phi = r_+\mathcal{F}^{-1}\phi \cdot \mathcal{F}J : L_+^{p(\cdot)}(\mathbb{R}) \longrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}_+), \tag{3.22}$$

con $\phi \in \mathfrak{M}_p$ y J el operador de reflexión en $\mathbb{R}$ dado por la fórmula

$$J\varphi(x) = \varphi(-x).$$

Observación 3.3.4. Debido a que $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ no es invariante bajo traslaciones, el operador de reflexión J está bien definido para índices $\overline{p}(x) = \max\{p(x), p(-x)\}$ (véase [108, Lemma 2]); por lo tanto, los operadores de Hankel están definidos únicamente en espacios con exponente variable para este tipo de funciones índices.

Finalmente, otra clase de operadores de tipo convolución que juega un papel importante en varias aplicaciones tales como *problemas de difracción de ondas*, *procesamiento digital de señales* y *predicción lineal* entre otras (ver por ejemplo [20, 45, 98] y algunas de sus referencias), son los llamados *operadores de Wiener-Hopf-Hankel*, los cuales son operadores de Wiener-Hopf más Hankel y operadores de Wiener-Hopf menos Hankel, es decir:

$$W_\phi \pm H_\phi : L_+^{p(\cdot)}(\mathbb{R}) \longrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}_+). \tag{3.23}$$

Por otro lado, note que el operador proyección complementaria P_+ se puede escribir como

$$P_+ = \mathcal{F}\ell_0 r_+ \mathcal{F}^{-1},$$

donde ℓ_0 es el operador extensión por cero de $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}_+)$ en $L_+^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$. Así, las condiciones para la acotación de los operadores de Wiener-Hopf-Hankel en los espacios de Lebesgue variables son las mismas condiciones para la acotación de la proyección P_+, por lo tanto del Teorema 3.3.7 obtenemos lo siguiente:

Teorema 3.3.8. *Sean $p \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, $\overline{p} = \max\{p(x), p(-x)\}$ y $\phi \in \mathfrak{M}_p$, entonces el operador de Wiener-Hopf W_ϕ y el operador de Hankel H_ϕ son acotados de $L_+^{\overline{p}(\cdot)}(\mathbb{R})$ en $L^{\overline{p}(\cdot)}(\mathbb{R}_+)$.*

Corolario 3.3.1. *Las condiciones del teorema anterior son necesarias y suficientes para que los operadores de Wiener-Hopf más Hankel y Wiener-Hopf menos Hankel sean acotados en los espacios de Lebesgue con exponente variable.*

3.4. Notas y referencias bibliográficas

El operador maximal de Hardy-Littlewood fue introducido por Hardy y Littlewood en [59] en el caso unidimensional y fue extendido a $\mathbb{R}^n$ por Wiener en [135]. Este operador toma importancia con el trabajo de Calderón y Zygmund [19] sobre operadores integrales.
En la Sección 3.4 de [28] se muestra una caracterización geométrica de la condición $LH_0(\Omega)$, así como la aplicabilidad de la condición $LH_\infty(\Omega)$.
Condiciones suficientes para garantizar que una función medible $p \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ para espacios de Lebesgue variable ponderados son dadas en [76].
Los Teoremas 3.2.1 y 3.2.2 aparecen originalmente publicadas en [65].
El Corolario 3.2.2 fue establecido por V. Rabinovich y S. Samko en [111], su prueba no se basa en la cota (3.13) sino en una cota puntual

más precisa para el caso de estos espacios. En [68], A. Yu. Karlovich y I.M. Spitkovsky prueban la acotación de $\mathrm{op}(a)$ en espacios de Lebesgue con exponente variable para símbolos $a \in S^{n(\rho-1)}_{\rho,\delta}$ con $0 < \rho \leqslant 1$ y $0 \leqslant \delta < 1$, en ese caso, como en el Teorema 3.2.1, la prueba se basa en (3.13), la desigualdad de Fefferman-Stein y la propiedad de auto-mejora del operador maximal de Hardy-Littlewood pero en su versión para $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.
La clase de operadores de Calderón-Zygmund aquí consideradas es en el sentido de R. Coifman y Y. Meyer (comparar [26]). Sin embargo, el Teorema 3.3.5 se puede extender a operadores de tipo *débilmente fuertemente singulares de Calderón-Sygmund* (ver, [10, 11, 50]), así como a algunos operadores pseudodiferenciales en la *clase de Hörmander* [62]. El Teorema 3.3.6 fue probado por L. Diening y M. Růžička en [34] asumiendo que $p \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ y $(p/s)' \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ para algún $s \in (0, 1)$. La prueba aquí presentada difiere un poco de esta y aparece publicada en [66]. Este teorema puede ser probado en el contexto de espacios de Banach de funciones medibles haciendo algunas modificaciones menores a la prueba aquí dada, puesto que si $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de funciones medibles reflexivo, entonces $L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ y en su espacio asociado $\mathcal{X}'(\mathbb{R}^n)$ [13]. La acotación del operador singular integral de Cauchy en espacios ponderados de Lebesgue variable, con pesos que satisfacen una condición general de tipo Hunt–Muckenhoupt–Wheeden, fue recientemente probada en [67].

Capítulo 4

Solubilidad de ecuaciones singulares integrales sobre curvas

En este capítulo estudiaremos condiciones de solubilidad de ecuaciones singulares integrales, primero en espacios de Banach de funciones medibles sobre curvas simples y luego mostraremos, como consecuencia, el caso particular de espacios de Lebesgue con exponente variable sobre este mismo tipo de curvas. Para alcanzar nuestra meta utilizaremos un enfoque propio de la teoría de operadores mediante la llamada alternativa de Fredholm.

4.1. La propiedad de Fredholm

Dado un operador lineal y acotado $\mathbb{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$, el conjunto $\ker \mathbb{A}$ de todas las soluciones de la ecuación homogénea

$$\mathbb{A}x = 0 \tag{4.1}$$

es llamado el *núcleo* del operador $\mathbb{A}$. La dimensión del subespacio $\ker \mathbb{A}$; es decir, el número de soluciones linealmente independientes de la ecuación (4.1) (llamado *nulidad*) se denota por $\alpha(\mathbb{A})$ y se escribe

$$\alpha(\mathbb{A}) := \dim \ker \mathbb{A}.$$

Un operador acotado $\mathbb{A}$ es llamado *normalmente soluble* (en el sentido de Hausdorff) si la ecuación

$$\mathbb{A}x = y$$

es soluble solo para aquellos elementos y que son ortogonales a la ecuación $\mathbb{A}^*u = 0$, donde $\mathbb{A}^*$ es el operador conjugado $\mathbb{A}^* : Y^* \longrightarrow X^*$ definido por la relación

$$(\mathbb{A}^*u)x = u(\mathbb{A}x).$$

Es decir, $\mathbb{A}^*u = 0$ si, y sólo si, $u(y) = 0$ para todas las funciones $u \in \ker \mathbb{A}^*$. Esto es equivalente a decir que el conjunto imagen de $\mathbb{A}$, denotado por $\operatorname{Im} \mathbb{A}$ y definido como $\operatorname{Im} \mathbb{A} = \{\mathbb{A}x \ : \ x \in X\}$ es un conjunto cerrado. Para un operador $\mathbb{A}$ normalmente soluble, el Cokernel de $\mathbb{A}$, $\operatorname{Coker} \mathbb{A}$, se define como el cociente

$$\operatorname{Coker} \mathbb{A} = Y / \operatorname{Im} \mathbb{A}.$$

La dimensión de este subespacio (llamada *deficiencia*) se denota por

$$\beta(\mathbb{A}) := \dim \operatorname{Coker} \mathbb{A}.$$

Los números enteros $\alpha(\mathbb{A})$ y $\beta(\mathbb{A})$ frecuentemente son llamados los *números de defecto* de $\mathbb{A}$.

Definición 4.1.1. *Un operador $\mathbb{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ se dice que admite una regularización a la izquierda si existe un operador $\mathbb{R}_i \in \mathcal{B}(Y, X)$ tal que*

$$\mathbb{R}_i \mathbb{A} = I_X + T_X,$$

donde I_X es el operador identidad y T_X un operador compacto en X. El operador $\mathbb{R}_i$ es llamado un regularizador a la izquierda *de $\mathbb{A}$. Decimos que el operador $\mathbb{A}$ admite una regularización a la derecha si existe un operador $\mathbb{R}_d \in \mathcal{B}(Y, X)$ tal que*

$$\mathbb{A}\mathbb{R}_d = I_Y + T_Y,$$

con I_Y el operador identidad y T_Y un operador compacto en Y. En este caso $\mathbb{R}_d$ es llamado un regularizador a la derecha *de $\mathbb{A}$. Si un operador $\mathbb{A}$ admite ambas regularizaciones entonces se dice que $\mathbb{A}$ admite una regularización.*

Definición 4.1.2. *Un operador $\mathbb{A}$ es llamado un* operador de Fredholm,[1] *y se denota por $\mathbb{A} \in \Phi$, si $\alpha(\mathbb{A})$ y $\beta(\mathbb{A})$ son finitos. En este caso, el* índice de Fredholm *se define como el número*

$$\operatorname{Ind} \mathbb{A} := \alpha(\mathbb{A}) - \beta(\mathbb{A}).$$

El operador $\mathbb{A}$ se dice semi Fredholm si al menos uno de estos números $\alpha(\mathbb{A})$ o $\beta(\mathbb{A})$ es finito. Escribiremos $\mathbb{A} \in \Phi_+$ si $\alpha(\mathbb{A}) < \infty$ y $\mathbb{A} \in \Phi_-$ si $\beta(\mathbb{A}) < \infty$. Así tenemos que $\Phi = \Phi_+ \cap \Phi_-$.

Lo anterior nos permite estudiar la solubilidad de la ecuación (4.1) mediante la llamada *Alternativa de Fredholm.* Para una ecuación $\mathbb{A}x = y$ con $\mathbb{A}$ un operador de Fredholm con índice de Fredholm cero, una de las siguientes alternativas se satisface:

(a) La ecuación homogénea $\mathbb{A}x = 0$ no tiene soluciones linealmente independientes ($\alpha(\mathbb{A}) = 0$) y entonces la ecuación $\mathbb{A}x = y$ es soluble única e incondicionalmente.

(b) La ecuación homogénea $\mathbb{A}x = 0$ tiene $\alpha(\mathbb{A})$ soluciones no triviales y para la solubilidad de la ecuación no homogénea $\mathbb{A}x = y$ es necesario y suficiente que $\alpha(\mathbb{A})$ $(= \beta(\mathbb{A}))$ condiciones de solubilidad para $u(y) = 0$ se satisfagan.

Para establecer los criterios de Fredholm para la clase de operadores singulares integrales aquí considerada haremos uso de las siguientes bien conocidas propiedades cuyas demostraciones pueden ser vistas en [102].

Propiedad 4.1.1. *Para un operador $\mathbb{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ las siguientes son equivalentes*

i.) $\mathbb{A} \in \Phi$.

ii.) $\mathbb{A}$ *admite una regularización.*

Propiedad 4.1.2 (Atkinson)**.** *Si $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \Phi$, entonces $\mathbb{B}\mathbb{A} \in \Phi$ y*

$$\operatorname{Ind} \mathbb{B}\mathbb{A} = \operatorname{Ind} \mathbb{A} + \operatorname{Ind} \mathbb{B}.$$

Propiedad 4.1.3. *Si $\mathbb{A} \in \Phi$ y T es un operador compacto, entonces $\mathbb{A} + T \in \Phi$ y*

$$\operatorname{Ind}(\mathbb{A} + T) = \operatorname{Ind} \mathbb{A}.$$

[1] En la literatura soviética estos operadores son llamados de Noether y por operadores de Fredhlom se entiende aquellos tales que $\alpha(\mathbb{A}) = \beta(\mathbb{A}) < \infty$.

Propiedad 4.1.4. *Si* $\mathbb{AB} \in \Phi$ *y* $\mathbb{BA} \in \Phi$*, entonces* $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \Phi$*.*

Propiedad 4.1.5. *Para todo operador* $\mathbb{A} \in \Phi_{\pm}$ *existe un número* $\varrho > 0$ *tal que para* $\mathbb{B} \in \mathcal{B}(X, Y)$ *con* $\|\mathbb{B}\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leqslant \varrho$ *se tiene que* $\mathbb{A} + \mathbb{B} \in \Phi_{\pm}$ *y*

$$\alpha(\mathbb{A} + \mathbb{B}) \leqslant \alpha(\mathbb{A}), \quad \beta(\mathbb{A} + \mathbb{B}) \leqslant \beta(\mathbb{A}), \quad \operatorname{Ind}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \operatorname{Ind}\mathbb{A}.$$

Propiedad 4.1.6 (Yood)**.** *Si* $\mathbb{AB} \in \Phi_{+}$ *entonces* $\mathbb{B} \in \Phi_{+}$*. Si* $\mathbb{AB} \in \Phi_{-}$ *entonces* $\mathbb{A} \in \Phi_{-}$*. Si* $\mathbb{AB} \in \Phi$ *y* $\alpha(\mathbb{A}) < \infty$ *o* $\beta(\mathbb{B}) < \infty$*, entonces* $\mathbb{A}$ *y* $\mathbb{B}$ *son operadores de Fredholm.*

Propiedad 4.1.7. *Si uno de los operadores* $\mathbb{A}$ *o* $\mathbb{B}$ *es de Fredholm y* $\mathbb{AB} \in \Phi$*, entonces el operador restante también es de Fredholm.*

Para un estudio sistemático sobre la propiedad de Fredholm recomendamos [61].

4.2. Operadores singulares integrales en espacios de Banach de funciones $\mathcal{X}(\Gamma)$

En esta sección estudiaremos la propiedad de Fredholm de operadores singulares integrales definidos sobre curvas de Lyapunov,

$$\mathcal{A}\varphi(t) := u(t)\varphi(t) + \frac{v(t)}{\pi i}\text{p.v.}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,\mathrm{d}\tau = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{4.2}$$

o, alternativamente

$$\mathcal{A} = aP_{+} + bP_{-}, \quad a := u + v,\ b := u - v,$$

donde $P_{\pm}$ son las proyecciones complementarias dadas en (3.20). Consideraremos los coeficientes u y v del operador $\mathcal{A}$ funciones continuas a valores complejos ($u, v \in C(\Gamma)$) así como también funciones acotadas continuas a trozos con un número finito de saltos ($u, v \in PC(\Gamma)$). Así, por definición una función $a \in PC(\Gamma)$ si, y solamente si, $a \in L^{\infty}(\Gamma)$ y los límites laterales

$$a(t_0 - 0) := \lim_{t \to t_0^-} a(t), \quad a(t_0 + 0) := \lim_{t \to t_0^+} a(t)$$

existen para cada $t_0 \in \Gamma$.

Recordemos que una curva simple orientada Γ (abierta o cerrada) en el plano complejo es llamada una *curva de Lyapunov* si la tangente a Γ en cada punto t existe y forma con el eje real un ángulo $\theta(t)$ que satisface la condición de Hölder:

$$|\theta(t_1) - \theta(t_2)| \leqslant A|t_1 - t_2|^{\mu}, \quad A > 0, \quad 0 < \mu < 1.$$

Una curva cerrada de Lyapunov Γ es la frontera de un dominio simple acotado D^+ en el plano complejo. Por simplicidad asumiremos que $z = 0 \in D^+$. Por D^- denotaremos el dominio simple conexo $\mathbb{C} \setminus (D^+ \cup \Gamma)$. La curva se asume orientada en el sentido contrario a las agujas del reloj. Una curva compuesta consiste de un número finito de curvas cerradas de Lyapunov sin punto comunes.

4.3. Teoría de Fredholm para operadores singulares integrales en $\mathcal{X}(\Gamma)$

La teoría de ecuaciones singulares con coeficientes en $C(\Gamma)$ y en $PC(\Gamma)$ es bien conocida en los clásicos espacios de Lebesgue (ver por ejemplo [16, 52, 53, 90, 102]) así como en otros espacios de funciones integrables. Existen diversas técnicas para estudiar la propiedad de Fredholm de operadores singulares integrales con coeficientes continuous a trozos; por ejemplo mediante "técnicas de localización" de Simonenko [128] (ver también [15]), Allan-Douglas [5, 35] y transformada de Mellin [109, 113] (ver también [16]). Aquí para este caso presentaremos la propiedad de Fredholm para el operador $\mathcal{A}$ mediante el llamado *esquema de investigación de Gakhov-Muskhelishvili-Khvedelidze-Gohberg-Krupnik.*
Consideraremos $\mathcal{X}(\Gamma)$ con $\Gamma = \{t \in \mathbb{C} : \ t = t(s), \ 0 \leqslant s \leqslant \ell\}$ una curva simple de Jordan rectificable de longitud finita ℓ que satisface las siguientes condiciones las cuales nos permitirá formular la propiedad de Fredholm de $\mathcal{A}$ en el caso de coeficientes continuos.

$$C(\Gamma) \subset \mathcal{X}(\Gamma) \subset L^1(\Gamma). \tag{4.3}$$

$$\|af\|_{\mathcal{X}(\Gamma)} \leqslant \sup_{t\in\Gamma} |a(t)| \cdot \|f\|_{\mathcal{X}(\Gamma)}, \quad \text{para } a \in L^{\infty}(\Gamma). \tag{4.4}$$

El operador S es acotado en $\mathcal{X}(\Gamma)$. (4.5)

$C^{\infty}(\Gamma)$ es denso en $\mathcal{X}(\Gamma)$. (4.6)

Para el caso de coeficientes continuos a trozos asumiremos además los siguientes axiomas:

Axioma 4.1. Para el espacio $\mathcal{X}(\Gamma)$ existen dos funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ $0 < \alpha(t), \beta(t) < 1$ tales que el operador

$$|t-t_0|^{\gamma(t_0)} S |t-t_0|^{-\gamma(t_0)} I_{\mathcal{X}(\Gamma)}, \quad t_0 \in \Gamma$$

es acotado en el espacio $\mathcal{X}(\Gamma)$ para todo $\gamma(t_0)$ tal que

$$-\alpha(t_0) < \gamma(t_0) < 1 - \beta(t_0)$$

y es no acotado en $\mathcal{X}(\Gamma)$ si $\gamma(t_0) \notin (-\alpha(t_0), 1-\beta(t_0))$. Las funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son llamadas *funciones índices* del espacio $\mathcal{X}(\Gamma)$.

Axioma 4.2. Para cualquier $\gamma < 1 - \beta(t_0)$ el embebimiento $\mathcal{X}(\Gamma, |t-t_0|^\gamma) \subset L^1(\Gamma)$ es válido y $C^\infty(\Gamma)$ es denso en $\mathcal{X}(\Gamma, |t-t_0|^\gamma)$ para cualquier $t_0 \in \Gamma$, donde $\mathcal{X}(\Gamma, |t-t_0|^\gamma) = \{f : \ |t-t_0|^\gamma f(t) \in \mathcal{X}(\Gamma)\}$.

Los siguientes resultados nos ayudaran a establecer los criterios de Fredholm para el operador $\mathcal{A}$.

Lema 4.3.1. *Sea el espacio $\mathcal{X}(\Gamma)$ que satisface* (4.3) *y* (4.4) *y sean $t_1, \ldots, t_n \in \Gamma$. Entonces*

$$\prod_{k=1}^{n} |t-t_k|^{\gamma_k} \in \mathcal{X}(\Gamma) \tag{4.7}$$

para todo $\gamma_k > -\alpha_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración. Primero consideremos $n = 1$. Si $\gamma_1 \geqslant 0$ la inclusión (4.7) es obvia debido al embebimiento $C(\Gamma) \subset \mathcal{X}(\Gamma)$.
Sea $\gamma_1 \leqslant 0$. Como $1 \in \mathcal{X}(\Gamma)$, del Axioma 4.1 se sigue que $|t-t_1|^{\gamma_1} S(|\tau - t_1|^{-\gamma_1})(t) \in \mathcal{X}(\Gamma)$. Como $-\gamma_1 \geqslant 0$ tenemos que $S(|\tau-t_1|^{-\gamma_1})(t)$ es una función continua, no cero en el punto $y = t_1$. Entonces, de la condición (4.4) tenemos que $|t-t_1|^{\gamma_1} \in \mathcal{X}(\Gamma)$.
El caso $n > 1$ se reduce al caso $n = 1$ al introducir una partición de la unidad en Γ: $1 \equiv \sum_{j=1}^{n} \omega_j(t)$ con $\omega_j(t) \in C^\infty(\Gamma)$ y $\omega_j(t) \equiv 0$ en una vecindad pequeña del punto t_j. Así,

$$\prod_{k=1}^{n} |t-t_k|^{\gamma_k} = \sum_{j=1}^{n} |t-t_j|^{\gamma_j} a_j(t) \tag{4.8}$$

con $a_j(t) \in C^\infty(\Gamma)$ tal que $\prod_{k=1}^n |t-t_k|^{\gamma_k} \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ en vista del caso 1 y (4.4). $\square$

Sea ahora $\mathfrak{X}(\Gamma,\varrho) = \{f : \ \varrho(t)f(t) \in \mathfrak{X}(\Gamma)\}$, con el peso de tipo Khvedelidze $\varrho(t) = \prod_{k=1}^{n} |t-t_k|^{\gamma_k}$, $t_1, \dots t_n \in \Gamma$.

Lema 4.3.2. *Sea $\mathfrak{X}(\Gamma)$ un BFS que satisface* (4.3), (4.4) *y los Axiomas 4.1 y 4.2. Entonces el espacio $\mathfrak{X}(\Gamma,\varrho)$ satisface las condiciones* (4.3) *y* (4.4) *si*

$$-\alpha(t_k) < \gamma_k < 1-\beta(t_k), \quad k = 1,\dots,n.$$

Demostración. Para verificar las condiciones (4.3) y (4.4) para el espacio $\mathfrak{X}(\Gamma,\varrho)$ observe que $\varrho \cdot C(\Gamma) \subset \mathfrak{X}(\Gamma)$ por el Lema 4.3.1, lo cual significa que $C(\Gamma) \subset \mathfrak{X}(\Gamma,\varrho)$. Introduciendo una partición de la unidad como el en Lema anterior y del Axioma 4.2 tenemos que $\mathfrak{X}(\Gamma,\varrho) \subset L^1(\Gamma)$.
La condición (4.4) para $\mathfrak{X}(\Gamma,\varrho)$ se sigue obviamente de la validez para $\mathfrak{X}(\Gamma)$. La condición (4.5) está postulada en el Axioma 4.1, el paso del peso $|t-t_k|^{\gamma_k}$ al peso de tipo Khvedelidze $\varrho(t)$ se justifica mediante el uso de una partición de la unidad como en (4.8). Finalmente, la condición (4.4) también está postulada en el Axioma 4.1 pues el espacio $\mathfrak{X}(\Gamma,\varrho)$ es la suma algebraica de los espacios $\mathfrak{X}(\Gamma, |t-t_k|^{\gamma_k})$, $k = 1, 2\dots, n$. $\square$

4.3.1. Propiedad de Fredholm para $\mathcal{A}$ con coeficientes continuos

Probaremos un criterio de Fredholm para el operador $\mathcal{A}$ en $\mathfrak{X}(\Gamma)$ con coeficientes continuos. Haremos la demostración por casos utilizando el hecho de que las funciones continuas pueden ser aproximadas por funciones en el álgebra de Banach de las funciones racionales.
Primero recordemos lo siguiente: Para una función $a \in C(\Gamma)$ que no se anule en una curva cerrada simple Γ, cualquier función $b : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $a = |a|e^{ib}$ es llamada un *argumento continuo* de a y se denota por $\arg a(t)$. Obviamente existen numerables argumentos continuos de a, pero difieren (dos a dos) por un múltiplo entero de 2π. Por $[\arg a(t)]_\Gamma$ representaremos al incremento total de la función $\arg a(t)$ cuando t toma valores en Γ. Note que $a(t)$ traza una curva cerrada orientada continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, el número de veces que la función a rodea el origen en el

sentido contrario a las agujas del reloj es referido como el *índice de Cauchy* de la función a y es dado mediante:

$$\operatorname{ind} a := \frac{1}{2\pi}[\arg a(t)]_\Gamma.$$

El índice de una función satisface las siguientes propiedades: Sean $a_1, a_2 \in C(\Gamma)$ con $a_1(t)a_2(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, entonces

$$\operatorname{ind}(a_1 a_2) = \operatorname{ind} a_1 + \operatorname{ind} a_2.$$

Quisiéramos enfatizar que si una función $a \in C(\Gamma)$ satisface que $\Re e a(t) > 0$, $(t \in \Gamma)$ entonces $\operatorname{ind} a = 0$. En particular esto implica que si $\|a\|_{C(\Gamma)} < 1$, entonces $\operatorname{ind}(1-a) = 0$.
El índice de una función también se puede expresar como el incremento del logaritmo de esta función, de lo cual tenemos

$$\operatorname{ind} a = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma d(\arg a(t)) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d(\log a(t)).$$

Por otro lado, sea $r = p_1/p_2$ (donde p_1 y p_2 son polinomios) una función racional que no se anula ni tiene polos en Γ y denotemos por t_j^+, $j = 1, \ldots, k^+$ y t_j^-, $j = 1, \ldots, k^-$ los ceros del polinomio p_1 en D^+ y D^- respectivamente. Análogamente, sean τ_j^+, $j = 1, \ldots, l^+$ y τ_j^-, $j = 1, \ldots, l^-$ los ceros del polinomio p_2 en D^+ y D^-, entonces r puede ser representada en la forma

$$r(t) = r_-(t)t^\aleph r_+(t) \tag{4.9}$$

donde

$$r_-(t) = \gamma\frac{\prod_{j=1}^{k^+}(1 - t^{-1}t_j^+)}{\prod_{j=1}^{l^+}(1 - t^{-1}\tau_j^+)}, \quad r_+(t) = \frac{\prod_{j=1}^{k^-}(t - t_j^-)}{\prod_{j=1}^{l^-}(t - \tau_j^-)}$$

$\aleph = k^+ - l^+$ y $\gamma \in \mathbb{C}$. El entero $\aleph$ es llamado el *índice de la función* r. La representación (4.9) es llamada *factorización de la función* r con respecto a la curva Γ. Claramente las funciones $r_\pm$ y $r_\pm^{-1} = 1/r_\pm$ son

analíticas en $D^{\pm}$. Además, r_- satisface que $r_-P_- = P_-r_-I_{\mathfrak{X}(\Gamma)}$, $P_+r_- = 0$ y r_+ cumple que $r_+P_+ = P_+r_+I_{\mathfrak{X}(\Gamma)}$, $P_-r_+ = 0$, donde $P_{\pm}$ son las proyecciones (3.20).
Finalmente, quisiéramos hacer notar que para una función continua a que no se anula en Γ y una función racional r que la aproxima, el índice de Cauchy de a coincide con el índice de la función racional r.

Teorema 4.3.1. *Sea* $\mathfrak{X}(\Gamma)$ *un BFS que satisface las condiciones* (4.3)–(4.6)*. Entonces el operador* $\mathcal{A} = aP_+ + bP_-$ *con* $a, b \in C(\Gamma)$ *es un operador de Fredholm en* $\mathfrak{X}(\Gamma)$ *si y solamente si* $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$ *para todo* $t \in \Gamma$*. Bajo la presencia de la propiedad de Fredholm tenemos que* $\operatorname{Ind} \mathcal{A} = \operatorname{ind} \frac{a}{b} := \aleph$.

Demostración. Haremos la prueba en 6 pasos.

Paso 1 (Compacidad del conmutador $aS - SaI_{\mathfrak{X}(\Gamma)}$, $a \in C(\Gamma)$). De la condición (4.5) tenemos que S es acotado en $\mathfrak{X}(\Gamma)$, por lo tanto el conmutador $aS - SaI$ puede ser aproximado en la norma de $\mathcal{B}(\mathfrak{X}(\Gamma))$ por el conmutador $rS - SrI_{\mathfrak{X}(\Gamma)}$, el cual es un operador finito dimensional y consecuentemente compacto en $\mathfrak{X}(\Gamma)$. Por lo tanto, $aS - SaI_{\mathfrak{X}(\Gamma)}$ es compacto.

Paso 2 (Suficiencia). De la compacidad de los conmutadores tenemos que $(aP_+ + bP_-)(bP_+ + aP_-) = abI_{\mathfrak{X}(\Gamma)} + T$, donde T es un operador compacto, así de la Propiedad 4.1.1 tenemos que $aP_+ + bP_-$ tiene un regularizador y por lo tanto es de Fredholm.

Paso 3 (El operador $A_{\aleph} = P_+ + t^{\aleph}P_-$). Sea $0 \in D^+$. Probemos que $A_{\aleph}$ es invertible a la derecha si $\aleph \geqslant 0$ e invertible a la izquierda si $\aleph \leqslant 0$, con inversa lateral en ambos casos dada por $A_{-\aleph}$. En efecto, de las condiciones (4.5), (4.6) y del Ejercicio 3.3.4 tenemos

$$\begin{aligned}(P_+ + t^{\aleph}P_-)(P_+ + t^{-\aleph}P_-) &= P_+ + P_+t^{-\aleph}P_- + t^{\aleph}P_-t^{-\aleph}P_- \\ &= P_+ + P_+P_-t^{-\aleph} + t^{\aleph}t^{-\aleph}P_-P_- \\ &= P_+ + P_- = I_{\mathfrak{X}(\Gamma)}.\end{aligned}$$

De forma análoga se demuestra que $A_{\aleph}$ es invertible a la izquierda para $\aleph \leqslant 0$, con inversa a la izquierda $A_{-\aleph}$.

Por otro lado, del Paso 2 tenemos que $A_{\aleph}$ es un operador de Fredholm en $\mathfrak{X}(\Gamma)$. Para calcular los números de defecto de $A_{\aleph}$ observemos que el espacio de Hölder $H^{\mu}(\Gamma)$ está contenido en $C(\Gamma)$ y de la condición (4.3) tenemos que $C(\Gamma) \subset \mathfrak{X}(\Gamma)$, ahora para el operador $A_\aleph$ definido sobre $H^\mu(\Gamma)$ es bien conocido que $\alpha(A_\aleph) = \aleph$ y $\beta(A_\aleph) = 0$ para $\aleph \geqslant 0$ (ver [102]). Por lo tanto, de la contención anterior tenemos que $\alpha(A_\aleph) \geqslant \aleph$ para $A_\aleph$ definido sobre $\mathfrak{X}(\Gamma)$. Como $\mathfrak{X}(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$ y $\alpha(A_\aleph) = \aleph$ en $L^1(\Gamma)$, entonces también se tiene que $\alpha(A_\aleph) \leqslant \aleph$ en $\mathfrak{X}(\Gamma)$, de donde se sigue la igualdad $\alpha(A_\aleph) = \aleph$ para $A_\aleph$ actuando sobre $\mathfrak{X}(\Gamma)$. El caso $\aleph \leqslant 0$ es similar.

Paso 4 (El operador $N = (t-\lambda)P_+ + P_-$). El operador N es invertible con inversa $N_1 = \frac{1}{t-\lambda}P_+ + P_-$, si $\lambda \in D^-$. Esto se prueba como en el Paso 3. Por otro lado, como $(t-\lambda)P_+ + P_- = (t-\lambda)[P_+ + (t-\lambda)^{-1}P_-]$, del Paso 3 tenemos que N es un operador de Fredholm con $\operatorname{Ind}(N) = -1$ si $\lambda \in D^+$.

Paso 5 (Necesidad). Supongamos que $a(t_0) = 0$ para algún $t_0 \in \Gamma$ y que $\mathcal{A} \in \Phi$. De la compacidad de los conmutadores $aS - SaI_{\mathfrak{X}(\Gamma)}$ tenemos las siguientes relaciones

$$aP_+ + bP_- = (P_+ + bP_-)(aP_+ + P_-) + T_1 = (aP_+ + P_-)(P_+ + bP_-) + T_2$$

donde T_1 y T_2 son operadores compactos en $\mathfrak{X}(\Gamma)$. Así de las Propiedades 4.1.3 y 4.1.4 tenemos que $aP_+ + P_-$ es un operador de Fredholm y $a(t_0) = 0$. Ahora aproximemos la función continua a por funciones racionales a_ε tales que $a_\varepsilon(t_0) = 0$. Luego, los operadores $a_\varepsilon P_+ + P_-$ con ε suficientemente pequeños son de Fredholm. Llegaremos a una contradicción, para ello representemos a_ε como $a_\varepsilon(t) = (t-t_0)s(t)$. Así,

$$\begin{aligned} a_\varepsilon P_+ + P_- =&(sP_+ + P_-)[(t-t_0)P_+ + P_-] \\ =&[(t-t_0)P_+ + P_-](sP_+ + P_-) + T, \end{aligned}$$

con T un operador compacto. Por lo tanto, el operador $(t-t_0)P_+ + P_-$ tiene un regularizador y además es un operador de Fredholm, lo cual no es posible en vista del Paso 4 en el cual se tiene que $(t-t_0)P_+ + P_-$ es invertible para $t_0 \in D^-$ (por lo tanto un operador de Fredholm con índice 0) y para $t_0 \in D^+$ el índice de Fredholm de $(t-t_0)P_+ + P_-$ es -1, contradiciendo así la Propiedad 4.1.5 la cual postula que todo operador en una vecindad de un operador de Fredholm es de Fredholm con el mismo índice.

Paso 6 (Fórmula del índice). Aproximemos la función $c(t) = \frac{a(t)}{b(t)}$ por una función racional $r(t)$ tal que

$$c(t) = r(r)(1 + m(t)) \quad \text{con} \quad \|m\|_{C(\Gamma)} < \frac{1}{\|P_+\|_{\mathcal{X}(\Gamma)}}. \tag{4.10}$$

Sea $r(t) = t^{-\aleph}\frac{r_+(t)}{r_-(t)}$ la factorización de la función $r(t)$. Como $\|m\|_{C(\Gamma)} < 1$, tenemos entonces que $\operatorname{ind}(1 + m) = 0$ y así $\operatorname{ind} r = \operatorname{ind} c = -\aleph$. En el caso en que $\aleph \leqslant 0$, de las condiciones (4.5) y (4.6) la siguiente representación es válida

$$\mathcal{A} = br_-(I_{\mathcal{X}(\Gamma)} + mP_+)\left(\frac{1}{r_+}P_+ + \frac{1}{r_-}P_-\right)(t^{-\aleph}P_+ + P_-). \tag{4.11}$$

De (4.10), (4.5) y como $\|mP_+\|_{\mathcal{X}(\Gamma)} < 1$, tenemos que el operador $I_{\mathcal{X}(\Gamma)} + mP_-$ es invertible. Por otro lado, de la representación (4.11) y dado que el operador $\frac{1}{r_+}P_+ + \frac{1}{r_-}P_-$ es invertible en $\mathcal{X}(\Gamma)$, entonces usando el Teorema de Atkinson (Propiedad 4.1.2) concluimos que $\operatorname{Ind}\mathcal{A} = \operatorname{Ind}(t^{-\aleph}P_+ + P_-)$. Finalmente, tenemos que $\operatorname{Ind}(t^{-\aleph}P_+ + P_-) = \aleph$ (Paso 3) lo que concluye la demostración.

□

Ahora podemos dar condiciones explicitas de solubilidad de la ecuación (4.2) con coeficientes continuos que admiten una factorización. Para ello asumiremos que $\mathcal{X}(\Gamma)$ es reflexivo.

Teorema 4.3.2. *Sea $\mathcal{X}(\Gamma)$ un BFS reflexivo que satisface las condiciones (4.3)–(4.6) y sean $a, b \in C(\Gamma)$ las cuales no se anulan en Γ, además supongamos que $\frac{a}{b} =: c = c_- t^{\aleph} c_+$. Entonces si $\aleph = \operatorname{ind} c < 0$,*

$$\ker(aP_+ + bP_-) = \operatorname{span}\{g, gt, \ldots, gt^{|\aleph|-1}\} \tag{4.12}$$

donde $g = c_+^{-1} - c_- t^{\aleph}$. En el caso $\aleph > 0$,

$$\operatorname{Coker}(aP_+ + bP_-) = \operatorname{span}\{bc_-, bc_- t, \ldots, bc_- t^{\aleph-1}\} \tag{4.13}$$

y la ecuación $aP_+\varphi + bP_-\varphi = f$ tiene una solución si, y sólo si,

$$\int_\Gamma f(t)b^{-1}(t)c_-^{-1}(t)t^{-j}\,\mathrm{d}t = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \aleph. \tag{4.14}$$

Demostración. Sea $\mathcal{A} = aP_+ + bP_-$ y asumamos que $0 \in D^+$. Notemos, tomando en cuenta las condiciones (4.5), (4.6) y el Ejercicio 3.3.4, que $\mathcal{A}$ se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\mathcal{A} = bc_-(t^{\aleph}c_+P_+ + c_-^{-1}P_-) = bc_-(t^{\aleph}P_+ + P_-)(c_+P_+ + c_-^{-1}P_-) \quad (4.15)$$

con $bc_-I_{\mathfrak{X}(\Gamma)}$ y $c_+P_+ + c_-^{-1}P_-$ operadores invertibles con inversas dadas por

$$(bc_-I_{\mathfrak{X}(\Gamma)})^{-1} = b^{-1}c_-^{-1}I_{\mathfrak{X}(\Gamma)}, \quad (c_+P_+ + c_-^{-1}P_-)^{-1} = c_+^{-1}P_+ + c_-P_-,$$

así tenemos que $\mathcal{A}$ y $t^{\aleph}P_+ + P_-$ son dos operadores equivalentes[2] y en consecuencia

$$\dim\ker\mathcal{A} = \dim\ker(t^{\aleph}P_+ + P_-) = \dim\ker(P_+ + t^{-\aleph}P_-).$$

Luego, del paso 3 en la prueba del Teorema 4.3.1 tenemos que si $\aleph \leqslant 0$, $\dim\ker\mathcal{A} = |\aleph|$ y si $\aleph \geqslant 0$, entonces $\dim\operatorname{Coker}\mathcal{A} = \aleph$.
Supongamos ahora que $\aleph < 0$. Hallemos el conjunto $\ker(P_+ + t^{-\aleph}P_-)$. Esto es

$$\{\varphi \in \mathfrak{X}(\Gamma) \;:\; P_+\varphi + t^{-\aleph}P_-\varphi = 0\}.$$

Como $\dim\ker(P_+ + t^{-\aleph}P_-) = |\aleph|$, entonces existe un polinomio $p_{|\aleph|-1}(t) = a_{|\aleph|-1}t^{|\aleph|-1} + \cdots + a_1t + a_0$ de grado a lo más $|\aleph| - 1$ tal que $t^{|\aleph|}P_-\varphi + p_{|\aleph|-1} \in P_-(\mathfrak{X}(\Gamma))$. De lo anterior tenemos que

$$P_+\varphi = p_{|\aleph|-1}, \quad P_-\varphi = -\frac{p_{|\aleph|-1}}{t^{|\aleph|}}.$$

Así tenemos que

$$P_+\varphi(t) + P_-\varphi(t) = \varphi(t) = p_{|\aleph|-1}(t)\left[1 - \frac{1}{t^{|\aleph|}}\right],$$

por lo tanto,

$$\ker(P_+ + t^{-\aleph}P_-) = \operatorname{span}\left\{t^{|\aleph|-1} - \frac{1}{t}, t^{|\aleph|-2} - \frac{1}{t^2}, \ldots, 1 - \frac{1}{t}\right\}.$$

[2]Dos operadores acotados $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ se dicen *equivalentes* si existen operadores acotados e invertibles $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ tal que $\mathbb{A} = \mathbb{E}\mathbb{B}\mathbb{F}$.

Por otro lado, de (4.15) se obtiene que

$$\ker \mathcal{A} = (c_+^{-1}P_+ + c_-P_-)\ker(t^{\aleph}P_+ + P_-) = \operatorname{span}\{g_1, \dots, g_{|\aleph|}\}$$

con $g_j = (c_+^{-1}P_+ + c_-P_-)(t^{|\aleph|-j} - t^{-j})$, $j = 1, \dots, |\aleph|$. Donde,

$$\begin{aligned} g_j =& (c_+^{-1}P_+ + c_-P_-)(t^{|\aleph|-j} - t^{-j}) \\ =& (c_+^{-1}P_+ + c_-P_-)t^{|\aleph|-j} - (c_+^{-1}P_+ + c_-P_-)t^{-j} \\ =& c_+^{-1}P_+t^{|\aleph|-j} - c_-P_-t^{-j} \\ =& c_+^{-1}t^{|\aleph|-j} - c_-t^{-j}. \end{aligned}$$

Es decir, la igualdad (4.12).
Ahora asumamos $\aleph > 0$. De (4.15) tenemos que $\operatorname{Im}\mathcal{A} = bc_- \operatorname{Im}(T^{\aleph}P_+ + P_-)$ lo que nos da (4.13) pues $\operatorname{Im}(T^{\aleph}P_+ + P_-)$ consiste de todas las funciones $\varphi \in \mathfrak{X}(\Gamma)$ para las cuales $P_+\varphi$ tiene un cero de orden a lo más $\aleph$ en el punto $t = 0$. Por otro lado, de (4.15) y el Paso 3 del Teorema 4.3.1, $\mathcal{A}$ es un operador de Fredholm invertible a la izquierda y por tanto normalmente soluble, así la ecuación $\mathcal{A}\varphi = f$ tiene una solución si y solamente si

$$\int_\Gamma f(t)\overline{y_j(t)}|\,\mathrm{d}t| = 0, \quad j = 1, \dots, m \tag{4.16}$$

donde $y_1, \dots, y_m$ son todas las soluciones linealmente independientes de la ecuación adjunta homogénea $\mathcal{A}^*y = 0$ en $\mathfrak{X}(\Gamma)$. El operador adjunto de $\mathcal{A}$ viene dado por $\mathcal{A}^* = H(P_+b + P_-a)H$, pues $P_+^* = HP_-H$ y $P_-^* = HP_+H$ con

$$(H\varphi)(t) := i(S\varphi)(t) - \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\varphi(\varsigma)}{\varsigma}\,\mathrm{d}\varsigma$$

el operador singular integral de Hilbert, cual es acotado en $\mathfrak{X}(\Gamma)$ debido a que este es reflexivo y por (4.5).
Luego, $H\mathcal{A}^*z_j = (P_+b + P_-a)c_-^{-1}b^{-1}t^{-j} = P_+c_-^{-1}t^{-j} + P_-c_+t^{\aleph-j} = 0$, así $z_j \in \ker\mathcal{A}^*$, $j = 1, \dots, \aleph$. Pero las funciones z_j son linealmente independientes y como $\dim\ker\mathcal{A}^* = \dim\operatorname{Coker}\mathcal{A} = \aleph$, concluimos entonces que $\aleph = m$ y $z_j = y_j$ para todo j.
Además $\overline{y_j(t)}|\,\mathrm{d}t| = h(t)c_-^{-1}(t)b^{-1}(t)t^{-j}|\,\mathrm{d}t| = c_-^{-1}(t)b^{-1}(t)t^{-j}\,\mathrm{d}t$ y en consecuencia (4.14) y (4.16) coinciden, lo que completa la prueba. □

Nótese que podemos dar una representación de las soluciones de una ecuación de la forma

$$\mathbb{A}x = y \tag{4.17}$$

mediante las inversas laterales del operador $\mathbb{A} : X \longrightarrow Y$: Si $\mathbb{A}$ es invertible a la izquierda con inversa $\mathbb{A}^-$, la ecuación (4.17) es soluble si, y sólo si, la condición

$$(I_X - \mathbb{A}^-\mathbb{A})y = 0$$

se satisface. Si esta condición es válida, el vector $x = \mathbb{A}^-y$ es la única solución de la ecuación (4.17). Si el operador $\mathbb{A}$ es invertible a la derecha con inversa $\mathbb{A}^+$, entonces el vector $x = \mathbb{A}^+y$ es una de las soluciones de la ecuación (4.17) y el subespacio $\ker \mathbb{A}$ coincide con el rango de la proyección $I_X - \mathbb{A}^+\mathbb{A}$.
Haciendo uso de los Teoremas 4.3.1 y 4.3.2 obtenemos la siguiente representación de la inversa del operador $\mathcal{A}$:

Teorema 4.3.3. *Sea $\mathfrak{X}(\Gamma)$ un BFS reflexivo que satisface las condiciones* (4.3)–(4.6) *y sean $a, b \in C(\Gamma)$ las cuales no se anulan en Γ. Entonces el operador $\mathcal{A} = aP_+ + bP_-$ es invertible, invertible a la izquierda, invertible a la derecha si $\aleph = \operatorname{ind} \frac{a}{b}$ es cero, positivo, negativo respectivamente. Si además $\frac{a}{b} = c_- t^{\aleph} c_+$, entonces las correspondientes inversas toman la forma:*

$$\mathcal{A}^{-1} = (c_+^{-1}P_+ + c_-P_-)(t^{-\aleph}P_+ + P_-)c_-^{-1}b^{-1}.$$

Demostración. La prueba se sigue de (4.15) y del Paso 3 del Teorema 4.3.1. □

4.3.2. Un criterio de Fredholm para $\mathcal{A}$ con coeficientes en $PC(\Gamma)$ mediante el enfoque de Gohberg-Kupnik

Para mostrar el criterio de Fredholm del operador $\mathcal{A}$ con coeficientes en $PC(\Gamma)$ usando el esquema de investigación de Gakhov-Muskhelishvili-Khvedelidze-Gohberg-Krupnik primero debemos reformular las nociones de p-no singularidad y p-índice; introducidas en [54], para el contexto de BFS sobre curvas.
Para una función $a \in PC(\Gamma)$ definamos

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\pi i} \ln \left(\frac{a(t-0)}{a(t+0)} \right)$$

y

$$\omega(t) = \prod_{k=1}^{n} (t - z_0)_k^{\gamma(t_k)} \tag{4.18}$$

donde $z_0 \in D^+$, t_k son los puntos de discontinuidad de a y las funciones $\omega_k(z) = (z - z_0)_k^{\gamma(t_k)}$ son funciones univalentes analíticas en el plano complejo con singularidades en los puntos $t_k \in \Gamma$. La función

$$a_1(t) = \frac{a(t)}{\omega(t)} \tag{4.19}$$

es continua en Γ independientemente de la escogencia de

$$\Re e\gamma(t_k) = \frac{1}{2\pi} \arg \frac{a(t_k - 0)}{a(t_k + 0)}.$$

Definición 4.3.1. *Sea $\mathcal{X}(\Gamma)$ un BFS que satisface el Axioma 4.1. Una función $a \in PC(\Gamma)$ es llamada* $\mathcal{X}(\Gamma)$-no singular *si* $\inf_{t\in\Gamma} |a(t)| > 0$ *y*

$$\frac{1}{2\pi} \arg \frac{a(t_k - 0)}{a(t_k + 0)} \notin [\alpha(t_k), \beta(t_k)] + \mathbb{Z},$$

donde $[\cdots] + \mathbb{Z}$ es el conjunto $\cup_{\xi\in[\cdots]}\{\xi, \xi \pm 1, \xi \pm 2, \dots\}$ y $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son las funciones índices del espacio $\mathcal{X}(\Gamma)$.

Definición 4.3.2. *Sea $\mathcal{X}(\Gamma)$ un BFS que satisface el Axioma 4.1 y $a \in PC(\Gamma)$ una función $\mathcal{X}(\Gamma)$-no singular. El entero*

$$\operatorname{ind} a = \sum_{k=1}^{n} [\theta(t_k) - \Re e\gamma(t_k)]$$

donde $\theta(t_k)$ son los incrementos de a:

$$\theta(t_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \operatorname{darg} a(t), \tag{4.20}$$

y $\Re e\gamma(t_k)$ es escogida en el intervalo

$$\beta(t_k) - 1 < \Re e\gamma(t_k) < \alpha(t_k), \tag{4.21}$$

es llamado el $\mathcal{X}(\Gamma)$-índice *de la función a.*

Observación 4.3.1. Notemos que el $\mathcal{X}(\Gamma)$-índice de a es el mismo p-índice de Gohberg-Krupnik definido como el índice de Cauchy de la curva continua orientada obtenida de la imagen $a(\Gamma)$ de la curva Γ, uniendo sus discontinuidades mediante arcos circulares cuyos ángulos dependen de p. Para $p = 2$ estos arcos no son más que una recta partiendo de un punto de discontinuidad hasta el próximo, ver [54]. En este caso, el ángulo de los arcos depende de las funciones índices de $\mathcal{X}(\Gamma)$ y varía de un punto de discontinuidad al otro.

Teorema 4.3.4. *Sea $\mathcal{X}(\Gamma)$ un BFS que satisface las condiciones* (4.3)–(4.6) *y los Axiomas 4.1 y 4.2. El operador $\mathcal{A} = aP_+ + bP_-$ con $a, b \in PC(\Gamma)$ es de Fredholm si*

$$\inf_{t\in\Gamma} |a(t)| \neq 0, \quad \inf_{t\in\Gamma} |b(t)| \neq 0 \tag{4.22}$$

y la función $\frac{a(t)}{b(t)}$ es $\mathcal{X}(\Gamma)$-no singular. En este caso

$$\operatorname{Ind} \mathcal{A} = - \operatorname{ind} \frac{a}{b}. \tag{4.23}$$

La condición (4.22) *es también necesaria para que el operador $\mathcal{A}$ sea un operador de Fredholm. Si las funciones índices $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ del espacio $\mathcal{X}(\Gamma)$ coinciden en los puntos de discontinuidad t_k de los coeficientes $a(t)$, $b(t)$:*

$$\alpha(t_k) = \beta(t_k), \quad k = 1, \dots, n$$

entonces el que la función $\frac{a(t)}{b(t)}$ sea $\mathcal{X}(\Gamma)$-no singular es también una condición necesaria.

Demostración. De la condición (4.22) podemos asumir; sin pérdida de generalidad, que $b(t) \equiv 1$. La prueba de la necesidad de (4.22) para a y b simultáneamente se prueba de forma similar al caso $b(t) \equiv 1$.
SUFICIENCIA. Sea

$$\omega(t) = \frac{\omega^+(t)}{\omega^-(t)}, \quad \omega^+(t) = \prod_{k=1}^{n} (z - t_k)^{\gamma(t_k)}, \quad \omega^-(t) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{z - t_k}{z - z_0} \right)^{\gamma(t_k)}$$

la factorización de la función (4.18). Recordemos, por otro lado, que

$\Re e\gamma(t_k)$ son escogidas en los intervalos (4.21). Notemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega^-}\left(a_1P_+ + P_-\right)\omega^-\left(\omega P_+ + P_-\right)\\
=&\frac{1}{\omega^-}\left[a_1P_+\omega^-\omega P_+ + a_1P_+\omega^-P_- + P_-\omega^-\omega P_+ + P_-\omega^-P_-\right]\\
=&\frac{1}{\omega^-}\left[a_1\omega^+P_+ + a_1P_+P_-\omega^- + P_-P_+\omega^+ + \omega^-P_-\right]\\
=&a_1\frac{\omega^+}{\omega^-}P_+ + P_- = a_1\omega P_+ + P_- = aP_+ + P_-,
\end{aligned}\tag{4.24}$$

donde a_1 es la función dada en (4.19) la cual es continua debido a la escogencia de los valores $\gamma(t_k)$. La relación (4.24) es válida en $\mathcal{X}(\Gamma)$ en de virtud de la condición (4.6), el hecho que los operadores $\omega P_+ + P_-$ y $\frac{1}{\omega^-}(a_1P_+ + P_-)\omega^-$ son acotados en $\mathcal{X}(\Gamma)$, la condición (4.5) y por el Lema 4.3.2. El operador $\frac{1}{\omega^-}\left(a_1P_+ + P_-\right)\omega^-$ es de Fredholm por el Teorema 4.3.1 y el Lema 4.3.2, con índice de Fredholm igual a $\operatorname{ind} a_1$ el cual a su vez es igual a $\operatorname{ind} a$. Así obtenemos (4.23).
Resta probar que el operador $\omega P_+ + P_-$ es invertible para $\Re e\gamma(t_k)$ como en (4.21). Esto se prueba directamente $N(\omega P_+ + P_-) = (\omega P_+ + P_-)N$, donde $N = \frac{1}{\omega^-}\left(\frac{1}{\omega}P_+ + P_-\right)\omega^-$. El Lema 4.3.2 garantiza que el operador N es acotado en el espacio $\mathcal{X}(\Gamma)$ bajo la escogecia (4.21).
Necesidad. Sea $\mathcal{A}$ un operador de Fredholm. Primero asumiremos que $a(t_k \pm 0) \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$. Probaremos que $a(t) \neq 0$ para todos los otros puntos y que las condiciones en los saltos se satisfacen.

Paso 1 (Reducción a un operador simple). Como $a(t_k \pm 0) \neq 0$, la función $\omega(t)$ está bien definida y la función $a_1(t) = \frac{a(t)}{\omega(t)}$ es continua. Dado que los conmutadores $aS - SaI_{\mathcal{X}(\Gamma)}$, $a \in C(\Gamma)$ son compactos (ver Paso 1 de la prueba del Teorema 4.3.1), tenemos que

$$\mathcal{A} = (\omega P_+ + P_-)(a_1P_+ + P_-) + T. \tag{4.25}$$

Como $\mathcal{A}$ es un operador de Fredholm, de la Propiedad 4.1.6 concluimos que $\omega P_+ + P_- \in \Phi_-$.

Paso 2 (Necesidad de las condiciones en los saltos del operador $\omega P_+ + P_-$). El siguiente Lema reformula una bien conocida afirmación en el caso de espacios clásicos de Lebesgue ponderados para el caso de espacios abstractos $\mathcal{X}(\Gamma)$.

Lema 4.3.3. *Sean $a(t_k \pm 0) \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ y el espacio $\mathcal{X}(\Gamma)$ que satisface las condiciones* (4.3)–(4.6) *y los Axiomas 4.1 y 4.2, además asumamos que se satisface que $\alpha(t_k) = \beta(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. El operador $\Psi = \omega P_+ + P_-$ con ω definida en* (4.18) *es semi Fedholm si y solamente si*

$$\Re e\gamma_k \neq \alpha(t_k) \ (\mathrm{mod} 1) \ \textit{para todo} \ k = 1, 2, \dots, n. \tag{4.26}$$

Demostración. De la suficiencia del Teorema 4.3.4, la condición (4.26) es suficiente. Para probar la necesidad, supongamos que $\Re e\gamma_k = \alpha(t_k) + r$ para algún $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y para algún k, digamos $k = 1$, pero que el operador Ψ es un operador semi Fredholm. Ahora, supongamos primero que $\Re e\gamma_k \neq \alpha_k$ (mod 1) para todos los otros $k = 2, 3, \dots, n$. Sean $\Psi_{\pm\varepsilon} = \omega_{\pm\varepsilon} P_+ + P_-$, donde $\omega_{\pm\varepsilon} = (t - z_0)_1^{\pm\varepsilon} \omega(t)$. Esta nueva función tiene exponentes dados por $\gamma_1^{\pm\varepsilon} = \gamma_1 \pm \varepsilon$. Escojamos ε suficientemente pequeño tal que $\Re e\gamma_1 \pm \varepsilon - \alpha_1$ no es entero. Por lo tanto, de la suficiencia del Teorema 4.3.4, los operadores Ψ_ε y $\Psi_{-\varepsilon}$ son operadores de Fredholm en el espacio $\mathcal{X}(\Gamma, \rho)$. El cálculo del índice mediante la fórmula (4.23) no da

$$\mathrm{Ind}((t - z_0)^\nu P_+ + P_-) = [\alpha(t_1) - \Re e\nu], \text{ en caso que } \Re e\nu \neq \alpha(t_1) + m,$$

donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y $[\cdots]$ es la parte entera de un número. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}\,\Psi_\varepsilon - \mathrm{Ind}\,\Psi_{-\varepsilon} =& [\Re e\gamma(t_1) + \varepsilon - \alpha(t_1)] - [\Re e\gamma(t_1) - \varepsilon - \alpha(t_1)] \\ =& [\varepsilon] - [-\varepsilon] = 1. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Pero, por otro lado, $\|\Psi_{\pm\varepsilon} - \Psi\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X}(\Gamma)))} \leqslant c \sup_{t\in\Gamma} |(t - z_0)^{\pm\varepsilon} - 1| \leqslant c_1\varepsilon$ lo que contradice (4.27) debido a la Propiedad 4.1.5. Esto prueba el lema para el caso $k = 1$. Si la condición (4.26) es violada para varios valores $k = n_1, \dots, n_m$, los argumentos son similares: los operadores $\Psi_{\pm\varepsilon}$ son definidos en este caso con los coeficientes $\omega_{\pm\varepsilon}(t) = \prod_{i=1}^m (t - z_0)^{\pm\varepsilon} \omega(t)$. $\square$

Paso 3 (Necesidad de las condiciones para el operador N). Como $P_+ + \omega P_- \in \Phi_-$, por el Lema 4.3.3 las condiciones (4.26) se satisfacen. En consecuencia, por la suficiencia de este teorema, el operador

$P_+ + \omega P_-$ es un operador de Fredholm. De la Propiedad 4.1.7 y (4.25) concluimos que el operador $a_1 P_+ + P_-$ es de Fredholm. Luego del Teorema 4.3.1 tenemos que $a_1(t) \neq 0$ y en consecuencia $a(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$.

Paso 4 (Necesidad de las condiciones $a(t_k \pm 0) \neq 0$ y $b(t_k \pm 0) \neq 0$). Supongamos que alguno de los números $a(t_k \pm 0)$ son iguales a cero y que el operador $\mathcal{A}$ es de Fredholm. Existe un número complejo ε con módulo arbitrariamente pequeño y un punto t_0 cercano a t_k tal que $a(t_k \pm 0) + \varepsilon \neq 0$, pero $a(t_0) + \varepsilon = 0$. Sea $\mathcal{A}_\varepsilon = (a + \varepsilon)P_+ + P_-$, claramente $\|\mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{A}\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{X}(\Gamma))} = \|\varepsilon I_{\mathfrak{X}(\Gamma)}\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{X}(\Gamma))} = \varepsilon$. Por lo tanto, de la Propiedad 4.1.5 obtenemos que el operador $\mathcal{A}_\varepsilon$ es de Fredholm para ε suficientemente pequeño. Esto contradice la parte anterior.

$\square$

La solubilidad de la ecuación (4.2) en el caso de coeficientes continuos a trozos se sigue de la prueba del Teorema 4.3.4. Dejamos su prueba como ejercicio:

EJERCICIO 4.3.1. Demuestre que $\dim\ker\mathcal{A} = \operatorname{ind}\frac{a}{b}$, $\dim\operatorname{Coker}\mathcal{A} = 0$ si $\operatorname{ind}\frac{a}{b}$ es $\mathfrak{X}(\Gamma)$-no singular con $\operatorname{ind}\frac{a}{b} \geqslant 0$ y $\dim\ker\mathcal{A} = 0$, $\dim\operatorname{Coker}\mathcal{A} = \left|\operatorname{ind}\frac{a}{b}\right|$ para $\operatorname{ind}\frac{a}{b} \leqslant 0$.

4.4. Los criterios de Fredholm para el operador $\mathcal{A}$ en $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$

En esta sección mostraremos que el criterio de Fredholm para $\mathcal{A}$ definido en $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ con coeficientes continuos se obtiene como un corolario del Teorema 4.3.1 y para el caso de coeficientes continuos a trozos como consecuencia del Teorema 4.3.4. Así, la solubilidad de la ecuación (4.2) se sigue inmediatamente para este caso pues $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ es reflexivo (Corolario 2.2.1). Primero veremos que las condiciones (4.3)–(4.6) y los Axiomas 4.1 y 4.2 son, de hecho, resultados conocidos en $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$.
El espacio $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ sobre una curva de Jordan Γ de longitud finita ℓ se define de manera similar a la Definición 2.1.1 mediante:

$$I_p(f) = \int_\Gamma |f(t)|^{p(t)}\,|\mathrm{d}t| = \int_0^\ell |f(t(s))|^{p(t(s))}\,\mathrm{d}s.$$

Asumimos que se satisface (2.3) para $t \in \Gamma$. Como hemos visto, la acotación del operador maximal es crucial para la acotación del operador singular integral, así la condición log-Hölder continua (3.11) en este caso viene dada por

$$|p(t_1) - p(t_2)| \leqslant \frac{A}{-\ln|t_1 - t_2|}, \; |t_1 - t_2| \leqslant \frac{1}{2}, \; t_1, t_2 \in \Gamma \tag{4.28}$$

o impuesta sobre la función $p_*(s) = p(t(s))$:

$$|p_*(s_1) - p_*(s_2)| \leqslant \frac{A}{-\ln|s_1 - s_2|}, \; |s_1 - s_2| \leqslant \frac{1}{2}, \; s_1, s_2 \in [0, \ell]. \tag{4.29}$$

Como $|t(s_1) - t(s_2)| \leqslant |s_1 - s_2|$, entonces la condición (4.28) siempre implica (4.29). Inversamente, (4.29) implica (4.28) si existe $\lambda > 0$ tal que $|s_1 - s_2| \leqslant c|t(s_1) - t(s_2)|^\lambda$. Por lo tanto, las condiciones (4.28) y (4.29) son equivalente en curvas de Jordan. Más aún, esto es válido en curvas más generales que satisfacen la llamada *condición de cuerda.*
El espacio de Lebesgue variable ponderado se define como

$$L^{p(\cdot)}(\Gamma, \rho) = \{f : \; \|f(t(s))\rho(s)\|_{L^{p(\cdot)}(\Gamma)} < \infty\}$$

donde

$$\rho(s) = \prod_{k=1}^{n} |t(s) - t(c_k)|^{\beta_k} \approx \prod_{k=1}^{n} |s - c_k|^{\beta_k} \tag{4.30}$$

con $c_k \in [0, \ell]$, $k = 1, \ldots, n$. De la desigualdad de Hölder se sigue que

$$L^{p(\cdot)}(\Gamma, |t - t_0|^\gamma) \subset L^1(\Gamma), \quad \text{si } \gamma < \tfrac{1}{q(t_0)}. \tag{4.31}$$

La acotación del operador singular integral de Cauchy S en $L^{p(\cdot)}(\Gamma, \rho)$ y la densidad de $C^\infty(\Gamma)$ en $L^{p(\cdot)}(\Gamma, \rho)$ vienen dadas por los siguientes resultados cuya pruebas son dadas en [75].

Teorema 4.4.1. *Sea Γ una curva de Lyapunov y sea $p(s)$ que satisface* (2.3) *para $t \in \Gamma$ y* (4.29)*. El operador S es acotado en el espacio $L^{p(\cdot)}(\Gamma, \rho)$ con la función peso* (4.30) *si y solamente si*

$$-\frac{1}{p(c_k)} < \beta_k < \frac{1}{q(c_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Del teorema anterior, la acotación del operador dado en el Axioma 4.1 para el caso particular del espacio $L^{p(\cdot)}(\Gamma,\rho)$ con $\rho(t)=|t-t_0|^{\mu}$, se sigue considerando como funciones índices para este espacio a:

$$\alpha(t)=\beta(t)=\frac{1}{p(t)}+\mu. \tag{4.32}$$

Teorema 4.4.2. *Sea Γ una curva de Jordan. El conjunto $C^{\infty}(\Gamma)$ (e incluso el conjunto de las funciones racionales en Γ) es denso en $L^{p(\cdot)}(\Gamma,\rho)$ bajo las condiciones* (2.3) *para $t\in\Gamma$, $|\{t\in\Gamma:\ \rho(t)=0\}|=0$ y $(\rho(t))^{p(t)}\in L^1(\Gamma)$.*

El criterio de Fredholm para el operador $\mathcal{A}$ dado en (4.2) viene dado por el siguiente teorema:

Teorema 4.4.3. *Sea Γ una curva cerrada de Lyapunov y asumamos que el exponente $p(t)$, $t\in\Gamma$, satisface* (2.3) *y* (4.29). *El operador $\mathcal{A}=aP_{+}+bP_{-}$ con $a,b\in C(\Gamma)$ es un operador de Fredholm en $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ si y solamente si $a(t)\neq 0$, $b(t)\neq 0$ para todo $t\in\Gamma$. Bajo la presencia de la propiedad de Fredholm tenemos que* $\operatorname{Ind}\mathcal{A}=\operatorname{ind}\frac{a}{b}:=\aleph$.

Demostración. Para probar el teorema debemos mostrar que las afirmaciones se siguen como caso particular del Teorema 4.3.1. Debemos verificar que $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ es un espacio de tipo $\mathfrak{X}(\Gamma)$, para esto debemos ver que las condiciones (4.3)–(4.6) se satisfacen.
Condición (4.3) es obvia de (2.3) para $t\in\Gamma$. Condición (4.4) es evidente. Condición (4.5) se sigue del Teorema 4.4.1. Finalmente, la condición (4.6) viene del Teorema 4.4.2 lo que finaliza la prueba. $\square$

Ejemplo 4.4.1. Consideremos la ecuación

$$\frac{1}{2}\left[e^t+\frac{t^n}{t+3}\right]\varphi(t)+\frac{1}{2}\left[e^t-\frac{t^n}{t+3}\right]\frac{1}{\pi i}\text{p.v.}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,\mathrm{d}\tau=t^2,\ n\in\mathbb{Z} \tag{4.33}$$

definida en el espacio $L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, donde $\mathbb{T}=\{t\in\mathbb{C}\ :\ |z|=1\}$ y $p:\mathbb{T}\longrightarrow(1,\infty)$ es dada por la fórmula $p(t)=a+\frac{b}{\ln\left(\frac{A}{|t|}\right)}$ con $a\geqslant 1$, $b\geqslant 0$ y $A>1$.

Primero debemos verificar que en efecto esta ecuación está bien definida en el espacio $L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$, para ello debemos ver que p satisface (4.29). Para probar esto usaremos la propiedad del módulo de continuidad, donde una función ϕ en $[0,\ell]$ es llamada *módulo continua* si

$$\omega(\phi,h) \leqslant c\phi(h)$$

con

$$\omega(\phi,h) = \sup_{|t_1-t_2|\leqslant h} |\phi(t_1)-\phi(t_2)|, \quad t_1,t_2 \in [0,\ell].$$

Como se sabe, para que una función ϕ sea módulo continua es suficiente que:

(1) $\phi(s)$ sea continua en $[0,\ell]$.

(2) $\phi(0)=0$ y $\phi(s)>0$ para $s>0$.

(3) $\phi(s)$ es no decreciente y $\frac{\phi(s)}{s}$ es no creciente en una vecindad del punto $s=0$.

Dado que consideraremos la diferencia $p(t_1)-p(t_2)$, es suficiente considerar el caso $a=0$ y $b=1$ con lo que se prueba fácilmente que p_* satisface las condiciones (1)–(3). Esto prueba que la ecuación (4.33) está bien definida $L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$.
Ahora estudiaremos la propiedad de Fredholm del operador $\mathcal{A}=aP_+ + bP_-$, con $a(t)=u(t)+v(t)=e^t$, $b(t)=u(t)-v(t)=\frac{t^n}{t+3}$ para los coeficientes de la ecuación (4.33): $u(t)=\frac{1}{2}\left[e^t+\frac{t^n}{t+3}\right]$ y $v(t)=\frac{1}{2}\left[e^t-\frac{t^n}{t+3}\right]$.
Dado que las funciones continuas a y b no se anulan en $\mathbb{T}$, entonces las función $c=\frac{a}{b}$ es factorizable con factorización $c(t)=\frac{1}{t+3}t^n e^t$.
Del Teorema 4.4.3 tenemos que el operador $\mathcal{A}$ es de Fredholm con $\operatorname{Ind}\mathcal{A}=\operatorname{ind}\frac{a}{b}=n$.
Asumamos $n=1$. En este caso, del Teorema 4.3.2, la ecuación (4.33) tiene una solución si, y sólo si,

$$0=\int_{\mathbb{T}} t^2\frac{t+3}{t}(t+3)t^{-1}\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{T}}(t+3)^2\,\mathrm{d}t$$

lo cual es cierto del Teorema de Cauchy-Goursat. Así, en virtud del Teorema 4.3.3, el operador $\mathcal{A}$ es invertible a la izquierda con inversa dada por

$$\mathcal{A}^{-1}=(e^{-t}P_+ + \frac{1}{t+3}P_-)(t^{-1}P_+ + P_-)\frac{(t+3)^2}{t}I_{p(\cdot)}.$$

De donde se tiene que la única solución de la ecuación (4.33) está representada por

$$\varphi(t) = (e^{-t}P_+ + \frac{1}{t+3}P_-)(t^{-1}P_+ + P_-)(t+3)^2 t.$$

$\square$

Por otro lado, para establecer el criterio de Fredholm de $\mathcal{A}$ con coeficientes en $PC(\Gamma)$, las nociones de p-no singularidad y p-índice necesarias para aplicar el esquema de Gakhov-Muskhelishvili-Khvedelidze-Gohberg-Krupnik en este caso se redefinen como sigue:
Sea $a \in PC(\Gamma)$ y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sus puntos de discontinuidad.

Definición 4.4.1. *Una función $a \in PC(\Gamma)$ se dice $p(\cdot)$-singular si*

$$\inf_{t\in\Gamma} |a(t)| > 0$$

y en todos los puntos de discontinuidad se satisface que

$$\arg \frac{a(t_k - 0)}{a(t_k + 0)} \neq \frac{2\pi}{p(t_k)} (\mathrm{mod} 2\pi), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Definición 4.4.2. *Sea $a \in PC(\Gamma)$ una función $p(\cdot)$-no singular. El entero*

$$\operatorname{ind} a = \sum_{k=1}^{n} \left[\theta(t_k) - \frac{1}{2\pi} \arg \frac{a(t_k - 0)}{a(t_k + 0)} \right],$$

donde $\theta(t_k)$ es el incremento de a dado en (4.20), y los valores de $\frac{1}{2\pi} \arg \frac{a(t_k-0)}{a(t_k+0)}$ son escogidos en el intervalo

$$-\frac{1}{q(t_k)} < \frac{1}{2\pi} \arg \frac{a(t_k - 0)}{a(t_k + 0)} < \frac{1}{p(t_k)}$$

con $\frac{1}{p(t)} + \frac{1}{q(t)} \equiv 1$, es llamado el $p(\cdot)$-índice *de la función a.*

Observación 4.4.1. En este caso el $p(\cdot)$-índice de a es el índice de Cauchy de la imagen de $a^{\#}(t)$ que resulta del rango esencial de a uniendo sus puntos de discontinuidades $a(t_k - 0)$, $a(t_k + 0)$ mediante la curva

$$\left\{ (1-\mu)a(t_k - 0) + \mu a(t_k + 0) \ : \ \mu \in \mathsf{A}\left(0, 1, \frac{1}{p(t_k)}\right) \right\}.$$

Notemos que a diferencia del caso p constante (ver, [53]), los arcos circulares $\mathsf{A}\left(0,1,\frac{1}{p(t_k)}\right)$ pueden tener distintos ángulos dependiendo del valor de p en los puntos de discontinuidad de a. Por otro lado, recordemos que $\mu \in \mathsf{A}\left(0,1,\frac{1}{p(t_k)}\right)$ si es parametrizado como:

$$\mu(s) = \frac{e^{2\pi\left(s+\frac{i}{p(t_k)}\right)}}{e^{2\pi\left(s+\frac{i}{p(t_k)}\right)}-1}, \quad s \in [0,1].$$

Teorema 4.4.4. *Sea Γ una curva cerrada de Lyapunov y asumamos que el exponente $p(t)$, $t \in \Gamma$, satisface* (2.3) *y* (4.29). *El operador $\mathcal{A} = aP_+ + bP_-$ con $a, b \in PC(\Gamma)$ es un operador de Fredholm en $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ si y solamente si*

$$\inf_{t\in\Gamma} |a(t)| \neq 0, \quad \inf_{t\in\Gamma} |b(t)| \neq 0$$

y la función $\frac{a(t)}{b(t)}$ es $p(\cdot)$-no singular. Bajo estas condiciones

$$\operatorname{Ind} \mathcal{A} = -\operatorname{ind} \frac{a}{b}.$$

Demostración. Debemos mostrar que las afirmaciones se siguen como un caso particular del Teorema 4.3.4. Las condiciones (4.3)–(4.6) se satisfacen en $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ (ver prueba Teorema 4.4.3).
La validez del Axioma 4.1 para $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ se sigue del Teorema 4.4.1 en el caso particular (4.32). El embebimiento $L^{p(\cdot)}(\Gamma, |t-t_0|^\gamma) \subset L^1(\Gamma)$ para $\gamma < 1 - \beta(t_0)$, requerido por el Axioma 4.2 se sigue de (4.31) pues $\beta(t_0) = \frac{1}{p(t_0)}$ de acuerdo a (4.32). Finalmente, la densidad de $C^\infty(\Gamma)$ en el espacio $\mathcal{X}(\Gamma, |t-t_0|^\gamma)$ para $t_0 \in \Gamma$ se sigue como un caso particular del Teorema 4.4.2. $\square$

Ejemplo 4.4.2. Consideremos $L^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ dado en el Ejemplo 4.4.1. Sea $\mathcal{A} = aP_+ + bP_-$ el operador singular integral con coeficientes en $PC(\mathbb{T})$ definidos mediante la fórmula

$$a(t) = \begin{cases} i\sinh(t), & t \in \mathbb{T}_+ \\ 3t+i, & t \in \mathbb{T}_- \end{cases}, \quad b(t) = \begin{cases} 2+t, & t \in \mathbb{T}_+ \\ 3e^t, & t \in \mathbb{T}_- \end{cases}$$

donde $\mathbb{T}_+ := \{t \in \mathbb{T} \; : \; \Im m t > 0\}$ y $\mathbb{T}_- := \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_+$. Claramente $\inf_{t\in\mathbb{T}} |a(t)| \neq 0$ y $\inf_{t\in\mathbb{T}} |b(t)| \neq 0$. Sea

$$c(t) := \frac{a(t)}{b(t)} = \begin{cases} \frac{i\sinh(t)}{2+t}, & t \in \mathbb{T}_+ \\ \frac{3t+i}{3e^t}, & t \in \mathbb{T}_- \end{cases}.$$

Esta función satisface que $\inf_{t\in\mathbb{T}} |c(t)| \neq 0$. Probaremos que c es $p(\cdot)$-no singular

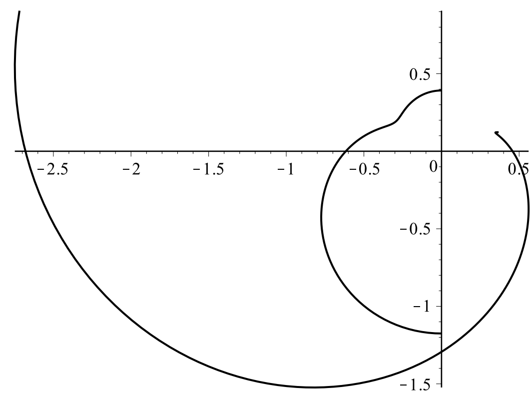

Figura 4.1: Rango de $c(t)$.

Notemos que el exponente $p(t) = \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{|t|}\right)}$, evaluado en los puntos de discontinuidad de c cumple que $p(-1) = p(1) \approx 1{,}44$ y por tanto $\frac{2\pi}{p(t_k)} \approx 4{,}35 \approx 0{,}69(\text{mod } 2\pi)$. Por otro lado,

$$\arg\frac{c(1-0)}{c(1+0)} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\arctan\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 0{,}20,$$

$$\arg\frac{c(-1-0)}{c(-1+0)} = \frac{-\frac{1}{2}\pi}{-\arctan\left(\frac{1}{3}\right)+\pi} \approx -1{,}79.$$

Así tenemos que $\arg\frac{c(t_k-0)}{t_k+0} \neq \frac{2\pi}{p(t_k)}(\text{mod} 2\pi)$, $k = 1, 2$. Es decir, c es $p(\cdot)$-no singular. Luego, del Teorema 4.4.4 el operador $\mathcal{A}$ es de Fredholm y su índice de Fredolm es igual a $-\operatorname{ind} c$. Este es el índice de Cauchy de la imagen de $c^{\#}(t)$ que consiste de $c(\mathbb{T})$ junto con los arcos que unen los puntos de discontinuidad de c, $\mathsf{A}\left(0, 1, \frac{1}{p(t_k)}\right)$ donde, en este caso, el ángulo $p(t_k) = 1{,}44$ en ambos puntos de discontinuidad. La imagen de $c^{\#}(t)$ se muestra en la siguiente figura:

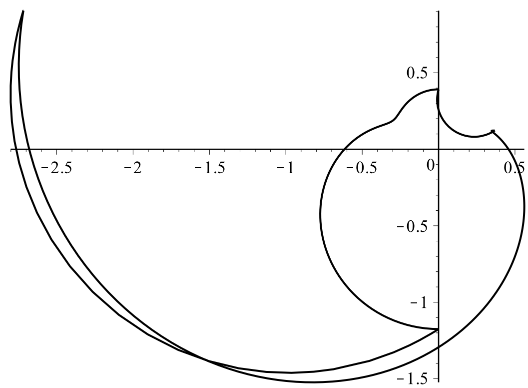

Figura 4.2: Rango de $c^{\#}(t)$.

De aquí concluimos que $\operatorname{Ind} \mathcal{A} = -\operatorname{ind} a = -1$, además $\dim\ker \mathcal{A} = 1$ y $\dim \operatorname{Coker} \mathcal{A} = 0$.

4.5. Notas y referencias bibliográficas

I. Simonenko [125, 126, 127] fue el primero en notar la naturaleza local de la propiedad de Fredholm para operadores de tipo convolución y así crea su principio local el cual es generalizado por Kozak [82] para álgebras de Banach generales. Para algunas comparaciones entre varios tipos de principios locales ver Clancey y Gosselin [23], Clansey y Gohberg [24] y Böttcher, Roch y Silbermann [17].
La acotación del operador singular de Cauchy en $L^{p(\cdot)}(\Gamma, \rho)$ con Γ una curva de Carleson (con longitud finita o infinita) y ρ un peso de tipo Khvedelidze puede ser hallada en [72], para pesos radiales oscilantes ver [64, 73]. La propiedad de Fredholm del operador $\mathcal{A}$ en espacios de

Lebesgue ponderados con exponente variable sobre curvas compuestas de Carleman con coeficientes lentamente oscilantes es estudiada mediante el método local de Simoenko por Rabinovich y Samko en [110].

La factorización de funciones pertenecientes a distintas subalgebras de $L^\infty(\Gamma)$ juega un papel principal en el estudio de la teoría de Fredholm, pseudoespectro e invertibilidad de operadores de tipo convolución, así como también en la solubilidad de ecuaciones singulares integrales y problemas de Riemann-Hilbert [16, 25, 52, 53, 89, 102]. Existen en la literatura diversos tipos de factorizaciones para clases especificas de funciones, ver por ejemplo [14, 37, 90]. Muchos de los primeros resultados en este tipo de factorizaciones aparecieron durante los años 1973–77 en el seminario de problemas con valores en la frontera coordinado por el Prof. G.S. Litvinchuk en la ciudad ucraniana de Odesa. Mucho de este conocimiento puede ser consultado en los textos pioneros [25, 90] así como en monografías más recientes [14, 37, 89] y en numerosos artículos de investigación en esta materia.

Los Teoremas 4.3.1, 4.3.4 y 4.4.4 aparecen publicados en [74], las técnicas utilizadas en sus demostraciones son las clásicas en la teoría de los operadores singulares integrales sobre curvas simples, aplicadas, con poca modificación, para este caso de los espacios $\mathcal{X}(\Gamma)$ y $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$. (Compare con [52] y [102]). Los Teoremas 4.3.2 y 4.3.3 también son probados mediante las técnicas clásicas sin mayores modificaciones; sin embargo, hasta donde sabemos estos no han sido publicados con anterioridad.

Bibliografía

[1] E. Acerbi and G.Mingione, *Functionals with $p(x)$ growth and regularity*, Attidella Accademia Nazionale dei Lincei Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali Rendiconti Lincei. Serie 9. Matematica e Applicazioni, 11**(3)** (2000), 169–174.

[2] E. Acerbi and G. Mingione, *Regularity results for stationary electrorheological fluids*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 164**(3)** (2002), 213–259.

[3] T. Adamowicz, A. Björn, J. Björn: *Regularity of $p(\cdot)$-superharmonic functions, the Kellogg property and semiregular boundary points*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire, (2013), por aparecer.

[4] Yu. A. Alkhutov, *The Harnack inequality and the Hölder property of solutions of nonlinear elliptic equations with a nonstandard growth condition*, Differentsial'nye Uravneniya, 33**(12)** (1997), 1651–1660, 1726, (En Ruso), (trad. en 'Differential Equations, 33**(12)**, 1997, 1653–1658 (1998)).

[5] G.R. Allan, *On one-side inverses in Banach algebras of holomorphic vector-valued functions*, J. London Math. Soc., 42, (1967), 463–470.

[6] A. Almeida and D. Drihem, *Maximal, potential and singular type operators on Herz spaces with variable exponents*, J. Math. Anal. Appl. 394**(2)** (2012), 781–795.

[7] A. Almeida, P. Harjulehto, P. Hästö and T. Lukkari, *Riesz and Wolff potentials and elliptic equations in variable exponent weak Lebesgue spaces*, Ann. Mat. Pura Appl., 4, (2013), por aparecer.

[8] A. Almeida and P. Hästö, *Besov spaces with variable smoothness and integrability*, J. Funct. Anal., 258**(5)** (2010), 1628–1655.

[9] A. Almeida and H. Rafeiro, *Inversion of the Bessel potential operator in weighted variable Lebesgue spaces*, J. Math. Anal. Appl., 340, (2008), 1336–1346.

[10] J. Alvarez and M. Milman, *H^p continuity properties of Calderón-Zygmund operators*, J. Math. Anal. Appl., **118** (1986), 67–79.

[11] J. Alvarez and M. Milman, *Vector-valued inequalities for strongly singular Calderón-Sygmund operators*, Rev. Mat. Iberoamericana, 2 (1986), 405–425.

[12] I. Aydin, *On variable exponent amalgam spaces*, An. St. Univ. Ovidius Constanta, 20**(3)** (2012), 5–20.

[13] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Pure and Applied Mathematics **129**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988, 469 pp.

[14] A. Böttcher, Y.I. Karlovich and I.M. Spitkovsky, *Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002, 462 pp.

[15] A. Böttcher, N. Krupnik and B. Silbermann, *A general look al local principles with special emphasis on the norm computation aspect*, Integral Equations Operator Theory, 11, (1988), 455–479.

[16] A. Böttcher and B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz Operators*, Springer, Berlin, 1990, 665 pp.

[17] A. Böttcher, S. Roch and B. Silbermann, *Local Constructions and Banach Algebras Associated with Toeplitz Operators on H^p*, Seminar Analysis 1985/86, 23–30, Akad. Wiss DDR, Berlin, 1986.

[18] A. Cabada and R.L. Pouso, *Existence theory for functional p-Laplacian equations with variable exponents*, Nonlinear Analysis, 52**(2)** (2003), 557–572.

[19] A. P. Calderón and A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math., 88, (1952), 85–139.

[20] L.P. Castro and A.M. Simões, *The impedance problem of wave diffraction by a strip with higher order boundary conditions*, American Institute of Physics, AIP - Conf. Proc., M. D. Todorov et al, 10 pp., NY, 2013.

[21] Y. Chen, S. Levine and M. Rao, *Variable exponent, linear growth functionals in image restoration.* SIAM J. Appl. Math. 66**(4)** (2006), 1383–1406.

[22] V. Chiadò Piat and A. Coscia, *Hölder continuity of minimizers of functionals with variable growth exponent*, Manuscripta Mathematica, 93**(3)** (1997), 283–299.

[23] K.F. Clancey and J.A. Gosselin, *On the local theory of Toeplitz operators*, Illinois J. Math., 22, (1978), 449–458.

[24] K.F. Clancey and I. Gohberg, *Localization of singular integral operators*, Math. Z., 169, (1979), 105–117.

[25] K.F. Clancey and I. Gohberg, *Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1981, 234 pp.

[26] R. Coifan and Y. Meyer, *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérique, 57 (1979), 2da. Edición.

[27] A. Coscia and G. Mingione, *Hölder continuity of the gradient of $p(x)$-harmonic mappings*, Comptes Rendus Mathématiques de l'Academie des Sciences, Paris, Série I Mathematique, 328**(4)** (1999), 363–368.

[28] D.V. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces, Foundations and Harmonic Analysis*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser Basel, 2013, 312 pp.

[29] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, J.M. Martell and C. Pérez, *The boundedness of classical operators on variable spaces*, Annales Academiae Scientiarium Fennicae. Mathematica, 31**(1)** (2006) 239–264.

[30] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza and C.J. Neugebauer, *The maximal function on variable L^p spaces.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 28, (2003), 223–238. Correcciones: ibidem 29, (2004), 247–249.

[31] L. Diening, *Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$*, Math. Inequal. Appl., 7(2) (2004), 245–253.

[32] L. Diening, *Maximal function on Musielak–Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces*, Bull. Sci. Math., 129 (2005), 657–700.

[33] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö and M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Lecture Notes in Math., Vol 2017, Springer, 2011, ix 509 pp.

[34] L. Diening and M. Růžička, *Calderon-Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ and problems related to fluid dynamics*, J. Reine Angew. Math. **563** (2003), 197–220.

[35] R.G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Segunda Edición, Text in Mathematics, Vol 179, Springer, New York, 1998, 194 pp.

[36] D.E. Edmunds, V. Kokilashvili and A. Meskhi, *On the boundedness and compactness of weighted Hardy operators in spaces* $L^{p(x)}$, Georgian Mathematical Journal. 12**(1)** (2005), 27–44.

[37] T. Ehrhardt, *Factorization Theory for Toeplitz plus Hankel Operators and Singular Integral Operators with Flip*, Tesis de Habilitación, Universitätsbibliothek der Technishen Universität Chemnitz, 2004, 253 pp.

[38] M. Eleuteri, P. Harjulehto and T. Lukkari, *Global regularity and stability of solutions to elliptic equations with nonstandard growth*, Complex Var. Elliptic Equ. 56**(7-9)** (2011), 599–622.

[39] A. El Hamidi, *Existence results to elliptic systems with nonstandard growth conditions*, J. Math. Anal. Appl., 300, (2004), 30–42.

[40] A.R. El Amrouss and F. Kissi, *Multiplicity of solutions for a general* $p(x)$*-Laplacian Dirichlet problem*, Arab Journal of Mathematical Sciences, 19**(2)** (2013), 205–216.

[41] H.W. Ellis and I. Halperin, *Function spaces determined by a levelling length function*, Canadian J. Math., 5, (1953), 576–592.

[42] X.Fan *Regularity of non standard Lagrangians* $f(x,\xi)$, Nonlinear Analysis, 27**(6)** (1996), 669–678.

[43] X. Fan and X. Fan, *A Knobloch-type result for* $p(t)$*-Laplacian systems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 282**(2)** (2003), 453–464.

[44] X. Fan, H.-Q Wu and F.-Z. Wang, *Hartman-type results for* $p(t)$*-Laplacian systems*, Nonlinear Analysis, 52**(2)** (2003), 585–594.

[45] W.-H. Fang and A.E. Yage, *Two methods for Toeplitz-plus-Hankel approximation to a data covariance matrix*, IEEE Trans. Sigal Process, 40**(6)** (1992), 1490–1498.

[46] X.L. Fan and Q.H. Zhang, *Existence of solutions for* $p(x)$*-Laplacian Dirichlet problem*, Nonlinear Anal. T.M.A., 52, (2003), 1843–1852.

[47] X. Fan and D. Zhao, *Regularity of minimizers of variational integrals with continuous* $p(x)$*-growth conditions*, Chinese Journal of Contemporary Mathematics, 17**(4)** (1996), 327–336.

[48] X. Fan and D. Zhao, *A class of De Giorgi type and Hölder continuity*, Nonlinear Analysis, Series A: Theory Methods, 36**(3)** (1999), 295–318.

[49] X. Fan and D. Zhao, *The quasi-minimizer of integral functionals with $m(x)$ growth conditions*, Nonlinear Analysis, Series A: Theory Methods, 39**(7)** (2000), 807–816.

[50] C. Fefferman, *Inequalities for strongly singular convolution operators*, Acta Math., 124 (1970), 9–36.

[51] C. Fefferman and E.M. Stein, *H^p-spaces of several variables*, Acta Math., 129, (1972), 137–193.

[52] I. Gohberg and N. Krupnik, *One-Dimensional Linear Singular Integral Equations Vol I. Introduction*, Operator Theory Advances and Applications, 53, Bassel-Boston, Birkhauser Verlag, 1992, 266 pp.

[53] I. Gohberg and N. Krupnik, *One-Dimensional Linear Singular Integral Equations Vol II. General Theory and Applications*, Operator Theory Advances and Applications, 54, Bassel-Boston, Birkhäuser Verlag, 1992, 232 pp.

[54] I. Gohberg and N. Krupnik, *The spectrum of singular integral operators in L_p spaces*, En: "Convolution Equations and Singular Integral Operators", eds: L. Lerer et al, Operator Theory Advances and Applications, 206, 111–126. Birkäuser, Basel, 2010.

[55] V. Guliev, J. Hasanov and S. Samko, *Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces*, Math. Scand. 107 (2010), 285–304.

[56] P. Gurka, P. Harjulehto and A. Nekvinda, *Bessel potential spaces with variable exponent*, Math. Inequal. Appl., 10**(3)** (2007), 661–676.

[57] I. Halperin, *Function spaces*, Canad. J. Math., 5, (1953), 273–288.

[58] T. Hao, *Electrorheological Fluids: The Non-aqueous Suspensions.* Elsevier, 2006, 402 pp.

[59] G.H. Hardy and J.E. Littlewood, *A maximal theorem with function–theoretic applications*, Acta Math., 54**(1)** (1930), 81–116.

[60] P. Harjulehto, P. Hästö, U. V. Le and M. Nuortio, *Overview of differential equations with non-standard growth*, Nonlinear Anal., 72, (2010), 4551–4574.

[61] H.G. Heuser, *Functional Analysis*, John Wiley & Sons, 1982, 424 pp.

[62] L. Hörmander, *Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations*, Proc. Symp. Pure Math., 10 (1967), 138–183.

[63] M. Izuki, *Boundedness of sublinear operators on Herz spaces with variable exponent and application to wavelet characterization*, Anal. Math., 36 (2010), 33–50.

[64] A.Yu Karlovich, *Remark on the boundedness of the Cauchy singular integral operator on variable Lebesgue spaces with radial oscillating weights*, Journal of Function Spaces and Applications, 7**(3)** (2009), 301–311.

[65] A.Yu. Karlovich, *Boundedness of pseudodifferential operators on Banach function spaces*, En: "Proceedings WOAT 2012", Operator Theory: Advances and Applications, por aparecer.

[66] A.Yu. Karlovich and A.K. Lerner, *Commutators of singular integrals on generalized L^p spaces with variable exponent*, Publ. Mat., 49 (2005), 111–125.

[67] A, Yu. Karlovich and I. M. Spitkovsky, *The Cauchy singular integral operator on weighted variable Lebesgue spaces*, En: "Concrete Operators, Spectral Theory, Operators in Harmonic Analysis and Approximation", Operator Theory: Advances and Applications, 236, (2014), 275–291.

[68] A.Yu. Karlovich and I.M. Spitkovsky, *Pseudodifferential operators on variable Lebesgue spaces*, En: "Operator Theory, Pseudodifferential Equations and Mathematical Physics", Operator Theory: Advances and Applications, 228, (2013), 173–184.

[69] V. Kokilashvili, *On a progress in the theory of integral operators in weighted Banach function spaces*, En: "Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis", Proceedings of the Conference held in Milovy, Bohemian- Moravian Uplands, 28 Mayo - 2 Junio, 2004, Math. Inst. Acad. Sci. Praga, (2005), 152–175.

[70] V. Kokilashvili, A. Meskhi and M. Sarwar, *Potential operators in variable exponent Lebesgue spaces: two-weight estimates*, Journal of Inequalities and Applications 2010, **2010**:329571 doi:10.1155/2010/329571.

[71] V. Kokilashvili and V. Paatashvili, *Boundary Value Problems for Analytic and Harmonic Functions in Nonstandard Banach Function Spaces*, Mathematics Research Developments, Nova Science Publishers, 2012, 280 pp.

[72] V. Kokilashvili, V. Paatashvili and S. Samko, *Boundedness in Lebesgue spaces with variable exponent of the Cauchy singular operator on Carleson curves*, Operator Theory: Advances and Applications, 170, (2006), 167–186.

[73] V. Kokilashvili, N. Samko and S. Samko, *Singular operators in variable spaces $L^{p(\cdot)}(\Omega,\rho)$ with oscillating weights*, Math. Nachr., 280 (2007), 1145–1156.

[74] V. Kokilashvili and S. Samko, *Singular integral equations in the Lebesgue spaces with variable exponent*, Proceedings of A. Razmadze Math. Inst., Vol 131, (2003), 61–78.

[75] V. Kokilashvili and S. Samko, *Singular integral in weighted Lebesgue spaces with variable exponent*, Georgian Math. J., 10**(1)** (2003), 145–156.

[76] V. Kokilashvili and S. Samko, *Maximal and fractional operators in weighted $L^{p(x)}$ spaces*, Rev. Mat. Iberoamericana, 20**(2)** (2004), 493–515.

[77] A.N. Kolmogorov, *Sur les fontions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier*, Fundamenta Math., 7, (1925), 23–28.

[78] A.N. Kolmogorov, *Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes*, Stud. Math., 5, (1934), 29–33.

[79] T.S. Kopaliani, *On some structural properties of Banach function spaces and boundedness of certain integral operators*, Czechoslovak Mathematical Journal, 54**(129)(3)** (2004), 791–805.

[80] O. Kovácĭk, *Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$*, Fascicola Matematică, 25, (1995), 87–94.

[81] O. Kovácĭk and J. Rákosnĭk, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$*, Czech. Math. J., 41**(116)** (1991), 592–618.

[82] A.V. Kozak, *A local principle in the theory of proyection methods*, Soviet Math. Dokl., 14, (1973), 1580–1583.

[83] S. M. Kozlov, *A certain type of duality of functionals*, Funkts. Anal. Prilozh., 17(3), (1983), 9–14 .

[84] M.A. Krasnoselskii, P.P. Zabreiko, E.I. Pustylnik and P.E. Sbolevskii, *Integral Operators in Spaces of Summable Functions*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1976, 520 pp.

[85] A.K. Lerner, *Some remarks on the Hardy-Littlewood maximal function on variable L^p spaces*, Math. Z., 251**(3)** (2005), 509–521.

[86] A.K. Lerner, *On some open questions related to the maximal operator on variable L^p spaces*, Trans. Amer. Mat. Soc., 362 (2010), 4229–4242.

[87] A.K. Lerner, *Some remarks on the Fefferman-Stein inequality*, J. Anal. Math., 112 (2010), 329–349.

[88] A.K. Lerner and C. Pérez, *Boundedness criterion for general maximal operators*, Publ. Mat., 54, (2010), 53–71.

[89] G.S. Litvinchuk, *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift*, Mathematics and its Applications, 523, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, xvi, 2000, 378 pp.

[90] G.S. Litvinchuk and I.M. Spitkovsky, *Factorization of Measurable Matrix Functions*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1987, 372 pp.

[91] G.G. Lorentz and D.G. Wertheim, *Representation of linear functional on Köthe spaces*, Canad. J. Math., 5, (1953), 568–575.

[92] W.A.J. Luxemburg, *Banach function spaces.* Ph.D. Thesis, Technische Hogeschool te Delft, 1955. 70 pp.

[93] A. Nekvinda, *Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$*, Math. Inequal. Appl., 7, (2004), 255–265.

[94] A. Nekvinda, *Maximal operator on variable Lebesgue spaces for almost monotone radial exponent*, J. Math. Anal. Appl., 337, (2008), 1345–1365.

[95] H. Nakano, *Modulared Semi-Ordered Linear Spaces*, Maruzen Co. Ltd., Tokio, 1950.

[96] H. Nakano, *Topology and Linear Topological Spaces*, Maruzen Co. Ltd., Tokio, 1951.

[97] P. Marcellini, *Regularity for elliptic equations with general growth conditions*, Journal of Differential Equations, 105**(2)** (1993), 296–333.

[98] E. Meister, F.-O. Speck and F.S. Texeira, *Wiener-Hopf-Hankel operators for some wedge diffraction problems with mixed boundary conditions*, J. Integral Equations Appl., 4**(2)** (1992), 229–255.

[99] N. Michalowski, D. Rule and W. Staubach, *Weighted L^p boundedness of pseudodifferential operators and applications*, Canad. Math. Bull., 55, (2012), 555–570.

[100] M. Mihăilescu and V. Rădulescu, *A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids*, Proc. R. Soc. A, 462 (2006), 2625–2641.

[101] M. Mihilescu, *Existence and multiplicity of solutions for a Neumann problem involving the $p(x)$-Laplace operator*, Nonlinear Anal., 67 (2007), 1419–1425.

[102] S.G. Mikhlin and S. Prössdorf, *Singular Integral Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1986, 528 pp.

[103] A. Miyachi, *Estimates for pseudo-differential operators of class $S^m_{\rho,\delta}$ in L^p, h^p and bmo*, En: "Analysis, Proc. Conf. Singapore 1986", North-Holland Math. Stud., 150, (1988), 177–187.

[104] A. Miyachi and K. Yabuta, *Sharp function estimates for pseudodifferential operators of class $S^m_{\rho,\delta}$*, Bull. Fac. Sci., Ibaraki Univ. Math., 19, (1987), 15–30.

[105] W. Orlicz, *Über konjugierte exponentenfolgen*, Studia Math., 3, (1931), 200–212.

[106] W. Orlicz, *Über räume* (L^M), Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Lett. CL. Math. Nat. A, (1936), 93–107.

[107] L. Pick and M. Růžička, *An example of a space of $L^{p(x)}$ on which the Hardy-Littlewood maximal operator is not bounded*, Expo. Math. 19**(4)** (2001), 369–371.

[108] V. Paatashvili, *Haseman's problems in classes of functions representable by the Cauchy type integral with density from $L^{p(\cdot)}(\Gamma;\rho)$*, Mem. Diff. Equations and Mathematical Physics, 50, (2010), 139–162.

[109] S.C. Power, *C^*-algebras generated by Hankel operators and Toeplitz operators*, J. Funct. Anal., 31, (1979), 52–68.

[110] V. Rabinovich and S. Samko, *Singular integral operators on weigted variable exponent Lebesgue spaces on composed Carleson curves*, Functional Analysis and Its Applications, 46**(1)** (2012) 73–76.

[111] V. Rabinovich and S. Samko, *Boundedness and Fredholmess of pseudodifferential operators in variable exponent spaces*, Integral Equations Operator Theory, 60, (2008), 507–537.

[112] H. Rafeiro, N. Samko and S. Samko, *Morrey-Campanato Spaces: an Overview*, En: "Operator Theory, Pseudo-Differential Equations, and Mathematical Physics", Operator Theory: Advances and Applications, 228 Birkhäuser, 2013, 293–324.

[113] S. Roch and B. Silbermann, *Algebras of Convolution Operators and Their Image in the Calkin Algebra*, Akad. Wiss DDK, Karl-Wierstrass-Institute Für Matematik Report MATH 90-05, Berlin, 1990, 160 pp.

[114] E.M. Rojas and H. Rafeiro, *Boundary value problems and singular integral equations on Banach function spaces*, preprint, 2014, 36 pp.

[115] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3ra Edición, International Series in Pure & Applied Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1987, 430 pp.

[116] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2da Edición, McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1991, 448 pp.

[117] M. Růžička, *Electroreological Fuids: Modeling and Mathematical Theory*, Springer, Lecture Notes in Math., 2000, vol. 1748, xiv 178 pp.

[118] S.G. Samko, *Convolution type operators in* $L^{p(x)}$, Integral Transforms and Special Functions, 7**(1-2)** (1998), 123–144.

[119] S.G. Samko, *Convolution type operators in* $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$, Integral Transforms and Special Functions, 7**(3-4)** (1998), 261–284.

[120] S.G. Samko, *Spaces* $L^{p(x)}(\Omega)$, (*c.* 2004). Manuscrito no publicado.

[121] I.I. Sharapudinov, *The topology of the space* $\mathcal{L}^{p(t)}([0,1])$, Math. Zametki, 26**(4)** (1979), 613–655.

[122] I.I. Sharapudinov, *Approximation of functions in the metric space* $\mathcal{L}^{p(\cdot)}([a,b])$ *and quadrature formulas*, En: "Constructive function theory '81 (Varma 1981)", Publ. House Bulgar. Acad. Sci. Sofia, (1983), 189–193.

[123] I.I. Sharapudinov, *The basis property of the Haar system in the space* $\mathcal{L}^{p(t)}([0,1])$ *and the principle of localization in the mean*, Math. Sb., (N.S.), 130 **(172)(2)** (1986), 275–283.

[124] I.I. Sharapudinov, *On the uniform boundedness in L^p $(p = p(x))$ of some families of convolution operators*, Math. Zametki, 59**(2)(302)** (1996), 291–302.

[125] I.B. Simonenko, *A new general method of investigating linear operators equations of singular integral equation type. Parte I*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Matem., 29, (1965), 567–586. Parte II: ibidem, 29, (1965), 757–782 (en Ruso).

[126] I.B. Simonenko, *Convolution type operators in cone*, Math USSR Sbornik, 3, (1967), 279–293.

[127] I.B. Simonenko, *Multidimensional discrete convolutions*, Mat. Issled, 3, (1968), 108–122 (en Ruso).

[128] I.B. Simonenko and M.N. Chin, *Local Method in the Theory of One Dimensional Singular Integral Equations with Piecewise Continuous Coefficients. Noetherity*, Rostov-on-Don State Univ., Rostov-on-Don, 1986 (en Ruso).

[129] E.M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.

[130] E.C. Titchmarsh, *On conjugate functions*, Proc. London Math. Soc., 29, (1928), 49–80.

[131] E.C. Titchmarsh, *Additional note on conjugate functions*, J. London Math., 4, (1929), 204–206.

[132] I.V. Tsenov *Generalization of the problem of best approximation of a function in the space L^s*, Uch. Zap. Dagestan. Gos. Unive., 7, (1961), 25–37.

[133] L.L. Wang, Y.H. Fan, W.G. Ge, *Existence and multiplicity of solutions for a Neumann problem involving the $p(x)$-Laplace operator*, Nonlinear Anal., 71 (2009), 4259—4270.

[134] E.W. Weisstein, *Electrorheological Fluids*, (1996) Disponible en el enlace: `http://scienceworld.wolfram.com/physics/ElectrorheologicalFluid.html`. Último accesso en 19 Mayo de 2014.

[135] N. Wiener *The ergodic theorem*, Duke Math. J., 5**(1)** (1939), 1–18.

[136] N. Wiener and E. Hopf, *Über eine klasse singulärer integralgleichugen*, Preaβ. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl., No 30/32, (1931), 696–706.

[137] J.-S. Xu, *Variable Besov and Triebel-Lizorkin spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 33, (2008), 511–522.

[138] W.H. Young, *On an inequality of Marcel Riesz*, Ann. of Math., 40, (1939), 567–574.

[139] A.C. Zaanen, *Note on a certain class of Banach spaces.* Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings LII (1949), 488–498 (Indagationes Mathematicae XI (1949), 148–158).

[140] V. V. Zhikov, *Problems of convergence, duality, and averaging for a class of functionals of the calculus of variations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 267**(3)** (1982), 524–528.

[141] V. V. Zhikov, *Questions of convergence, duality and averaging for functionals of the calculus of variations*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 47**(5)** (1983), 961–998.

[142] V. V. Zhikov, *Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 50**(4)** (1986), 675–887.

[143] V. V. Zhikov, *The Lavrentyev effect and averaging of nonlinear variational problems*, Differentsial'nye Uravneniya, 27**(1) (180)** (1991), 42–50.

[144] V. V. Zhikov, *On the homogenization of nonlinear variational problems in perforated domains*, Russian J. Math. Phys., 2**(3)** (1994), 393–408.

[145] V. V. Zhikov, *On Lavrentiev's phenomenon* Russian J. Math. Phys., 3**(2)** (1995), 249–269.

[146] V. V. Zhikov, *Meyer-type estimates for solving the nonlinear Stokes system*, Differ. Uravn., 33**(1) (143)** (1997), 107–114.

[147] V. V. Zhikov, *On some variational problems*, Russian J. Math. Phys., 5**(1)** (1997), 105–116.

[148] A. Sygmund, *Sur les fonctions conjuguées*, C.R. Acad. Sci. Paris, 187, (1928), 1025–1026.

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela.

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela
http://www.ciens.ucv.ve/ciens/amv/

IVIC

Gobierno **Bolivariano** de Venezuela

Ministerio del Poder Popular para **Ciencia, Tecnología e Innovación**

juventud BICENTENARIA