XXII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

Semigrupos de operadores en teoría de espacios de Banach

Manuel González

MÉRIDA, VENEZUELA, 9 AL 15 DE SEPTIEMBRE DE 2009

XXII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

Semigrupos de operadores en teoría de espacios de Banach

Manuel González
Universidad de Cantabria, Santander, España
gonzalem@unican.es

MÉRIDA, VENEZUELA, 9 AL 15 DE SEPTIEMBRE DE 2009

XXII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana.

La XXII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Facultad de Ciencias y Departamento de Matemáticas) y el Rectorado de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado.

2000 Mathematics Subject Classification: 46B03, (47A53, 47B10).

Semigrupos de operadores en teoría de espacios de Banach
Manuel González

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas
Preprensa e impresión: Editorial Texto
Depósito legal lf66020095102411
ISBN 978-980-261-107-2
Caracas, Venezuela
2009

Prefacio

Inspirados por la teoría de Fredholm y la de ideales de operadores [70], los autores de [2] introdujeron un concepto de *semigrupo de operadores*, cuyos principales ejemplos son los dos tipos de operadores semi-Fredholm Φ_+ y Φ_-, y los operadores tauberianos introducidos por Kalton y Wilansky en [57].

La teoría de ideales de operadores aborda el estudio de los espacios de Banach, no mediante sus propiedades intrínsecas, sino en términos de las propiedades de los operadores que actúan entre los espacios. El objetivo de la teoría de semigrupos es similar, pero las clases de operadores que utiliza tienen propiedades opuestas, como veremos.

Todo ideal de operadores $\mathcal{A}$ tiene asociados dos semigrupos $\mathcal{A}_+$ y $\mathcal{A}_-$. En el caso del ideal $\mathcal{K}$ de los operadores compactos, $\mathcal{K}_+$ y $\mathcal{K}_-$ son los operadores semi-Fredholm Φ_+ y Φ_- y en el caso del ideal $\mathcal{W}$ de los operadores débilmente compactos, $\mathcal{W}_+$ y $\mathcal{W}_-$ son los operadores tauberianos y los operadores cotauberianos. En [41] se han investigado varios semigrupos asociados a ideales definidos en términos de convergencia de sucesiones y en [30] y [34] se han estudiado otros semigrupos que admiten caracterización en términos de ultrapotencias. Observemos que los semigrupos asociados a $\mathcal{K}$ y a $\mathcal{W}$ han sido intensamente estudiados, mientras quedaría hacer un estudio paralelo para los semigrupos asociados a muchos otros ideales de operadores clásicos.

En este libro se expone la teoría de semigrupos de operadores, incluyendo los principales resultados y aplicaciones que se han obtenido sobre los semigrupos asociados a $\mathcal{K}$ y $\mathcal{W}$, e indicando problemas abiertos que podrían abordarse para otros semigrupos. Comenzaremos presentando las propiedades de las clases concretas de operadores que han sugerido la introducción del concepto de semigrupo.

En el primer capítulo se recuerdan algunos conceptos y resultados de análisis funcional, que se utilizarán en la exposición, y se introducen algunas notaciones. En particular, se recuerda la noción de sucesión básica y la de ultrapotencia de operadores.

El segundo capítulo es una breve introducción a la teoría de ideales de operadores, sistematizada por Pietsch en [70]. Se incluye varias clases que permiten clasificar los ideales, así como procedimientos de construcción y algunos ejemplos.

En el tercer capítulo se describe la teoría de Fredholm de operadores desde un punto de vista en que los ideales y los semigrupos aparecen como clases de operadores con propiedades claramente diferenciadas. Incluye las caracterizaciones perturbativas de los operadores semi-Fredholm y su aplicación al estudio de los operadores estrictamente singulares y estrictamente cosingulares.

En el capítulo cuarto se estudia el semigrupo $\mathcal{T}$ de los operadores tauberianos y el semigrupo dual $\mathcal{T}^d$ de los operadores cotauberianos. Después de presentar las propiedades básicas, se incluyen varias caracterizaciones fundamentales de los operadores tauberianos: sucesionales, perturbativas, en términos de las imágenes de las sucesiones básicas y en términos de la acción sobre conjuntos convexos cerrados. Además, se presentan los correspondientes resultados para operadores cotauberianos, cuando existen. También se presta cierta atención al caso de los operadores tauberianos con dominio en el espacio $L_1(\mu)$ de las funciones integrables, y a los operadores cuyas ultrapotencias pertenecen a $\mathcal{T}$ o $\mathcal{T}^d$.

El capítulo quinto comienza con una introducción axiomática de los semigrupos de operadores, paralela a la de los ideales de operadores. Se introducen conceptos para clasificar los semigrupos y se presentan procedimientos que permiten obtener familias de ejemplos de semigrupos. La última parte describe los semigrupos asociados a algunos ideales de operadores que admiten caracterización en términos de sucesiones.

El capítulo sexto describe con detalle una variante de la conocida factorización introducida por Davis, Figiel, Johnson y Pełczyński en [17], la *factorización DFJP*. Esta construcción tiene gran interés porque proporciona abundantes ejemplos de operadores tauberianos y cotauberianos, y además, a través de ella los operadores tauberianos se han aplicado en la investigación de las propiedades isomorfas de los espacios de Banach. También se describen brevemente otras variantes de factorización DFJP, introducidas por diversos autores, y se muestran resultados de factorización para ideales de operadores concretos que se obtienen a partir de la primera variante mencionada.

En el capítulo séptimo se describen algunas otras aplicaciones de los operadores tauberianos, como las condiciones para la equivalencia de la propiedad de Radon-Nykodým y la propiedad de Krein-Milman, encontradas por Schachermayer [74], la preservación de propiedades isomorfas de espacios de Banach y conjuntos acotados por medio de operadores tauberianos [66], o las caracterizaciones de algunas versiones de la propiedad de aproximación para espacios de Banach [8, 9, 59].

Los requisitos para seguir la exposición son los conocimientos que se adquieren en un curso de análisis funcional en espacios normados, incluyendo el teorema de Hahn-Banach, la topología débil en un espacio de Banach y la topología $*$-débil en su dual, el teorema de la aplicación abierta y la dualidad para operadores lineales continuos.

Este libro no hubiera aparecido sin la colaboración científica establecida con la Universidad de los Andes, en Mérida, y la Universidad de Oriente, en Cumaná; por ello agradezco a Pietro Aiena, José Giménez, Ennis Rosas y Margot Salas-Brown, que la hicieron posible. La monografía [36] ha sido referencia principal durante la redacción, por lo que reconozco la ayuda de Antonio Martínez-Abejón. También debo agradecer a los miembros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Cantabria, por un ambiente de trabajo estimulante; y al organismo nacional español para la promoción de la investigación, por la ayuda financiera proporcionada al Proyecto MTM2007-67994.

Manuel González
Santander, Junio de 2009

Índice general

Capítulo 1

Espacios de Banach y operadores

En este capítulo recordaremos algunos conceptos básicos y fijaremos notaciones que se utilizarán más adelante.

Espacios

Generalmente X, Y y Z son espacios de Banach sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$. Además, $B_X := \{x \in X\colon \|x\| \leq 1\}$ denota la bola unidad cerrada de X y $S_X := \{x \in X\colon \|x\| = 1\}$ la esfera unidad de X.

Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ es un espacio vectorial X se dicen *equivalentes* si existe una contante $d \geq 1$ de modo que

$$d^{-1}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq d\|x\|_1 \quad \text{para todo } x \in X.$$

Sea A un subconjunto no vacío de X. Se denota por $\operatorname{span}\{A\}$ el subespacio generado por A, y por $\overline{\operatorname{span}}\{A\}$ la clausura (en norma) de $\operatorname{span}\{A\}$.

El dual de X, denotado X^*, es el conjunto de las aplicaciones lineales continuas de X en $\mathbb{R}$. Sean $x \in X$ y $x^* \in X^*$. Denotamos por $\langle x^*, x\rangle$ el valor de x^* en x.

El dual de X^* se denota X^{**} y se denomina *segundo dual (o bidual)* de X. Ocasionalmente aparecerá X^{***}, que es el *tercer dual* de X.

A cada $x \in X$ se le asocia $\hat{x} \in X^{**}$ definido por

$$\langle \hat{x}, x^* \rangle := \langle x^*, x \rangle \quad (x \in X).$$

De este modo obtenemos una isometría lineal $J_X \colon X \longrightarrow X^{**}$ de X en X^{**}. Frecuentemente identificaremos X con el subespacio $J_X(X)$ del bidual X^{**}.

Operadores

Sean X e Y espacios de Banach. Un *operador* de X en Y es una aplicación lineal y continua de X en Y. Denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ el conjunto de todos los operadores de X en Y.

El operador nulo y el operador identidad en X se denotan 0_X y I_X.

Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. El *núcleo* de T es $N(T) := T^{-1}(0)$, su rango es $R(T) := T(X)$ y su conúcleo es $Y/\overline{R(T)}$.

El *operador conjugado* de $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es el operador $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ definido por $T^*y^* := y^* \circ T$; es decir,

$$\langle T^*y^*, x \rangle = \langle y^*, Tx \rangle \quad y^* \in Y^*, x \in X.$$

El segundo conjugado de T es $T^{**} := (T^*)^*$ y T^{***} es el tercer conjugado de T.

Nótese que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
X^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & Y^{**} \\
X \arrow[u, "J_X"] \arrow[r, "T"'] & Y \arrow[u, "J_Y"']
\end{tikzcd}$$

Por tanto, podemos considerar T^{**} como una extensión de T.

Un *isomorfismo* de X en Y es un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ inyectivo y con rango cerrado (no necesariamente biyectivo).

Si $T \colon X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo, existe una constante $d \geq 1$ tal que $d^{-1} \leq \|T(x)\| \leq d$ para todo $x \in S_X$.

Diremos que *podemos identificar dos espacios de Banach* X e Y cuando existe un isomorfismo biyectivo $A \colon X \longrightarrow Y$.

Similarmente, diremos que *podemos identificar dos operadores* $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ y $T \in \mathcal{L}(V,X)$ cuando existen dos isomorfismos biyectivos $A\colon Y \longrightarrow V$ y $B\colon X \longrightarrow Z$ de modo que $S = BTA$.

En los dos casos anteriores, si los isomorfismos biyectivos son isometrías, diremos que *la identificación es isométrica.*

Una *proyección en* X es un operador $P\colon X \longrightarrow X$ que verifica $P^2 = P$. Nótese que $R(P) = N(I_X - P)$; luego es cerrado. Además,

$$X = R(P) \oplus N(P).$$

Un subespacio de X se dice *complementado* si coincide con el rango de una proyección en X.

Denotamos por $\mathcal{L}$ la clase de todos los operadores entre espacios de Banach.

Una subclase $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ viene determinada por sus *componentes*

$$\mathcal{A}(X,Y) := \mathcal{A} \cap \mathcal{L}(X,Y),$$

donde X e Y son espacios de Banach.

En el caso $X = Y$ escribiremos $\mathcal{A}(X)$ en lugar de $\mathcal{A}(X,X)$.

Ejemplos de espacios de Banach

Sea $1 \leq p < \infty$ y (a_i) una sucesión de números reales. Definimos

$$\|(a_i)\|_p := \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\Big)^{1/p}$$

y $\|(a_i)\|_\infty := \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$.

Sea $1 \leq p \leq \infty$. Definimos los espacios de sucesiones de escalares

$$\ell_p := \{(a_i)\colon \|(a_i)\|_p < \infty\}.$$

Los espacios ℓ_p (con la correspondiente norma $\|\cdot\|_p$) son espacios de Banach.

El espacio $c_0 := \{(a_i)\colon \lim_{i\to\infty} a_i = 0\}$, como subespacio cerrado de ℓ_∞, es también espacio de Banach.

En general, si (X_i) es una sucesión de espacios de Banach, el espacio

$$\ell_p(X_i) := \{(x_i)\colon x_i \in X_i,\ \|(x_i)\|_p < \infty\},$$

con la norma $\|(x_i)\|_p := \|(\|x_i\|)\|_p$, es también un espacio de Banach.

Denotamos $C[0,1]$ al espacio de las funciones continuas $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, que es un espacio de Banach con la norma del supremo:

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

Sea $1 \leq p < \infty$. Podemos definir los espacios de funciones $L_p(0,1)$ de modo análogo a ℓ_p, sustituyendo sumas por integrales:

$$\|f\|_p := \Big(\int_0^1 |f(t)|^p dt\Big)^{1/p}.$$

Similarmente, $L_\infty(0,1)$ es el espacio de las funciones medibles esencialmente acotadas y $\|f\|_\infty$ es el supremo esencial de f.

La definición de los espacios $L_p(0,1)$ es técnicamente más complicada porque sus elementos no son propiamente funciones, sino clases de funciones medibles: dos funciones medibles f y g están en la misma clase cuando $\{t \in (0,1)\colon f(t) \neq g(t)\}$ tiene medida cero.

1.1. Topologías débiles

Además de la topología asociada a la norma, en un espacio de Banach X tenemos la *topología débil*, que se denota $\sigma(X,X^*)$ o w. Puede describirse como la menor topología localmente convexa en X para la que los elementos de X^* son aplicaciones continuas. La topología de la norma coincide con la topología débil únicamente en espacios de dimensión finita.

Una sucesión (x_n) en X es *débilmente de Cauchy* si $(\langle x^*, x_n\rangle)$ converge en $\mathbb{R}$ para todo $x^* \in X^*$; además, (x_n) *converge débilmente* a $x \in X$ si $(\langle x^*, x_n\rangle)$ converge a $\langle x^*, x\rangle$ para todo $x^* \in X^*$.

Por el teorema de la acotación uniforme, las sucesiones débilmente de Cauchy son acotadas.

Sea A un subconjunto de X. La clausura de A (en la topología de la norma) se denota $\overline{A}$; su clausura débil (en la topología $\sigma(X,X^*)$) se denota $\overline{A}^w$, o $\overline{A}^{\sigma(X,X^*)}$ si puede haber confusión.

Como consecuencia del teorema de Hahn-Banach, los subconjuntos convexos (en especial, los subespacios) cerrados de un espacio de Banach son w-cerrados.

Es fácil comprobar que un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es débilmente continuo; es decir, continuo de (X,w) en (Y,w).

En el espacio dual X^*, además de la topología de la norma y la débil, tenemos la *topología $*$-débil*, denotada $\sigma(X^*,X^{**})$ o w^*. Puede describirse como la menor topología localmente convexa en X^* para la que los elementos de $J_X(X)$ son aplicaciones continuas. La topología débil coincide con la $*$-débil únicamente si X es reflexivo.

Recordemos que X se dice *reflexivo* si $J_X(X) = X^{**}$.

Una sucesión (x_n^*) en X^* es *$*$-débilmente convergente* a $x^* \in X^*$ si $(\langle x_n^*, x\rangle)$ converge a $\langle x_n^*, x\rangle$ para todo $x \in X$. Nótese que, por el Teorema de Banach-Steinhaus, las sucesiones $*$-débilmente de Cauchy son $*$-débilmente convergentes.

Sea B un subconjunto de X^*. La clausura $*$-débil de B se denota $\overline{B}^{w^*}$, o $\overline{B}^{\sigma(X^*,X)}$ si puede haber confusión.

Considerando X como un subespacio de X^{**}, si A es un subconjunto de X, denotaremos por $\overline{A}^{w^*}$ la clausura $*$-débil de A en X^{**}.

Es fácil comprobar que el conjugado T^* de un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es w^*-débilmente continuo; es decir, continuo de (Y^*,w^*) en (X^*,w^*).

Veamos algunos resultados fundamentales sobre las topologías w y w^*.

Teorema 1.1.1. (Teorema de Alaoglu) *En un espacio dual X^*, la bola unidad B_{X^*} es un subconjunto w^*-compacto de X^*.*

Teorema 1.1.2. (Teorema de Goldstine) *En un espacio de Banach X, se verifica $\overline{B_X}^{w^*} = B_{X^{**}}$.*

Teorema 1.1.3. (Teorema de Eberlein-Smulian) *Sea A un subconjunto de un espacio de Banach X. Son equivalentes:*

(a) $\overline{A}^{w}$ es débilmente compacto;

(b) $\overline{A}^{w^*} \subset X$;

(c) cada sucesión en A tiene una subsucesión débilmente convergente.

El teorema de Eberlein-Smulian permite caracterizar los espacios reflexivos.

Corolario 1.1.1. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(a) B_X *es un conjunto débilmente compacto;*

(b) X *es reflexivo;*

(c) cada sucesión acotada en X *tiene una subsucesión débilmente convergente.*

Sea A un subconjunto de X. El *anulador de A en X^**, definido por

$$A^\perp := \{x^* \in X^* \colon \langle x^*, x\rangle = 0,\, \forall x \in A\},$$

es un subespacio w^*-cerrado de X^*.

Similarmente, si B es un subconjunto de X^*, el *anulador de B en X*, definido por

$$B_\perp := \{x \in X \colon \langle x^*, x\rangle = 0,\, \forall x^* \in B\}.$$

es un subespacio w-cerrado de X.

El siguiente resultado resume las relaciones de dualidad que existen entre un operador y su conjugado.

Proposición 1.1.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se verifica:*

(i) $R(T)^\perp = N(T^*)$ *y* $\overline{R(T)} = N(T^*)_\perp$;

(ii) $R(T^*)_\perp = N(T)$ *y* $\overline{R(T^*)} \subset N(T)^\perp$;

(iii) si $R(T)$ *es cerrado,* $R(T^*) = N(T)^\perp$.

Dualidad subespacio-cociente

Sea E un subespacio cerrado de X. Denotamos por $J_E \colon E \longrightarrow X$ la inclusión natural de E en X; $Q_E \colon X \longrightarrow X/E$ denota el operador cociente.

Recordemos que ${Q_E}^*$ aplica $(X/E)^*$ sobre $E^\perp$ isometricamente; es decir, el dual de un cociente de X se identifica isométricamente con un subespacio de X^*.

Además, como $N(J_E{}^*) = E^\perp$, el operador $J_E{}^*$ induce un operador isométrico de $X^*/E^\perp$ sobre E^* que lleva $f + E^\perp$ a $f \circ J_E$; es decir, el dual de un subespacio cerrado de X se identifica isométricamente con un cociente de X^*.

Similarmente $(X/E)^{**}$ se identifica isométricamente con $X^{**}/E^{\perp\perp}$ y E^{**} con $E^{\perp\perp}$.

1.2. Bases y sucesiones básicas

Se recogen algunos conceptos y resultados relacionados con las bases de Schauder en un espacio de Banach. En particular, se presentan criterios para que una sucesión tenga una subsucesión básica.

Definición 1.2.1. *Una sucesión* (x_n) *en un espacio de Banach* X *es una* base (de Schauder) *de* X *si para cada* $x \in X$ *existe una única sucesión de escalares* (a_n) *de modo que* $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.

Denotemos por e_n la sucesión que tiene un 1 en la posición n-ésima y un 0 en las restantes posiciones:

$$e_1 := (1, 0, 0, 0, \ldots),\ e_2 := (0, 1, 0, 0, \ldots),\ e_3 := (0, 0, 1, 0, \ldots), \ldots$$

La sucesión (e_n) es base de c_0 y de ℓ_p para $1 \leq p < \infty$.

Observación 1.2.1. (e_n) *es una sucesión de sucesiones.*

Si (x_n) es una base de X, se sigue de los teoremas fundamentales del análisis funcional que, para cada $k \in \mathbb{N}$, la expresión

$$\Big\langle x_k^*, \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \Big\rangle := a_k$$

define un elemento $x_k^* \in X^*$. Además

$$P_k\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\Big) := \sum_{n=1}^{k} a_n x_n$$

define una proyección $P_k \colon X \longrightarrow X$ tal que $\lim_k P_k(x) = x$ para todo $x \in X$; por tanto, (P_k) es una sucesión acotada en $\mathcal{L}(X)$.

Definición 1.2.2. *Sea* (x_n) *una base de* X*. La sucesión* (x_n^*) *se denomina* sucesión de funcionales coeficientes *de la base* (x_n)*.*

Además, $C := \sup_{k\in\mathbb{N}} \|P_k\|$ *es la* constante de base *de* (x_n)*.*

Nótese que si (x_n) es una base de X y $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$, se verifica $a_i = \langle x_i^*, x\rangle$. Luego los funcionales coeficientes vienen determinados por las igualdades

$$\langle x_i^*, x_j\rangle = \delta_{ij} \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Definición 1.2.3. *Una sucesión* (x_n) *en* X *se dice* básica *si es una base del subespacio* $\overline{\mathrm{span}}\{x_n\}$*.*

Si (x_n) es base de X, la sucesión de funcionales coeficientes (x_n^*) es una sucesión básica de X^*. De hecho, para cada $x^* \in \overline{\mathrm{span}}\{x_n^*\}$,

$$x^* = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x^*, x_n\rangle x_n^*.$$

Definición 1.2.4. *Sea* (x_n) *una sucesión básica en* X*. Una sucesión* (y_n) *se dice* base de bloques *de* (x_n) *si existe una sucesión* $m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \cdots$ *en* $\mathbb{N}$ *y una sucesión de escalares* (α_n) *de modo que, para cada* $j \in \mathbb{N}$*,*

$$y_j = \sum_{i=m_j}^{n_j} \alpha_i x_i \neq 0.$$

Es fácil comprobar que una base de bloques de una sucesión básica es también sucesión básica.

El siguiente resultado permite reconocer las sucesiones básicas.

Proposición 1.2.1. [5, Proposition 1.1.9] *Una sucesión de vectores no nulos* (x_n) *en* X *es básica si y solo si existe una constante positiva* C *tal que*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} a_k x_k \Big\| \leq C \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \Big\|$$

para toda sucesión de escalares (a_k) *y* $m \leq n$ *en* $\mathbb{N}$*.*

Este criterio permite probar que en cualquier espacio de Banach de dimensión infinita podemos encontrar sucesiones básicas. Véase [60, Theorem 1.a.5].

Definición 1.2.5. *Una base* (x_n) *es* X *se dice* incondicional *si para todo* $x \in X$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n^*, x \rangle x_n$ *converge incondicionalmente.*

Obviamente, (e_n) es base incondicional de c_0 y de ℓ_p para $1 \leq p < \infty$.

Observación 1.2.2. *El sistema de Haar [5, Proposition 6.1.3] es base de* $L_p(0,1)$ *para* $1 \leq p < \infty$ *y es incondicional para* $1 < p < \infty$*. Sin embargo,* $L_1(0,1)$ *no tiene base incondicional.*

Una sucesión básica (x_n) se dice *incondicional* si es base incondicional de $\overline{\operatorname{span}}\{x_n\}$.

Kadec y Pełczyński [56] obtuvieron un criterio que permite averiguar si un subconjunto contiene una sucesión básica. Podemos encontrar una demostración en [5, Theorem 1.5.6].

Teorema 1.2.1. (Criterio de Kadec-Pełczyński) *Sea* S *un subconjunto acotado de un espacio de Banach tal que* $0 \notin \overline{S}$*. Son equivalentes:*

(a) S *no contiene sucesiones básicas;*

(b) $\overline{S}^w$ *es débilmente compacto y* $0 \notin \overline{S}^w$*.*

Diremos que una sucesión (x_n) es *seminormalizada* si es acotada y verifica $\inf_n \|x_n\| > 0$.

Corolario 1.2.1. *Sea* (x_n) *un sucesión seminormalizada en un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(a) (x_n) *no tiene subsucesiones básicas;*

(b) *cada subsucesión de* (x_n) *tiene una subsucesión débilmente convergente a un vector* $x \neq 0$*.*

Como consecuencia, toda sucesión básica débilmente convergente es débilmente nula.

Definición 1.2.6. *Una sucesión* (x_n) *en* X *y otra* (y_n) *en* Y *se dicen* equivalentes *si existe un isomorfismo biyectivo*

$$T\colon \overline{\operatorname{span}}\{x_n\} \longrightarrow \overline{\operatorname{span}}\{y_n\}$$

tal que $Tx_n = y_n$ *para todo* n*.*

Es fácil ver que, si (x_n) e (y_n) son sucesiones equivalentes y una de ellas es básica, la otra también lo es.

El siguiente resultado, obtenido en [71], permite detectar subespacios isomorfos a ℓ_1 en un espacio de Banach. Podemos encontrar una demostración en [5, Theorem 10.2.1].

Teorema 1.2.2. (Teorema de Rosenthal) *Sea (x_n) una sucesión acotada en X. Entonces*

(i) *(x_n) tiene una subsucesión débilmente de Cauchy, ó*

(ii) *(x_n) tiene una subsucesión equivalente a la base (e_n) de ℓ_1.*

Para enunciar un resultado similar al Teorema 1.2.2, pero con subespacios isomorfos a c_0, necesitamos el siguiente concepto.

Definición 1.2.7. *Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio de Banach X se dice* w.u.C *si $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < \infty$ para todo $f \in X^*$; o equivalentemente, si*

$$\sup\Big\{\Big\|\sum_{i\in A} x_i\Big\| : A \text{ subconjunto finito de } \mathbb{N}\Big\} < \infty.$$

El nombre w.u.C. viene de *weakly unconditionally Cauchy.*

Ejercicio 1.2.1. *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ en el espacio c_0 es w.u.C.*

El siguiente resultado, obtenido en [13], permite detectar subespacios isomorfos a c_0 en un espacio de Banach. Podemos encontrar una demostración en [18, Corollary V.7].

Proposición 1.2.2. (Criterio de Bessaga-Pełczyński) *Una sucesión básica (x_n) en un espacio de Banach es equivalente a la base (e_n) de c_0 si y solo si $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es w.u.C.*

En el caso de espacios con base incondicional, el Teorema 1.2.2 y la Proposición 1.2.2 permiten caracterizar los espacios reflexivos.

Proposición 1.2.3. [5, Theorem 3.3.3] *Un espacio de Banach con base incondicional es reflexivo si y solo si no contiene subespacios complementados isomorfos a c_0 ni a ℓ_1.*

Sucesiones básicas y dualidad

Veamos algunas clases de sucesiones básicas que son útiles en el estudio de los espacios de Banach.

Definición 1.2.8. *Sea (x_n) una sucesión básica en un espacio de Banach X.*

(i) *(x_n) se dice* acotadamente completa *si, dada una sucesión de escalares (α_j) para la que* $\sup_n \|\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\| < \infty$, *la serie $\sum_{j=1}^\infty \alpha_j x_j$ converge;*

(ii) *(x_n) se dice* shrinking *si $\|x^*|_{X_n}\| \underset{n}{\longrightarrow} 0$ para todo $x^* \in X^*$, donde $X_n := \overline{\mathrm{span}}\{x_i\}_{i=n}^\infty$.*

Proposición 1.2.4. [60, Proposition 1.b.2] *Una base (x_n) en X es shrinking si y solo si la sucesión de funcionales coeficientes (x_n^*) es base de X^*.*

Proposición 1.2.5. [60, Proposition 1.b.4] *Un espacio de Banach X con base acotadamente completa es isomorfo a un espacio dual. De hecho, es isomorfo al dual de $\overline{\mathrm{span}}\{x_n^*\}$.*

Combinando estos resultados obtenemos una caracterización de los espacios con base reflexivos.

Proposición 1.2.6. [60, Proposition 1.b.5] *Un espacio de Banach X con base (x_n) es reflexivo si y solo si (x_n) es shrinking y acotadamente completa.*

En el caso de espacios con base incondicional, tenemos otras caracterizaciones.

Teorema 1.2.3. [5, Theorem 3.3.1] *Sea X un espacio con base incondicional (x_n). Son equivalentes:*

(a) *la base (x_n) es shrinking;*

(b) *X no tiene subespacios isomorfos a ℓ_1;*

(c) *X no tiene subespacios complementados isomorfos a ℓ_1.*

Teorema 1.2.4. [5, Theorem 3.3.2] *Sea X un espacio con base incondicional (x_n). Son equivalentes:*

(a) *la base (x_n) es acotadamente completa;*

(b) *X no tiene subespacios isomorfos a c_0;*

(c) *X no tiene subespacios complementados isomorfos a c_0.*

1.3. Ultraproductos de espacios y operadores

El concepto de ultraproducto proviene de la teoría de modelos. Se utiliza como herramienta en análisis funcional, especialmente las versiones para espacios y operadores.

En esta sección daremos las definiciones y una descripción rápida de las propiedades que utilizaremos más adelante. Un desarrollo más completo puede encontrase en [46].

Denotaremos por I un conjunto infinito, que jugará el papel de conjunto de índices.

Filtros y ultrafiltros

Un *filtro sobre* I es una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de I verificando las siguientes condiciones:

(i) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$,

(ii) *si* $A, B \in \mathfrak{F}$, $A \cap B \in \mathfrak{F}$,

(iii) *si* $A \in \mathfrak{F}$ *y* $A \subset B$, $B \in \mathfrak{F}$.

Veamos algunos ejemplos típicos de filtros:

(1) el *filtro de Fréchet* está formado por los subconjuntos de I cuyo complemento es finito;

(2) la colección de los subconjuntos de I que contienen un subconjunto prefijado A_0 de I.

La clave para la construcción de ultraproductos es la siguiente variedad de filtro.

Definición 1.3.1. *Un* ultrafiltro $\mathfrak{U}$ *sobre* I *es un filtro que verifica la siguiente condición de maximalidad:*

(iv) para cada subconjunto A *de* I*,* $A \in \mathfrak{U}$ *ó* $I \setminus A \in \mathfrak{U}$*.*

Como consecuencia del lema de Zorn, todo filtro admite una ampliación que es un ultrafiltro.

Un ultrafiltro se dice *no trivial* si es una ampliación del filtro de Fréchet.

Un ultrafiltro no trivial se dice $\aleph_0$-*incompleto* si existe una partición numerable $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ de I tal que $I_n \notin \mathfrak{U}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Todo ultrafiltro no trivial sobre $\mathbb{N}$ es $\aleph_0$-incompleto. Además, si no se admite la existencia de cardinales medibles, lo mismo es cierto para cualquier I.

Definición 1.3.2. *Sea* X *un espacio topológico,* $x_0 \in X$ *y* $\mathfrak{F}$ *un filtro sobre* I*. Una familia* $(x_i)_{i\in I} \subset X$ converge a x_0 según $\mathfrak{F}$ *si para cada entorno abierto* $\mathcal{V}$ *de* x_0*,*

$$\{i \in I \colon x_i \in \mathcal{V}\} \in \mathfrak{F}.$$

Usaremos como notación $x = \lim_{\mathfrak{F}} x_i$ *ó* $x_i \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} x$*.*

Si $I = \mathbb{N}$ y $\mathfrak{F}$ es el filtro de Fréchet, la convergencia según $\mathfrak{F}$ es la convergencia usual de sucesiones.

El siguiente resultado es fundamental para la construcción de ultraproductos. La demostración es un ejercicio.

Lema 1.3.1. *Sea* X *un espacio topológico compacto y* $\mathfrak{U}$ *un ultrafiltro sobre* I*. Toda familia* $(x_i)_{i\in I}$ *en* X *converge según* $\mathfrak{U}$*.*

Ultraproductos y ultrapotencias

Supondremos que $\mathfrak{U}$ es un ultrafiltro $\aleph_0$-incompleto sobre I.

Sea $(X_i)_{i\in I}$ una colección de espacios de Banach, $\ell_\infty(I, X_i)$ el espacio de Banach de las familias acotadas $(x_i)_{i\in I}$, con $x_i \in X_i$, dotado de la norma del supremo $\|(x_i)_{i\in I}\|_\infty := \sup_{i\in I} \|x_i\|$.

El subconjunto $N_{\mathfrak{U}}(X_i)$ de las familias $(x_i)_{i\in I}$ de $\ell_\infty(I,X)$ que converge a 0 según $\mathfrak{U}$ es un subespacio cerrado.

Definimos el *ultraproducto de* $(X_i)_{i\in I}$ *según* $\mathfrak{U}$ como el cociente

$$(X_i)_{\mathfrak{U}} := \frac{\ell_\infty(I,X_i)}{N_{\mathfrak{U}}(X_i)}.$$

El elemento de $(X_i)_{\mathfrak{U}}$ que admite la familia $(x_i)_{i\in I}$ como representante se denota $[x_i]$. Luego $[x_i]=[y_i]$ si y solo si $\lim_{\mathfrak{U}} \|x_i - y_i\| = 0$. Por tanto,

$$\big\|[x_i]\big\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|x_i\|;$$

donde la existencia de límite es consecuencia del Lema 1.3.1.

Sean $(X_i)_{i\in I}$ e $(Y_i)_{i\in I}$ colecciones de espacios de Banach. Para cada $i \in I$, sea $T_i \in \mathcal{L}(X_i,Y_i)$ de modo que $\sup_{i\in I}\|T_i\| < \infty$.

El *ultraproducto de* $(T_i)_{i\in I}$ *según* $\mathfrak{U}$ es el operador $(T_i)_{\mathfrak{U}}$ de $(X_i)_{\mathfrak{U}}$ en $(Y_i)_{\mathfrak{U}}$ definido por

$$(T_i)_{\mathfrak{U}}([x_i]) := [T_i x_i].$$

En el caso $X_i = X$ para todo $i \in I$, el espacio $(X)_{\mathfrak{U}}$ se denomina *ultrapotencia de* X *según* $\mathfrak{U}$ y se denota $X_{\mathfrak{U}}$.

Analogamente, si $T_i = T$ para todo $i \in I$, el operador $(T)_{\mathfrak{U}}$ se denomina *ultrapotencia de* T *según* $\mathfrak{U}$ y se denota $T_{\mathfrak{U}}$.

Observación 1.3.1. *La ultrapotencia $X_{\mathfrak{U}}$ contiene isométricamente una copia de X generada por las familias constantes. Por lo tanto, si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, podemos considerar la ultrapotencia $T_{\mathfrak{U}} \in \mathcal{L}(X_{\mathfrak{U}},Y_{\mathfrak{U}})$ como una extensión del operador T.*

El siguiente resultado es consecuencia de la compacidad de la bola unidad en los espacios de dimensión finita.

Proposición 1.3.1. *Si X es un espacio de Banach, la ultrapotencia $X_{\mathfrak{U}}$ es de dimensión finita (si* $\dim X < \infty$*) ó no separable.*

Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos no vacíos de X. Denotaremos

$$(C_i)_{\mathfrak{U}} := \{[x_i] \in X_{\mathfrak{U}} \colon x_i \in C_i\}.$$

En el caso $C_i = X$ para todo $i \in I$, el conjunto $(C)_{\mathfrak{U}}$ se denota $C_{\mathfrak{U}}$.

Proposición 1.3.2. *Si C es un subconjunto no vacío de X, $C_{\mathfrak{U}}$ es un subconjunto cerrado de $X_{\mathfrak{U}}$ y $\overline{C} = C_{\mathfrak{U}} \cap X$.*

La demostración no es difícil.

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es una *ε-isometría* si

$$1 - \varepsilon \leq \|T(x)\| \leq 1 + \varepsilon \quad \text{para todo } x \in S_X.$$

Definición 1.3.3. *Sean X e Y espacios de Banach. Diremos que X es* finitamente representable en Y *si para cada $0 < \varepsilon < 1$ y cada subespacio de dimensión finita E de X existe una ε-isometría $L\colon E \longrightarrow Y$.*

El concepto de representabilidad finita permite investigar las propiedades locales (dependientes de los subespacios de dimensión finita) de los espacios de Banach y se puede estudiar mediante técnicas de ultraproducto.

Proposición 1.3.3. *Un espacio de Banach Y es finitamente representable en X si y sólo si existe un ultrafiltro $\mathfrak{U}$ tal que Y se puede identificar isométricamente con un subespacio de $X_{\mathfrak{U}}$.*

El siguiente resultado establece en particular que el bidual de un espacio de Banach X es finitamente representable en X.

Teorema 1.3.1 (Principio de reflexividad local). *Sea X un espacio de Banach y sean E y F subespacios de dimensión finita de X^{**} y X respectivamente. Entonces para cada $0 < \varepsilon < 1$ existe una ε-isometría $T\colon E \longrightarrow X$ verificando*

(i) *$T(x) = x$ para todo $x \in E \cap X$,*

(ii) *$\langle x^*, T(x^{**})\rangle = \langle x^{**}, x^*\rangle$ para todo $x^{**} \in E$ y todo $x^* \in F$.*

Podemos encontrar una demostración en [5, Theorem 11.2.4].

Incluimos a continuación algunas propiedades de las ultrapotencias de un operador probadas en [32] que se utilizarán más adelante.

Proposición 1.3.4. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se verifica:*

(i) *$T_{\mathfrak{U}}(B_{X_{\mathfrak{U}}}) = T(B_X)_{\mathfrak{U}}$ y es un subconjunto cerrado;*

(ii) *$N(T)_{\mathfrak{U}} \subset N(T_{\mathfrak{U}})$ y $R(T_{\mathfrak{U}}) \subset R(T)_{\mathfrak{U}}$.*

Proposición 1.3.5. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Son equivalentes:*

(a) *T tiene rango cerrado;*

(b) *$N(T)_{\mathfrak{U}} = N(T_{\mathfrak{U}})$;*

(c) *$R(T)_{\mathfrak{U}} = R(T_{\mathfrak{U}})$;*

(d) *$T_{\mathfrak{U}}$ tiene rango cerrado.*

Espacios reflexivos y superreflexivos

La superreflexividad es la propiedad local asociada a la reflexividad. Necesitaremos este concepto para estudiar los semigrupos definidos mediante ultrapotencias.

Definición 1.3.4. *Sea $0 < \varepsilon < 1$. Diremos que una sucesión finita o infinita (x_n) en un espacio de Banach X es* ε-triangular *si está contenida en la bola unidad B_X y existe una sucesión (x_n^*) en la esfera unidad S_{X^*} tal que*

- *$\langle x_i^*, x_j\rangle > \varepsilon$ para $1 \leq i \leq j$, y*
- *$\langle x_i^*, x_j\rangle = 0$ para $1 \leq j < i$.*

El siguiente resultado será útil varias veces en la exposición.

Lema 1.3.2. *Sea Z un subespacio cerrado de un espacio de Banach X. Para todo $z^{**} \in \overline{Z}^{\sigma(X^{**},X^*)}$,*

$$\operatorname{dist}(z^{**}, X) \geq \frac{1}{2} \operatorname{dist}(z^{**}, Z).$$

Demostración. Sea $\delta := \operatorname{dist}(z^{**}, Z)$. Si $\delta = 0$, el resultado es trivial. Por ello suponemos que $\delta > 0$. Sea $x \in X$.

Si $\operatorname{dist}(x, Z) < \delta/2$, elegimos $x_1 \in Z$ tal que $\|x - x_1\| < \delta/2$. Tenemos

$$\begin{aligned} \|z^{**} - x\| &= \|z^{**} - x_1 + x_1 - x\| \\ &\geq \|z^{**} - x_1\| - \|x_1 - x\| > \delta - \delta/2 = \delta/2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Si $\operatorname{dist}(x, Z) \geq \delta/2$, por el teorema de Hahn-Banach existe $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^* \in Z^\perp$ y $\langle x^*, x\rangle \geq \delta/2$. Como $\overline{Z}^{\sigma(X^{**},X^*)} = Z^{\perp\perp}$, obtenemos $\langle z^{**}, x^*\rangle = 0$; luego

$$\|z^{**} - x\| \geq \langle z^{**} - x, x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle \geq \delta/2. \tag{1.2}$$

Claramente (1.1) y (1.2) implican $\operatorname{dist}(z^{**}, X) \geq \delta/2$, como queríamos probar. □

Utilizando el resultado anterior, James probó la siguiente caracterización de los espacios reflexivos.

Proposición 1.3.6. *Un espacio de Banach X no es reflexivo si y solo si existe una sucesión ε-triangular $(x_i)_{k=1}^\infty$ en X para algún $0 < \varepsilon < 1$.*

Definición 1.3.5. *Un espacio de Banach X se dice* superreflexivo *si todo espacio de Banach finitamente representable en X es reflexivo.*

En [20] y [46] podemos encontrar las siguientes caracterizaciones de los espacios superreflexivos.

Proposición 1.3.7. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(a) *X no es superreflexivo;*

(b) *para todo $0 < \varepsilon < 1$ y todo $n \in \mathbb{N}$, existe una sucesión ε-triangular finita $(x_k)_{k=1}^n$ en X;*

(c) *existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una sucesión ε-triangular finita $(x_k)_{k=1}^n$ en X;*

(d) *existe un ultrafiltro no trivial $\mathfrak{U}$ en $\mathbb{N}$ tal que $X_{\mathfrak{U}}$ no es reflexivo;*

(e) *para todo ultrafiltro no trivial $\mathfrak{U}$, $X_{\mathfrak{U}}$ no es superreflexivo.*

Capítulo 2

Ideales de operadores

El estudio de los ideales de operadores comenzó con los trabajos de Grothendieck [45], fue formalizado en la monografía de Pietsch [70] y es actualmente una rama del análisis funcional bien desarrollada. Uno de sus objetivos es la clasificación de los espacios de Banach.

2.1. Definiciones

Recordemos que $\mathcal{L}$ representa la clase de todos los operadores entre espacios de Banach.

Definición 2.1.1. *Un* ideal de operadores *es una subclase $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ que verifica las siguientes condiciones:*

(i) *los operadores de rango finito pertenecen a $\mathcal{A}$;*

(ii) *para cada par X, Y de espacios de Banach, $\mathcal{A}(X,Y)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(X,Y)$;*

(iii) *si W, X, Y y Z son espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(W,X)$, $S \in \mathcal{A}(X,Y)$ y $R \in \mathcal{L}(Y,Z)$, se verifica $RST \in \mathcal{A}(W,Z)$.*

La clase $\mathcal{L}$ y la clase de los *operadores de rango finito* $\mathcal{F}$ son ideales de operadores: el máximo y el mínimo.

Sea $\mathcal{S}$ una clase de operadores. Denotamos

$$\mathcal{S}^d := \{T \in \mathcal{L} \,:\, T^* \in \mathcal{S}\}.$$

Ejercicio 2.1.1. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores. Probar que $\mathcal{A}^d$ es también un ideal de operadores.*
Se denomina ideal de operadores dual *de $\mathcal{A}$.*

Denotemos $\mathbb{B}$ a la clase de todos los espacios de Banach.

Definición 2.1.2. *Un* ideal de espacios *es una subclase $\mathbb{A}$ de $\mathbb{B}$ que verifica las siguientes condiciones:*

(i) *los espacios de Banach de dimensión finita pertenecen a $\mathbb{A}$;*

(ii) *X e Y pertenecen a $\mathbb{A}$ si y solo si $X \times Y$ pertenece a $\mathbb{A}$;*

(iii) *todo espacio isomorfo a un espacio de $\mathbb{A}$ pertenece también a $\mathbb{A}$.*

La clase $\mathbb{B}$ y la clase de todos los espacios de Banach de dimensión finita $\mathbb{F}$ son ideales de espacios: el máximo y el mínimo.

Sea $\mathbb{C}$ una clase de espacios de Banach. Denotamos

$$\mathbb{C}^d := \{X \in \mathbb{B} : X^* \in \mathbb{C}\}.$$

Ejercicio 2.1.2. *Sea $\mathbb{A}$ un ideal de espacios. Probar que $\mathbb{A}^d$ es también un ideal de espacios.*
Se denomina ideal de espacios dual *de $\mathbb{A}$.*

El siguiente resultado conecta los ideales de operadores con los ideales de espacios.

Proposición 2.1.1. *Sean $\mathcal{A}$ un ideal de operadores y $\mathbb{A}$ un ideal de espacios.*

(i) *La expresión*
$$Sp(\mathcal{A}) := \{X \in \mathbb{B} : I_X \in \mathcal{A}\}$$
define un ideal de espacios.

(ii) *La expresión*
$$Op(\mathbb{A}) := \{T \in \mathcal{L} : \ T \text{ factoriza a través de un espacio de } \mathbb{A}\}$$
define un ideal de operadores.

Ejercicio 2.1.3. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores. Se verifica $Sp(\mathcal{A}^d) = Sp(\mathcal{A})^d$.*

Veamos algunos tipos especiales de operadores que serán relevantes en la exposición. Recordemos que, dado un subespacio cerrado N de un espacio X, J_N denota el operador inclusión de N en X y Q_N el operador cociente de X sobre X/N.

Definición 2.1.3. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores.*

(i) *$\mathcal{A}$ se dice* cerrado *si las componentes $\mathcal{A}(X,Y)$ forman subconjuntos cerrados de $\mathcal{L}(X,Y)$;*

(ii) *$\mathcal{A}$ se dice* inyectivo *si dado un subespacio cerrado Y de Z y un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $J_Y T \in \mathcal{A}$ implica $T \in \mathcal{A}$.*

(iii) *$\mathcal{A}$ se dice* suprayectivo *si dado un subespacio cerrado Y de Z y un operador $T \in \mathcal{L}(Z/Y,X)$, $TQ_Y \in \mathcal{A}$ implica $T \in \mathcal{A}$.*

Los ideales de operadores inyectivos pueden describirse mediante familias de seminormas y los suprayectivos mediante familias de conjuntos acotados (véase [54] y [53]). Este hecho está descrito en la Sección 6.3 y queda reflejado en las siguientes caracterizaciones.

Lema 2.1.1. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores cerrado.*

(a) $\mathcal{A}$ es inyectivo si y solo si un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ está en $\mathcal{A}$ cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe un espacio de Banach Z_ε y un operador $S_\varepsilon \in \mathcal{A}(X, Z_\varepsilon)$ de modo que

$$\|Tx\| \leq \|S_\varepsilon x\| + \varepsilon\|x\|; \quad \text{para todo } x \in X.$$

(b) $\mathcal{A}$ es suprayectivo si y solo si un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ está en $\mathcal{A}$ cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe un espacio de Banach Z_ε y un operador $S_\varepsilon \in \mathcal{A}(Z_\varepsilon, Y)$ de modo que

$$T(B_X) \subset S_\varepsilon(B_{Z_\varepsilon}) + \varepsilon B_Y.$$

Demostración. Véase [53, Theorem 20.7.3] para la parte (a) y [55, Proposition 2.9] para la parte (b). □

Ejercicio 2.1.4. *Sean $\mathcal{A}$ un ideal de operadores. Comprobar que se verifican las siguientes relaciones:*

(i) $\mathcal{A}^d$ *inyectivo implica* $\mathcal{A}$ *suprayectivo;*

(ii) $\mathcal{A}^d$ *suprayectivo implica* $\mathcal{A}$ *inyectivo;*

(ii) $\mathcal{A}^d$ *cerrado implica* $\mathcal{A}$ *cerrado.*

Las implicaciones inversas de (i) y (ii) no son válidas.

El siguiente resultado permite comprobar que algunos ideales de operadores no son inyectivos o suprayectivos.

Ejercicio 2.1.5. *Sean $\mathcal{A}$ un ideal de operadores. Se verifica:*

(i) *si $\mathcal{A}$ es inyectivo y Z es isomorfo a un subespacio de un espacio $X \in Sp(\mathcal{A})$, se verifica $Z \in Sp(\mathcal{A})$;*

(ii) *si $\mathcal{A}$ es suprayectivo y Z es isomorfo a un cociente de un espacio $X \in Sp(\mathcal{A})$, se verifica $Z \in Sp(\mathcal{A})$.*

2.2. Ejemplos de ideales de operadores

Veamos algunos ejemplos concretos de ideales de operadores.

Definición 2.2.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

(i) Decimos que T es compacto, *y denotamos $T \in \mathcal{K}$, si para cada subconjunto acotado A de X, la clausura de $T(A)$ es un subconjunto compacto de Y.*

(ii) Decimos que T es débilmente compacto, *y denotamos $T \in \mathcal{W}$, si para cada subconjunto acotado A de X, la clausura débil de $T(A)$ es un subconjunto débilmente compacto de Y.*

Ejercicio 2.2.1. *Probar que un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es compacto si y solo si $\overline{T(B_X)}$ es un conjunto compacto; y que T es débilmente compacto si y solo si $\overline{T(B_X)}$ es un conjunto débilmente compacto.*

Las clase de los operadores compactos $\mathcal{K}$ y la de los débilmente compactos $\mathcal{W}$ admiten caracterización sucesional.

Proposición 2.2.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

(a) T es compacto si y solo si para cada sucesión acotada (x_n) en X, (Tx_n) tiene una subsucesión convergente;

(b) T es débilmente compacto si y solo si para cada sucesión acotada (x_n) en X, (Tx_n) tiene una subsucesión débilmente convergente.

Los siguientes resultados clásicos muestran que $\mathcal{K} = \mathcal{K}^d$ y $\mathcal{W} = \mathcal{W}^d$.

Teorema 2.2.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

(a) T es compacto si y solo si lo es su conjugado T^* (Teorema de Schauder [5, A.4])*.*

(b) T es débilmente compacto si y solo si lo es T^* (Teorema de Gantmacher [5, A.4])*.*

Ejercicio 2.2.2. *Probar que $\mathcal{K}$ y $\mathcal{W}$ son ideales de operadores inyectivos, suprayectivos y cerrados.*

Recordemos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio de Banach X es w.u.C. si $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n\rangle| < \infty$ para todo $x^* \in X^*$.

Definición 2.2.2. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

(i) Decimos que T es débilmente precompacto, o de Rosenthal*, y denotamos $T \in \mathcal{R}$, si para cada sucesión acotada (x_n) en X, (Tx_n) tiene una subsucesión débilmente de Cauchy.*

(ii) Decimos que T es completamente continuo*, y denotamos $T \in \mathcal{C}$, si para cada sucesión débilmente de Cauchy (x_n) en X, (Tx_n) es convergente.*

(iii) Decimos que T es débilmente completamente continuo*, y denotamos $T \in \mathcal{WC}$, si para cada sucesión débilmente de Cauchy (x_n) en X, (Tx_n) es débilmente convergente.*

(iv) Decimos que T es incondicionalmente convergente*, y denotamos $T \in \mathcal{U}$, si para cada serie w.u.C. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en X, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$ es incondicionalmente convergente.*

No es difícil comprobar que un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es completamente continuo si y solo si aplica sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes.

Ejercicio 2.2.3. *Las clases $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{WC}$ y $\mathcal{U}$ son ideales de operadores inyectivos y cerrados.*

La prueba de que los ideales de operadores anteriores son cerrados puede ser más delicada: véase [70].

Observación 2.2.1. *Los ideales de espacios $Sp(\mathcal{K})$, $Sp(\mathcal{W})$, $Sp(\mathcal{R})$, $Sp(\mathcal{C})$, $Sp(\mathcal{WC})$ y $Sp(\mathcal{U})$ son los espacios de dimensión finita, los espacios reflexivos, los espacios que no contienen subespacios isomorfos a ℓ_1, los espacios con la propiedad de Schur, los espacios débilmente sucesionalmente completos y los espacios que no contienen subespacios isomorfos a c_0, respectivamente.*

Dos de los ideales de operadores introducidos en la Definición 2.2.2 pueden caracterizarse mediante las propiedades de las restricciones de los operadores.

Proposición 2.2.2. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se verifica:*

(i) *$T \in \mathcal{R}$ si y solo si no existe ningún subespacio M de X isomorfo a ℓ_1 tal que la restricción $T|_M$ es un isomorfismo;*

(ii) *$T \in \mathcal{U}$ si y solo si no existe ningún subespacio M de X isomorfo a c_0 tal que la restricción $T|_M$ es un isomorfismo.*

Demostración. (i) Supongamos $T \in \mathcal{R}$. Como la base (e_n) de ℓ_1 no tiene subsucesiones débilmente de Cauchy, si M es un subespacio de X isomorfo a ℓ_1, la restricción $T|_M$ no puede ser un isomorfismo.

Recíprocamente, supongamos $T \notin \mathcal{R}$. Entonces existe una sucesión acotada (x_n) en X tal que (Tx_n) no tiene subsucesiones débilmente de Cauchy. Por el teorema de Rosenthal (Teorema 1.2.2), pasando a una subsucesión podemos suponer que tanto (x_n) como (Tx_n) son equivalentes a la base (e_n) de ℓ_1. Entonces

$$M := \overline{\mathrm{span}}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$$

es isomorfo a ℓ_1 y $T|_M$ es un isomorfismo.

(ii) Supongamos $T \in \mathcal{U}$. Como la base (e_n) de c_0 forma una serie $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ que es w.u.C. pero no incondicionalmente convergente, si M es un subespacio de X isomorfo a c_0, la restricción $T|_M$ no puede ser un isomorfismo.

Recíprocamente, supongamos $T \notin \mathcal{U}$. Entonces existe una serie w.u.C. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en X tal que $\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$ no es incondicionalmente convergente.
Reordenando la serie, podemos suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$ no es convergente. Por tanto podemos elegir enteros $1 \leq k_1 \leq m_1 < k_2 \leq m_2 < \cdots$ en $\mathbb{N}$ de modo que los vectores

$$y_n := x_{k_n} + x_{k_n+1} + \cdots + x_{m_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

verifican $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|Ty_n\| > 0$.

Nótese que las series $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} Ty_n$ son w.u.C. En particular, (y_n) y (Ty_n) convergen débilmente a 0.
Por el Corolario 1.2.1, pasando a una subsucesión podemos suponer que (y_n) y (Ty_n) son sucesiones básicas. Luego, por la Proposición 1.2.2, ambas sucesiones son equivalentes a la base (e_n) de c_0. Entonces

$$M := \overline{\operatorname{span}}\{x_n \colon\ n \in \mathbb{N}\}$$

es isomorfo a c_0 y $T|_M$ es un isomorfismo. $\square$

2.3. El operador residuo

Sea X un espacio de Banach. Denotaremos por X^{co} el espacio cociente X^{**}/X y por $Q_X \colon X^{**} \longrightarrow X^{co}$ al operador cociente.

Definición 2.3.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ un operador. Definimos el* operador residuo *T^{co} de T mediante*

$$T^{co}(z + X) := T^{**}(z) + Y, \quad z + X \in X^{co}.$$

Claramente, la aplicación $T^{co} \colon X^{co} \longrightarrow Y^{co}$ queda determinada por la igualdad $T^{co}Q_X = Q_Y T^{**}$.

Los siguientes dos resultados son consecuencia inmediata de la definición de operador residuo.

Proposición 2.3.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se verifica:*

(i) *$T^{co} \in \mathcal{L}(X^{co}, Y^{co})$ y $\|T^{co}\| \leq \|T\|$;*

(ii) *T es débilmente compacto si y solo si $T^{co} = 0$.*

Proposición 2.3.2. *La aplicación $T \in \mathcal{L}(X,Y) \longrightarrow T^{co} \in \mathcal{L}(X^{co}, Y^{co})$ es lineal.*

Además, si $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $(ST)^{co} = S^{co}T^{co}$.

Veamos el comportamiento de la transformación $(\cdot)^{co}$ respecto de la dualidad.

Proposición 2.3.3. *Podemos identificar $(X^*)^{co}$ y $(X^{co})^*$.*

Más concretamente, el operador

$$Q_{X^*} \circ Q_X{}^* \colon (X^{co})^* \longrightarrow (X^*)^{co}$$

es un isomorfismo biyectivo.

Demostración. Nótese que that $Q_X{}^* \colon (X^{co})^* \longrightarrow X^{***}$ es un operador isométrico que aplica $(X^{co})^*$ sobre el subespacio $X^\perp$ de X^{***}. Como el tercer dual admite la descomposición

$$X^{***} = X^* \oplus X^\perp,$$

el operador $Q_{X^*} \colon X^{***} \longrightarrow (X^*)^{co}$ define un isomorfismo de $X^\perp$ sobre $(X^*)^{co}$; luego $Q_{X^*} \circ Q_X{}^*$ es un isomorfismo biyectivo. $\square$

Denotaremos $U_X := Q_{X^*} \circ Q_X{}^*$ al isomorfismo biyectivo del resultado anterior.

Proposición 2.3.4. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Podemos identificar los operadores $(T^{co})^*$ y $(T^*)^{co}$. Más concretamente,*

$$(T^*)^{co} = U_X\, (T^{co})^*\, U_Y^{-1}.$$

Demostración. Tenemos que probar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(Y^{co})^* \arrow[r, "(T^{co})^*"] \arrow[d, "U_Y"'] & (X^{co})^* \arrow[d, "U_X"] \\
(Y^*)^{co} \arrow[r, "(T^*)^{co}"'] & (X^*)^{co}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

En efecto, de la igualdad $T^{co}Q_X = Q_Y T^{**}$, obtenemos

$$\begin{aligned}(T^*)^{co}U_Y &= (T^*)^{co}Q_{Y^*}{Q_Y}^* \\ &= Q_{X^*}T^{***}{Q_Y}^* \\ &= Q_{X^*}\big(Q_Y T^{**}\big)^* \\ &= Q_{X^*}\big(T^{co}Q_X\big)^* \\ &= Q_{X^*}{Q_X}^*(T^{co})^* = U_X(T^{co})^*,\end{aligned}$$

como queríamos probar. □

El siguiente resultado nos permitirá estudiar el comportamiento de la transformación $(\cdot)^{co}$ ante el paso a subespacios o cocientes.

Proposición 2.3.5. *Sea Z un subespacio cerrado de un espacio de Banach X. Podemos identificar Z^{co} con un subespacio cerrado de X^{co} y $(X/Z)^{co}$ con un cociente de X^{co}.*

Más concretamente, el operador $J_Z^{co}\colon Z^{co} \longrightarrow X^{co}$ es un isomorfismo y $Q_Z^{co}\colon X^{co} \longrightarrow Z^{co}$ es suprayectivo.

Demostración. Como Q_Z es suprayectiva, Q_Z^{**} y Q_Z^{co} también lo son. Además, por el Lema 1.3.2, si $z^{**} \in Z^{\perp\perp}$,

$$\operatorname{dist}(z^{**}, Z) \leq 2 \operatorname{dist}(z^{**}, X); \tag{2.1}$$

lo que prueba que $J_Z^{co}\colon Z^{co} \longrightarrow X^{co}$ tiene inverso continuo; es decir, es un isomorfismo. □

Recordemos que en una *sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

cada flecha representa un operador y el núcleo de cada una de ellas coincide con el rango de la anterior.

Como consecuencia de la Proposición 2.3.5, el siguiente diagrama es conmutativo y todas sus filas y columnas son sucesiones exactas.

$$
\begin{tikzcd}
& \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
\{0\} \arrow[r] & Z \arrow[r, "J_Z"'] \arrow[d] & X \arrow[r, "Q_Z"'] \arrow[d] & X/Z \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & Z^{**} \arrow[r, "J_Z^{**}"'] \arrow[d] & X^{**} \arrow[r, "Q_Z^{**}"'] \arrow[d] & (X/Z)^{**} \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & Z^{co} \arrow[r, "J_Z^{co}"'] \arrow[d] & X^{co} \arrow[r, "Q_Z^{co}"'] \arrow[d] & (X/Z)^{co} \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
& \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}
\tag{2.2}
$$

Este diagrama encierra información que permite describir los espacios Z^{co}, X^{co} y $(X/Z)^{co}$. Puede encontrarse en [77].

Corolario 2.3.1. *Si Z es un subespacio cerrado de un espacio de Banach X, $Z^{\perp\perp} + X$ es un subespacio cerrado de X^{**}.*

Demostración. Por la Proposición 2.3.5, $R(J_Z^{co}) = (Z^{\perp\perp} + X)/X$ es un subespacio cerrado de X^{co}; luego $Z^{\perp\perp} + X$ es cerrado en X^{**}. $\square$

Proposición 2.3.6. *Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es un operador con rango cerrado, el rango de T^{co} también es cerrado.*

Demostración. Si $R(T)$ es cerrado, $R(T^{**}) = R(T)^{\perp\perp}$; luego obtenemos que

$$R(T^{co}) = \frac{R(T^{**}) + Y}{Y} = \frac{R(T)^{\perp\perp} + Y}{Y}$$

es cerrado, aplicando el Corolario 2.3.1. $\square$

Observación 2.3.1. *La descripción de los operadores $S \in \mathcal{L}(X^{co}, Y^{co})$ de la forma T^{co} para algún operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ fue analizada en [42]. Entre otros resultados, se probó que existe un espacio de Banach X con X^{co} linealmente isométrico a ℓ_2, de modo que $\{T^{co} : T \in \mathcal{L}(X)\}$ se identifica con el conjunto de los operadores regulares (respecto de la estructura de retículo de ℓ_2) en $\mathcal{L}(\ell_2)$.*

2.4. Procedimientos para construir ideales

En el libro de Pietsch [70] podemos encontrar varios procedimientos para construir nuevos ideales de operadores o de espacios a partir de uno dado. Hasta ahora hemos visto uno de ellos, el paso al ideal dual.

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^d \quad \text{y} \quad \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^d.$$

En esta sección veremos otros dos, relacionados con el operador residuo y con las ultrapotencias de operadores.

Sea $\mathcal{S}$ una clase de operadores. Denotamos

$$\mathcal{S}^{co} := \{T \in \mathcal{L} : \ T^{co} \in \mathcal{S}\ \} \quad y$$

$$\mathcal{S}^{up} := \{T \in \mathcal{L} : \ T_{\mathfrak{U}} \in \mathcal{S} \ \text{ para todo ultrafiltro no trivial } \mathfrak{U}\ \}.$$

Similarmente, si $\mathbb{C}$ es una clase de espacios de Banach, denotamos

$$\mathbb{C}^{co} := \{X \in \mathbb{B} : \ X^{co} \in \mathbb{C}\ \} \quad y$$

$$\mathbb{C}^{up} := \{X \in \mathbb{B} : \ X_{\mathfrak{U}} \in \mathbb{C} \ \text{ para todo ultrafiltro no trivial } \mathfrak{U}\ \}.$$

El siguiente resultado se obtiene como consecuencia de las propiedades básicas del operador residuo y de las ultrapotencias.

Proposición 2.4.1. *Si $\mathcal{A}$ es un ideal de operadores, las clases $\mathcal{A}^{co}$ y $\mathcal{A}^{up}$ también son ideales de operadores.*

Si $\mathbb{A}$ es un ideal de espacios, las clases $\mathbb{A}^{co}$ y $\mathbb{A}^{up}$ también son ideales de espacios.

Los procedimientos $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^{up}$ y $\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^{up}$ fueron investigados por Heinrich en su tesis [48].

En el caso del ideal $\mathcal{W}$ de los operadores débilmente compactos, $\mathcal{W}^{up}$ coincide con la clase de los operadores uniformemente convexificantes, estudiada en [10].

En el caso del ideal $\mathbb{R}$ de los espacios reflexivos, $\mathbb{R}^{up}$ es la clase de los espacios superreflexivos (véase la Sección 1.3).

Se puede encontrar información adicional sobre procedimientos y sus propiedades en el Capítulo 7 de [70].

Capítulo 3

Operadores semi-Fredholm

La teoría de Fredholm tuvo su origen en el estudio de la solución de las ecuaciones integrales desde un punto de vista abstracto. Ha sido aplicada en teoría de espacios de Banach y ha sido una de las fuentes de inspiración para el estudio de los semigrupos de operadores.

A continuación describiremos someramente algunos aspectos de la teoría de Fredholm. En la monografía [1] podemos encontrar una exposición detallada.

3.1. Semigrupos en teoría de Fredholm

En esta sección introduciremos varias clases de operadores. Más tarde veremos que algunas de ellas son ejemplos de semigrupos de operadores.

Definición 3.1.1. *Let $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

(i) *T se dice* upper semi-Fredholm *si tiene rango cerrado y núcleo de dimensión finita.*

(ii) *T se dice* lower semi-Fredholm *si tiene rango de codimensión finita (luego cerrado).*

Denotamos por Φ_+ y Φ_- las clases de los operadores upper y lower semi-Fredholm, respectivamente.

Además, $\Phi_\pm := \Phi_+ \cup \Phi_-$ es la clase de los *operadores semi-Fredholm.*

Definición 3.1.2. *El* índice de un operador $T \in \Phi_{\pm}(X,Y)$ *se define mediante*

$$\operatorname{ind}(T) := \dim N(T) - \dim Y/R(T).$$

Nótese que $\operatorname{ind}(T) \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$.

Por otro lado, la clase Φ de los *operadores de Fredholm* se define mediante $\Phi := \Phi_+ \cap \Phi_-$.

Nótese que $T \in \Phi$ si y solo si $T \in \Phi_{\pm}$ con $\operatorname{ind}(T)$ finito.

Recordemos que un operador $K\colon X \longrightarrow Y$ es compacto si y solo si para cada sucesión acotada (x_n) en X, (Tx_n) tiene una subsucesión convergente. Los operadores upper semi-Fredholm admiten una caracterización similar.

Proposición 3.1.1. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es upper semi-Fredholm si y solo si una sucesión acotada (x_n) en X tiene una subsucesión convergente cuando (Tx_n) es convergente.*

Demostración. Supongamos que $T \in \Phi_+$. Sea (x_n) una sucesión acotada en X para la que (Tx_n) es convergente.

Como $N(T)$ tiene dimensión finita, existe un subespacio cerrado M de X de modo que $X = N(T) \oplus M$. Luego podemos escribir $x_n = y_n + z_n$ con (y_n) y (z_n) sucesiones acotadas en $N(T)$ y M, respectivamente.

Nótese que la restricción $T|_M$ es un isomorfismo; luego la sucesión (z_n) es convergente. Además, como (y_n) es acotada en un espacio de dimensión finita, tiene una subsucesión convergente. Por tanto, (x_n) tiene una subsucesión convergente.

Recíprocamente, supongamos que $T \notin \Phi_+$. Si $N(T)$ tiene dimensión infinita, basta encontrar una sucesión acotada sin subsucesiones convergentes (x_n) en $N(T)$. Si $N(T)$ tiene dimensión finita, existe un subespacio cerrado M de modo que $X = N(T) \oplus M$. Ahora la restricción $T|_M$ es inyectiva pero no tiene inverso continuo. Luego podemos encontrar una sucesión de vectores de norma uno (z_n) en M de modo que $\lim_n \|Tz_n\| = 0$. La sucesión (z_n) no puede tener subsucesiones convergentes: si z fuese límite de una subsucesión de (z_n), tendríamos $z \in M \cap N(T)$ y $\|z\| = 1$, que es imposible. $\square$

Veamos que la clase $\Phi_{\pm}$ es estable ante dualidad.

Proposición 3.1.2. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es semi-Fredholm si y solo si lo es T^*. En ese caso,*

$$\operatorname{ind}(T^*) = -\operatorname{ind}(T).$$

En particular, $T \in \Phi_+$ si y solo si $T^* \in \Phi_-$, y $T \in \Phi_-$ si y solo si $T^* \in \Phi_+$

Demostración. Como $R(T)$ es cerrado si y solo si lo es $R(T^*)$, y en ese caso de verifica

$$\dim Y/R(T) = \dim(Y/R(T))^* = \dim R(T)^\perp = \dim N(T^*) \qquad \text{y}$$

$$\dim N(T) = \dim N(T)^* = \dim X^*/N(T)^\perp = \dim X^*/R(T^*),$$

basta recordar las definiciones de Φ_+ y Φ_-. □

El resultado anterior permitirá deducir por dualidad las propiedades de Φ_+ a partir de las de Φ_-, y viceversa.

Veamos algunas propiedades algebraicas de las clases de operadores semi-Fredholm.

Proposición 3.1.3. *Sean $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se verifica:*

(i) *si $S,T \in \Phi_+$, $ST \in \Phi_+$ con* $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T)$*;*

(ii) *si $ST \in \Phi_+$, $T \in \Phi_+$;*

(iii) *si $S,T \in \Phi_-$, $ST \in \Phi_-$ con* $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T)$*;*

(iv) *si $ST \in \Phi_-$, $S \in \Phi_-$.*

La clase de los operadores semi-Fredholm es estable ante perturbación por operadores de norma "pequeña":

Proposición 3.1.4. *El subconjunto $\Phi_\pm(X,Y)$ de los operadores semi-Fredholm es abierto en $\mathcal{L}(X,Y)$. Además, el índice es constante en las componentes conexas de $\Phi_\pm(X,Y)$.*

Veamos que la clase $\Phi_\pm$ es también estable ante perturbación por operadores compactos:

Proposición 3.1.5. *Si* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *es un operador semi-Fredholm y* $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ *es un operador compacto,* $T+K$ *es también semi-Fredholm con* $\mathrm{ind}(T+K) = \mathrm{ind}(T)$*.*

Demostración. Supongamos primero que $T \in \Phi_+$. De las caracterizaciones sucesionales de Φ_+ y $\mathcal{K}$ (Proposiciones 2.2.1 y 3.1.1) se sigue que $T+K \in \Phi_+$; y teniendo en cuenta la Proposición 3.1.4, la igualdad del índice es consecuencia de que

$$T + tK \in \Phi_+ \quad \text{para todo } t \in [0,1].$$

El caso $T \in \Phi_-$ se sigue del primero, por dualidad. □

3.2. Caracterizaciones perturbativas

Recordemos que un operador $K\colon X \longrightarrow Y$ se dice *nuclear* si podemos encontrar una sucesión (x_n^*) en X^* y otra (y_n) en Y de tal modo que $\sum_{n=1}^\infty \|x_n^*\| \cdot \|y_n\| < \infty$ y

$$K(x) = \sum_{n=1}^\infty \langle x_n^*, x\rangle y_n \quad \text{para todo } x \in X.$$

Obviamente, $\|K\| \leq \sum_{n=1}^\infty \|x_n^*\| \cdot \|y_n\|$ y el operador K es compacto por ser límite de una sucesión de operadores de rango finito.

Seguidamente presentaremos caracterizaciones perturbativas de los operadores semi-Fredholm en las que formalmente apareceran operadores compactos, aunque en la demostración se verá que basta considerar operadores nucleares.

Las caracterizaciones perturbativas de los operadores semi-Fredholm tienen gran importancia en las aplicaciones y han inspirado la búsqueda de resultados similares para otras clases de operadores, como los que veremos más adelante.

Teorema 3.2.1. *Sea* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$*. Se verifica:*

(i) $T \in \Phi_+$ *si y solo si* $N(T+K)$ *tiene dimensión finita para todo operador compacto* $K \in \mathcal{L}(X,Y)$*;*

(ii) $T \in \Phi_-$ *si y solo si* $Y/\overline{R(T+K)}$ *tiene dimensión finita para todo operador compacto* $K \in \mathcal{L}(X,Y)$*.*

Demostración. Las implicaciones directas en ambas partes son consecuencia inmediata de la Proposición 3.1.5. Veamos las implicaciones inversas:

(i) Supondremos que $T \notin \Phi_+$ y construiremos un operador nuclear $K\colon X \longrightarrow Y$ de modo que $N(T+K)$ tenga dimensión infinita.

Si $\dim N(T) = \infty$, basta tomar $K = 0$. Por ello, supondremos que $\dim N(T) < \infty$; luego podemos encontrar un subespacio cerrado X_1 de X de modo que $X = N(T) \oplus X_1$ y la restricción $T|_{X_1}$ es un operador inyectivo con inverso no continuo.

Obtendremos mediante un argumento inductivo sucesiones (x_n) en X_1 y (x_n^*) en X^* de modo que

$$\langle x_i^*, x_j\rangle = \delta_{ij} \quad \text{para todo } i,j \in \mathbb{N} \quad \text{y} \tag{3.1}$$

$$\|T(x_n)\| \cdot \|x_n^*\| \leq 2^{-n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Como $T|_{X_1}$ no tiene inverso continuo, existe x_1 en la esfera S_{X_1} tal que $\|T(x_1)\| \leq 2^{-1}$. Además, por el teorema de Hahn-Banach, existe x_1^* en la esfera S_{X^*} tal que $\langle x_1^*, x_1\rangle = 1$.

Supongamos que ya hemos encontrado $x_1, \dots, x_n$ en X_1 y $x_1^*, \dots, x_n^*$ en X^* verificando las condiciones (3.1) y (3.2).

Definimos $P_n\colon X_1 \longrightarrow X_1$ mediante

$$P_n(x) := x - \sum_{j=1}^{i} \langle x_j^*, x\rangle x_j.$$

Claramente P_n es una proyección acotada y $N(P_n) = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Además, como $R(P_n)$ tiene codimensión finita en el espacio X_1, la restricción $T|_{R(P_n)}$ no tiene inverso continuo. Luego podemos encontrar un vector x_{n+1} en $R(P_n)$ verificando $\|x_{n+1}\| = 1$ y

$$\|T(x_{n+1})\| \leq 2^{-n-1}\|P_n\|^{-1}.$$

Entonces elegimos f en la esfera de X^* tal que $\langle f, x_{n+1}\rangle = 1$ y definimos $x_{n+1}^* := f \circ P_n$. Es fácil comprobar que $x_1, \dots, x_{n+1}$ y $x_1^*, \dots, x_{n+1}^*$ en X^* verifican las condiciones (3.1) y (3.2).

Claramente la expresión

$$K(x) := -\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n^*, x\rangle T(x_n)$$

define un operador nuclear $K\colon X \longrightarrow Y$; y como $T(x_n) = -K(x_n)$ para todo n, $N(T+K)$ tiene dimensión infinita.

(ii) Supondremos que $T \notin \Phi_-$ y construiremos un operador nuclear $K\colon X \longrightarrow Y$ de modo que $N(T^* + K^*)$ tenga dimensión infinita; luego $\dim Y/\overline{R(T+K)} = \infty$.

Si $R(T)$ es cerrado, $\dim Y/\overline{R(T)} = \infty$; luego basta tomar $K = 0$.

Supongamos que $R(T)$ no es cerrado. Sea (a_n) una sucesión de enteros definida por $a_1 := 2$ y

$$a_{n+1} := 2\left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k\right); \quad n \in \mathbb{N}.$$

Encontraremos inductivamente sucesiones (y_k) en Y e (y_k^*) en Y^* de modo que, para todo $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &\langle y_i^*, y_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \|y_i\| \le a_i, \quad \|y_i^*\| = 1, \\ &\text{y} \quad \|T^*(y_i^*)\| \le \frac{1}{2^i a_i}. \end{aligned}$$

Como $R(T)$ no es cerrado, tampoco lo es $R(T^*)$; luego podemos encontrar $y_1^* \in Y^*$ verificando $\|y_1^*\| = 1$ y $\|T^*(y_1^*)\| < 1/4$. Seleccionamos $y_1 \in Y$ tal que $\|y_1\| < 2$ y $\langle y_1^*, y_1\rangle = 1$.

Supongamos que $n > 1$ y que ya hemos encontrado los vectores y_k e y_k^* para $k < n$. Como la restricción de T^* al subespacio $\{y_1, \ldots, y_{n-1}\}^\perp$ tiene rango no cerrado, podemos encontrar $y_n^* \in Y^*$ de modo que

$$\begin{aligned} &\langle y_n^*, y_k\rangle = 0 \quad \text{para } k < n, \quad \|y_n^*\| = 1, \\ &\text{y} \quad \|T^*(y_n^*)\| \le \frac{1}{2^n a_n}. \end{aligned}$$

Seleccionamos $y \in Y$ con $\|y\| < 2$ tal que $\langle y_n^*, y\rangle = 1$, y definimos

$$y_n := y - \sum_{k=1}^{n-1} \langle y_k^*, y\rangle y_k.$$

Claramente

$$\|y_n\| \le \|y\| \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \|y_k\|\right) \le 2\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) = a_n,$$

con lo que el proceso anterior nos proporciona las sucesiones (y_k) e (y_k^*) que necesitamos.

El resto de la demostración es similar a lo que hicimos al probar la parte (i). Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T^*(y_n^*)\| \cdot \|y_n\| < \infty,$$

la expresión

$$K(x) := -\sum_{n=1}^{\infty} \langle T^*(y_n^*), x\rangle y_n$$

define un operador nuclear $K\colon X \longrightarrow Y$, cuyo operador conjugado actúa como sigue:

$$K^*(y^*) := -\sum_{n=1}^{\infty} \langle y^*, y_n\rangle T^*(y_n^*).$$

Como $T^*(y_n^*) = -K^*(y_n^*)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $N(T^* + K^*)$ tiene dimensión infinita; luego su predual $Y/\overline{R(T+K)}$ también tiene dimensión infinita. $\square$

3.3. Ideales en teoría de Fredholm

A continuación introduciremos varias clases de operadores más amplias que la de los operadores compactos, que permitirán obtener resultados de perturbación para las clases Φ, Φ_+ y Φ_-.

Definición 3.3.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

(i) Decimos que T es estrictamente singular*, y denotamos $T \in \mathcal{SS}$, si no existe ningún subespacio cerrado M de X de dimensión infinita tal que TJ_M es un isomorfismo.*

(ii) Decimos que T es estrictamente cosingular*, y denotamos $T \in \mathcal{SC}$, si no existe ningún subespacio cerrado N de Y de codimensión infinita tal que $Q_N T$ es suprayectivo.*

Ejercicio 3.3.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Probar las siguiente implicaciones:*

(i) $T \in \mathcal{K} \Longrightarrow T \in \mathcal{SS} \cap \mathcal{SC}$;

(ii) $T^* \in \mathcal{SS} \Longrightarrow T \in \mathcal{SC}$;

(iii) $T^* \in \mathcal{SC} \Longrightarrow T \in \mathcal{SS}$.

Veremos en el Ejemplo 3.3.1 que ninguna de las implicaciones inversas del ejercicio anterior es válida.

El siguiente resultado proporciona caracterizaciones operativas de las classes $\mathcal{SS}$ y $\mathcal{SC}$. La prueba es una aplicación de las caracterizaciones perturbativas (Teorema 3.2.1) de Φ_+ y Φ_-.

Teorema 3.3.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

(a) $T \in \mathcal{SS}$ si y sólo si cada subespacio cerrado de dimensión infinita M de X contiene otro subespacio cerrado de dimensión infinita N de modo que TJ_N es compacto.

(b) $T \in \mathcal{SC}$ si y sólo si cada subespacio cerrado de codimensión infinita A de Y está contenido en otro subespacio cerrado de codimensión infinita B de modo que $Q_B T$ es compacto.

Demostración. (a) Supongamos que $T \in \mathcal{SS}$ y sea M un subespacio cerrado de dimensión infinita de X. Entonces $T|_M \notin \Phi_+$; luego, por el Teorema 3.2.1, existe un operador compacto $K \in \mathcal{L}(M,Y)$ de modo que $N(TJ_M + K)$ tiene dimensión infinita.

Sea $N := N(TJ_M + K)$. Como $T|_N = -K|_N$, TJ_N es compacto.

Si $T \notin \mathcal{SS}$, existe un subespacio cerrado de dimensión infinita M de X tal que $T|_M$ es un isomorfismo, y claramente T no es compacto restringido a ningún subespacio cerrado de M de dimensión infinita.

(b) Supongamos $T \in \mathcal{SC}$ y A es un subespacio cerrado de codimensión infinita de Y. Entonces $Q_A T \notin \Phi_-$; luego, por el Teorema 3.2.1, existe un operador compacto $K \in \mathcal{L}(X, Y/A)$ de modo que $\overline{R(Q_A T + K)}$ tiene codimensión infinita en X/A.

Tomemos $B := Q_A^{-1}(\overline{R(Q_A T + K)})$, que es un subespacio cerrado de codimensión finita en Y. Como $Q_B T = -Q_{\overline{R(Q_A T+K)}}$, el operador $Q_B T$ es compacto.

Si $T \notin \mathcal{SC}$, existe un subespacio cerrado de codimensión infinita A de Y tal que $Q_A T$ es suprayectivo, con lo que $Q_B T$ no es compacto para ningún subespacio cerrado de codimensión infinita que contenga a A; de hecho, un tal $Q_B T$ es suprayectivo. $\square$

Ejercicio 3.3.2. *Aplicando el Teorema 3.3.1, probar los siguientes resultados:*

(i) $\mathcal{SS}$ *es un ideal de operadores inyectivo y cerrado.*

(ii) $\mathcal{SC}$ *es un ideal de operadores suprayectivo y cerrado.*

(iii) $Sp(\mathcal{SS}) = Sp(\mathcal{SC}) = \mathbb{F}$.

Para facilitar la exposición de los siguientes resultados, introducimos el siguiente concepto:

Definición 3.3.2. *Sea* $\mathcal{C}$ *una clase de operadores. Si* X *e* Y *son espacios de Banach para lo que* $\mathcal{C}(X,Y) \neq \emptyset$*, podemos definir*

$$P\mathcal{C}(X,Y) := \{K \in \mathcal{L}(X,Y)\colon T+K \in \mathcal{C}(X,Y) \textit{ para todo } T \in \mathcal{C}(X,Y)\}.$$

La clase $P\mathcal{C}$ *se denomina clase de perturbación de* $\mathcal{C}$*.*

El siguiente resultado nos dice que las componentes de $\mathcal{SS}$ y $\mathcal{SC}$ están contenidos respectivamente en las de $P\Phi_+$ y $P\Phi_-$ cuando las últimas están definidas.

Proposición 3.3.1. *Sean* $T, K \in \mathcal{L}(X,Y)$*. Se verifica:*

(i) si $T \in \Phi_+$ *y* $K \in \mathcal{SS}$*,* $T+K \in \Phi_+$*.*

(ii) si $T \in \Phi_-$ *y* $K \in \mathcal{SC}$*,* $T+K \in \Phi_-$*.*

Además, en ambos casos $\mathrm{ind}(T+K) = \mathrm{ind}(T)$*.*

Demostración. (i) Si fuese $T \in \Phi_+$, pero $T+K \notin \Phi_+$, existiría un subespacio cerrado de dimensión infinita M de modo que $(T+K)|_M \in \mathcal{K}$; luego $K|_M \in \Phi_+$, con lo que $K \notin \mathcal{SS}$.

(ii) Similar a la prueba de (i), sustituyendo restricciones por aplicaciones cocientes.

La prueba de la igualdad de los índices se hace como en la Proposición 3.1.5. □

La siguiente clase de operadores fue introducida en el estudio de las perturbaciones de operadores de Fredholm.

Definición 3.3.3. *Decimos que un operador* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *es* inesencial, *y denotamos* $T \in \mathcal{I}n$, *si para todo operador* $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ *se verifica* $I_X - ST \in \Phi$.

Ejercicio 3.3.3. *Probar que* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *es inesencial si y solo si para todo operador* $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ *se verifica* $I_Y - TS \in \Phi$.

Ejercicio 3.3.4. *Probar que la clase* $\mathcal{I}n$ *es un ideal de operadores y que* $Sp(\mathcal{I}n) = \mathbb{F}$.

Observación 3.3.1. *El ideal* $\mathcal{I}n$ *es cerrado (véase [70, 4.3.5]), pero no es inyectivo ni suprayectivo.*

En efecto, la inclusión natural $i\colon c_0 \longrightarrow \ell_\infty$ y los operadores suprayectivos $q\colon \ell_1 \longrightarrow c_0$ son inesenciales; sin embargo, $I_{c_0} \notin \mathcal{I}n$.

El siguiente resultado muestra que las componentes de $\mathcal{I}n$ coinciden con las de $P\Phi$ cuando las últimas están definidas. La demostración puede encontrarse en [1].

Proposición 3.3.2. *Sean* X *e* Y *espacios de Banach para los que* $\Phi(X,Y) \neq \emptyset$. *Un operador* $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ *es inesencial si y solo si, para todo* $T \in \Phi(X,Y)$, $T + K \in \Phi$.

El siguiente diagrama resume las relaciones de inclusión que satisfacen los ideales de operadores y las clases de perturbación que han aparecido en este capítulo.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{SS} \arrow[r, "\subsetneq"] & P\Phi_+ \arrow[dr, "\subsetneq"] & \\
\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{SS} \cap \mathcal{SC} \arrow[ur, "\subsetneq"] \arrow[dr, "\subsetneq"'] & & & \mathcal{I}n = P\Phi \\
 & \mathcal{SC} \arrow[r, "\subsetneq"'] & P\Phi_- \arrow[ur, "\subsetneq"'] &
\end{tikzcd}$$

Los ejemplos que muestran que $\mathcal{SS}$ y $\mathcal{SC}$ están propiamente incluidos respectivamente en $P\Phi_+$ y $P\Phi_-$ pueden encontrase en [25].

A continuación, describiremos ejemplos que muestran que las restantes inclusiones son propias.

Ejemplo 3.3.1. *Consideremos las inclusiones naturales*

$$L_\infty(0,1) \xrightarrow{J_2} L_2(0,1) \xrightarrow{J_1} L_1(0,1).$$

Se verifica

(i) $J_1 J_2 \in (\mathcal{SS} \cap \mathcal{SC}) \setminus \mathcal{K}$*;*

(ii) $J_1 \in (\mathcal{SS} \setminus \mathcal{SC})$*;*

(iii) $J_2 \in (\mathcal{SC} \setminus \mathcal{SS})$*;*

(iv) $J_1, J_2 \in \mathcal{I}n$*.*

La argumentación detallada puede verse en [26, Proposition 2.6].

Ultrapotencias en teoría de Fredholm

En la sección 2.4, vimos un procedimiento que, a una clase de operadores $\mathcal{C}$, le asociaba la clase

$$\mathcal{C}^{up} := \{T \in \mathcal{L} : \ T_{\mathfrak{U}} \in \mathcal{C} \ \text{ para todo ultrafiltro no trivial } \mathfrak{U}\,\}.$$

A continuación, veremos que algunas de las clases de operadores de la teoría de Fredholm son invariantes ante este procedimiento.

Proposición 3.3.3. *Sea* $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ *y sea* $\mathfrak{U}$ *un ultrafiltro no trivial. El operador* K *es compacto si y solo si* $K_{\mathfrak{U}}$ *lo es.*

Proposición 3.3.4. *Sea* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *y sea* $\mathfrak{U}$ *un ultrafiltro no trivial. El operador* T *es semi-Fredholm si y solo si* $T_{\mathfrak{U}}$ *lo es.*
En ese caso, $\mathrm{ind}(T_{\mathfrak{U}}) = \mathrm{ind}(T)$*.*

La demostración de los dos resultados anteriores es una aplicación directa de las propiedades básicas de las ultrapotencias.

Capítulo 4

Operadores tauberianos y cotauberianos

En este capítulo describimos las propiedades de los operadores tauberianos y cotauberianos, haciendo énfasis en su relación con el ideal de los operadores débilmente compactos y el de los espacios reflexivos.

Aparte de los semigrupos de operadores semi-Fredholm Φ_+ y Φ_-, el de los operadores tauberianos es el que ha sido más estudiado. Además ha encontrado muchas aplicaciones en teoría de espacios de Banach: en el estudio de la propiedad de Radon-Nykodým [74], en el refinamiento de la caracterización de James de los espacios reflexivos [67], en la obtención de nuevas versiones del principio de reflexividad local [12], en el estudio de las álgebras de Calkin asociadas a los operadores débilmente compactos [9], en la construcción de espacios hereditariamente indescomponibles [7], etc. A lo largo de la exposición –especialmente en el Capítulo 7– veremos algunas de ellas.

En [35] podemos encontrar una descripción del proceso que llevó a introducir el concepto de operador tauberiano para estudiar, desde un punto de vista abstracto, un problema de sumabilidad de series.

4.1. Operadores tauberianos

Comenzamos presentando el concepto de operador tauberiano, introducido por Kalton y Wilansky en [57].

Definición 4.1.1. *Un operador* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *se dice* tauberiano *si su segundo conjugado satisface* $T^{**-1}(Y) \subset X$.

Denotaremos por $\mathcal{T}$ *la clase de los operadores tauberianos.*

Es inmediato comprobar que el operador residuo nos permite dar una caracterización algebraica de la clase $\mathcal{T}$.

Ejercicio 4.1.1. *Un operador* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *es tauberiano si y solamente si el operador residuo* T^{co} *es inyectivo.*

Las siguientes caracterizaciones de los operadores débilmente compactos muestran la estrecha relación que tienen con los tauberianos.

Proposición 4.1.1. *Sea* $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ *un operador. Son equivalentes:*

(i) $K \in \mathcal{W}$;

(ii) $K^{**}(X^{**}) \subset Y$;

(ii) $K^{co} = 0$.

Demostración. Recordemos que $K \in \mathcal{W}$ si y sólo si $\overline{K(B_X)}$ es débilmente compacto. Luego la equivalencia de (i) y (ii) es consecuencia directa del Teorema 1.1.3.

La prueba de la equivalencia entre (ii) y (iii) es un ejercicio. □

El siguiente resultado describe las relaciones básicas entre las clases de operadores $\mathcal{T}$ y $\mathcal{W}$. La demostración se hace fácilmente utilizando las caracterizaciones en términos del operador residuo.

Proposición 4.1.2. *Sean* $S, T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *y* $U \in \mathcal{L}(Y,Z)$. *Se verifica:*

(i) $T, U \in \mathcal{T}$ *implica* $UT \in \mathcal{T}$;

(ii) $UT \in \mathcal{T}$ *implica* $T \in \mathcal{T}$;

(iii) $T \in \mathcal{T} \cap \mathcal{W}$ *implica* X *reflexivo;*

(iv) $T \in \mathcal{T}$ *y* $S \in \mathcal{W}$ *implica* $T + S \in \mathcal{T}$.

Veamos algunos ejemplos básicos de operadores tauberianos.

Proposición 4.1.3. *Sea* Z *un subespacio cerrado de un espacio de Banach* X. *Se verifica:*

(i) *la inclusión natural* $J_Z \colon Z \longrightarrow X$ *es un operador tauberiano;*

(ii) *el operador cociente* $Q_Z \colon X \longrightarrow X/Z$ *es tauberiano si y solo si el subespacio* Z *es reflexivo.*

Demostración. (i) Se sigue de que $Z^{\perp\perp} \cap X = Z$ y podemos identificar $Z^{\perp\perp}$ con Z^{**}.

(ii) Basta observar que podemos identificar $(Q_Z)^{**}$ con el operador cociente $Q_{Z^{\perp\perp}}$, y que Z es reflexivo si y solo si $Z = Z^{\perp\perp}$. $\square$

Todo operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ admite la siguiente factorización:

$$T = \widetilde{T} Q_{N(T)} \tag{4.1}$$

donde $\widetilde{T} \colon X/N(T) \longrightarrow Y$ queda definido por $\widetilde{T}(x + N(T)) := Tx$ para todo $x \in X$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, two heads, "Q_{N(T)}"'] & Y \\ X/N(T) \arrow[ur, "\widetilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

$\widetilde{T}$ es el operador inyectivo asociado a T.

Teorema 4.1.1. *Sea* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$*. Se verifica:*

(i) $T \in \mathcal{T}$ *si y solo si* $\widetilde{T} \in \mathcal{T}$ *y* $N(T)$ *es reflexivo;*

(ii) *si* $R(T)$ *es cerrado,* $T \in \mathcal{T}$ *si y solo si* $N(T)$ *es reflexivo.*

Demostración. (i) Supongamos que T es tauberiano y consideremos la descomposición $T = \widetilde{T} Q_{N(T)}$. Por la Proposición 4.1.2, $Q_{N(T)}$ es tauberiano; luego $N(T)$ es reflexivo por la Proposición 4.1.3.

Como $N(T) = N(T)^{\perp\perp}$, podemos identificar $(X/N(T))^{**}$ con el cociente $X^{**}/N(T)$; luego podemos ver $(\widetilde{T})^{**}$ como operador entre los espacios $X^{**}/N(T)$ y Y^{**}.

Supongamos que $x^{**} + N(T) \in X^{**}/N(T)$ y $(\widetilde{T})^{**}(x^{**} + N(T)) = T^{**}x^{**} \in Y$. Entonces $x^{**} \in X$, por lo que $x^{**} + N(T) \in X/N(T)$, y concluimos que $\widetilde{T}$ es tauberiano.

Recíprocamente, si $\widetilde{T}$ es tauberiano y $N(T)$ reflexivo, como $Q_{N(T)}$ es tauberiano por la Proposición 4.1.3, de la Proposición 4.1.2 deducimos que $T = \widetilde{T} Q_{N(T)}$ es tauberiano.

(ii) Una implicación es consecuencia de la parte (i). Para probar la otra implicación, notemos que $R(T)$ es cerrado; luego el operador T admite la siguiente factorización:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q_{N(T)}"'] & Y \\ X/N(T) \arrow[r, "\widehat{T}"'] & R(T) \arrow[u, "J_{R(T)}"'] \end{tikzcd}$$

donde $\widehat{T}$ aplica $x + N(T)$ en Tx.

Nótese que $\widehat{T}$ es tauberiano por ser un isomorfismo biyectivo. Además, como $R(T)$ es cerado y $N(T)$ es reflexivo, la Proposición 4.1.3 implica que $J_{R(T)}$ y $Q_{N(T)}$ son tauberianos. Luego $T = J_{R(T)}\widehat{T}Q_{N(T)}$ es un operador tauberiano. $\square$

El argumento del siguiente lema se aplicará con frecuencia en este capítulo.

Lema 4.1.1. *Sean $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y A un subconjunto acotado de X. Se verifica:*

(i) $T^{**}(\overline{A}^{w^*}) = \overline{T(A)}^{w^*}$*;*

(ii) *si A es convexo, $T^{**}(\overline{A}^{w^*}) \cap Y = \overline{T(A)}$.*

En particular, $T^{**}(B_{X^{**}}) = \overline{T(B_X)}^{w^*}$ y $T^{**}(B_{X^{**}}) \cap Y = \overline{T(B_X)}$.

Demostración. (i) Se sigue de que T^{**} es w*-continuo y $\overline{A}^{w^*}$ es w*-compacto.

(ii) Como la clausura débil de $T(A)$ coincide con $\overline{T(A)}^{w^*} \cap Y$, de (i) se sigue que $\overline{T(A)}^{w} = T^{**}(\overline{A}^{w^*}) \cap Y$; y como la clausura débil de un convexo coincide con la clausura en norma, $\overline{T(A)} = T^{**}(\overline{A}^{w^*}) \cap Y$.

Lo que falta de probar es consecuencia del teorema de Goldstine: $B_{X^{**}} = \overline{B_X}^{w^*}$. $\square$

Las siguientes caracterizaciones son elementales, pero muy útiles para investigar los operadores tauberianos.

Teorema 4.1.2. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Son equivalentes:*

(a) *T es tauberiano;*

(b) *$N(T^{**}) = N(T)$ y $T(B_X)$ es cerrado;*

(c) *$N(T^{**}) = N(T)$ y $\overline{T(B_X)} \subset R(T)$.*

Demostración. (a)⇒(b) La igualdad $N(T^{**}) = N(T)$ es evidente. Para probar que $T(B_X)$ es cerrado, sea $y \in \overline{T(B_X)}$. Por el Lema 4.1.1, existe $x^{**} \in B_{X^{**}}$ tal que $y = T^{**}x^{**}$. Como T es tauberiano, $x^{**} \in B_X$; luego $y \in T(B_X)$.

(b)⇒(c) Trivial.

(c)⇒(a) Let $x^{**} \in X^{**}$ con $\|x^{**}\| = 1$ tal que $y := T^{**}x^{**} \in Y$. Por el Lema 4.1.1, $y \in \overline{T(B_X)}$. Como suponemos $\overline{T(B_X)} \subset R(T)$, existe $z \in X$ tal que $y = Tz$.

Tenemos $x^{**} - z \in N(T^{**}) = N(T)$; luego $x^{**} \in X$, y concluimos que T es tauberiano. □

Como consecuencia del Teorema 4.1.2, obtenemos las siguientes implicaciones para un operador T:

$$T \text{ tauberiano} \Rightarrow N(T^{**}) = N(T) \Rightarrow N(T) \text{ reflexivo.}$$

Veremos que las implicaciones inversas no son válidas, salvo en el caso en que el rango de T es cerrado (Teorema 4.1.1).

Ejemplo 4.1.1. *Sea $C \in \mathcal{L}(c_0, c_0)$ el operador de Cesàro, definido por*

$$C(x_n)_n := \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)_n .$$

Se verifica $N(C^{**}) = N(C)$, pero C no es tauberiano.

Ejemplo 4.1.2. *El operador $T\colon c_0 \longrightarrow c_0$ definido por la expresión $T(x_n) := (x_n - x_{n+1})$ es inyectivo, pero $N(T^{**}) \neq \{0\}$.*

En algunos casos, la igualdad $N(T^{**}) = N(T)$ implica que T es tauberiano. Recordemos que un espacio de Banach X se dice *débilmente sucesionalmente completo* si las sucesiones débilmente de Cauchy en X son débilmente convergentes. Los espacios reflexivos y $L_1(0,1)$ son ejemplos de espacios de este tipo.

Proposición 4.1.4. *Si el espacio X es débilmente sucesionalmente completo, todo operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ que verifique $N(T^{**}) = N(T)$ es tauberiano.*

Demostración. Por el Teorema 4.1.2, basta probar que $T(B_X)$ es un conjunto cerrado.

Sea $y \in \overline{T(B_X)}$. Si seleccionamos una sucesión (x_n) en B_X tal que $T(x_n) \underset{n}{\longrightarrow} y$, por el Teorema 1.2.2 (x_n) tiene una subsucesión (u_n) que es débilmente de Cauchy o equivalente a la base (e_n) de ℓ_1.

En el primer caso, como X es débilmente sucesionalmente completo, (u_n) converge débilmente a un vector $z \in B_X$. Luego podemos encontrar una sucesión (v_n) de combinaciones convexas de la sucesión (u_n) con (v_n) convergente a z. Entonces $z \in B_X$; luego $y = T(z) \in T(B_X)$.

En el segundo caso, existiría $u^{**} \in \overline{\{u_{2n} - u_{2n+1}\}}^{w^*} \setminus X$, y tendríamos $T^{**}(u^{**}) = 0$, en contradicción con $N(T^{**}) = N(T)$. □

Veamos una propiedad de estabilidad de la clase $\mathcal{T}$ que permitirá construir nuevos ejemplos a partir de los conocidos.

Proposición 4.1.5. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $T_n \in \mathcal{L}(X_n, Y_n)$ un operador tauberiano. Si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$, la expresión*

$$T\big((x_1, x_2, x_3, \dots)\big) := (T_1x_1, T_2x_2, T_3x_3, \dots)$$

define un operador tauberiano $T \in \mathcal{L}\big(\ell_2(X_n), \ell_2(Y_n)\big)$.

Demostración. Claramente $T \in \mathcal{L}(\ell_2(X_n), \ell_2(Y_n))$; de hecho, se puede comprobar que $\|T\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|$.

Por otro lado, como podemos identificar el bidual de $\ell_2(X_n)$ con $\ell_2(X_n^{**})$ y $\ell_2(Y_n)$ con $\ell_2(Y_n^{**})$, el operador T^{**} viene dado por

$$T^{**}\big((x_1^{**}, x_2^{**}, \dots)\big) := (T_1^{**}x_1^{**}, T_2^{**}x_2^{**}, \dots) \quad (x_n^{**}) \in \ell_2(Y_n).$$

por lo que es inmediato comprobar que T es tauberiano. □

El resultado anterior nos permite probar que las componentes de $\mathcal{T}$ no son siempre subconjuntos abiertos, como sucede con las de Φ_+.

Ejemplo 4.1.3. *Sea X un espacio de Banach no reflexivo. El operador $T\colon \ell_2(X) \longrightarrow \ell_2(X)$ definido por*

$$T\big((x_n)\big) := (x_n/n), \quad (x_n) \in \ell_2(X)$$

es tauberiano y pertenece a la frontera del conjunto $\mathcal{T}\big(\ell_2(X)\big)$.

Demostración. Por la Proposición 4.1.5, T is tauberiano.

Para ver que T pertenece a la frontera de $\mathcal{T}\big(\ell_2(X)\big)$, basta considerar para cada $k \in \mathbb{N}$ el operador $T_k\colon \ell_2(X) \longrightarrow \ell_2(X)$ definido por

$$T_k(x_n) := \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_k}{k}, 0, 0, \ldots\ldots\right).$$

Claramente $\|T - T_k\| = 1/(k+1)$ y T_k no es tauberiano porque su núcleo no es reflexivo. □

Veamos un ejemplo de operador tauberiano que está muy lejos de ser upper semi-Fredholm, aunque el espacio de partida no es reflexivo.

Sea (a_n) una sucesión de escalares. Consideremos la expresión

$$\|(a_n)\|_J := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} |a_{n_{i+1}} - a_{n_i}|^2 \, + \, |a_{n_k}|^2 \right\}^{1/2},$$

donde el supremo se toma sobre todas las sucesiones crecientes finitas $n_1 < \ldots < n_k$ en $\mathbb{N}$.

El *espacio de James,* definido por $J := \{(a_n) \in c_0 \, : \, \|(x_n)\|_J < \infty\}$, es un espacio de Banach.

Ejemplo 4.1.4. *La inclusión $\iota\colon J \longrightarrow c_0$ es un operador tauberiano.*

Demostración. Como podemos ver en [60, 1.d.2], el bidual de J es

$$J^{**} = J \oplus \operatorname{span}\{(1,1,1,\ldots)\}.$$

Como $\iota^{**}\big((1,1,1,\ldots)\big) = (1,1,1,\ldots) \in \ell_\infty \setminus c_0$, ι es tauberiano. □

Nótese que J no contiene subespacios cerrados isomorfos a c_0. Luego ninguna restricción $\iota|_E$ de ι a un subespacio de dimensión infinita de J es upper semi-Fredholm.

Caracterizaciones de los operadores tauberianos

En esta sección presentamos las caracterizaciones sucesionales fundamentales, obtenidas por Kalton y Wilansky [57], de la propiedad $N(T^{**}) = N(T)$ y de los operadores tauberianos (Teoremas 4.1.3 y 4.1.4). Además daremos otras obtenidas posteriormente.

Teorema 4.1.3. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Son equivalentes:*

(a) $N(T^{**}) = N(T)$;

(b) *si (x_n) es una sucesión acotada en X y (Tx_n) converge débilmente a 0, (x_n) admite una subsucesión débilmente convergente;*

(c) *si (x_n) es una sucesión acotada en X y (Tx_n) converge a 0, (x_n) admite una subsucesión débilmente convergente.*

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b) Sea (x_n) una sucesión acotada en X tal que (Tx_n) converge débilmente a 0. Denotemos $A := \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Entonces se verifica

$$\overline{T(A)}^{w^*} = \{Tx_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset Y.$$

Luego si $x^{**} \in \overline{A}^{w^*} \setminus A$, tenemos $x^{**} \in N(T^{**}) = N(T)$. Como A es acotado y $\overline{A}^{w^*} = \overline{A}^{w} \subset X$, concluimos que $\overline{A}^{w}$ es débilmente compacto. Luego, por el Teorema de Eberlein-Smulian (Teorema 1.1.3), (x_n) tiene una subsucesión débilmente convergente.

(b)$\Rightarrow$(c) Trivial.

(c)$\Rightarrow$(a) Sea $x^{**} \in N(T^{**})$ con $\|x^{**}\| \leq 1$. Para cada entorno w*-abierto V de x^{**} en X^{**}, seleccionamos un entorno w*-abierto y convexo U de x^{**} de modo que $\overline{U}^{w^*} \subset V$. Entonces $x^{**} \in \overline{U \cap B_X}^{w^*}$; luego el Lema 4.1.1 implica

$$0 \in \overline{T(U \cap B_X)}^{w^*} \cap Y = \overline{T(U \cap B_X)}.$$

Como $T(U \cap B_X)$ es convexo, podemos encontrar una sucesión (x_n) en $U \cap B_X$ tal que $Tx_n \underset{n}{\longrightarrow} 0$ (en norma).

Por hipótesis, (x_n) admite una subsucesión (x_{n_i}) que converge débilmente a un punto $x \in V \cap N(T)$; luego $V \cap N(T) \neq \emptyset$ y obtenemos que $x^{**} \in \overline{N(T)}^{w^*}$. Como $N(T)$ es reflexivo, $\overline{N(T)}^{w^*} = N(T)$, por lo que $x^{**} \in N(T)$, y concluimos $N(T^{**}) = N(T)$. $\square$

El siguiente resultado permitirá más adelante extraer consecuencias de la existencia de un operador tauberiano inyectivo entre dos espacios de Banach.

Corolario 4.1.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Son equivalentes:*

(a) $N(T^{**}) = \{0\}$*;*

(b) *si (x_n) es una sucesión acotada en X y (Tx_n) converge débilmente a 0, (x_n) converge débilmente a 0.*

La demostración es un ejercicio.

Veamos ahora la caracterización sucesional de los operadores tauberianos.

Teorema 4.1.4. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Son equivalentes:*

(a) *T es tauberiano;*

(b) *si (x_n) es una sucesión acotada en X y (Tx_n) es débilmente convergente, (x_n) admite una subsucesión débilmente convergente;*

(c) *si (x_n) es una sucesión acotada en X y (Tx_n) es convergente, (x_n) admite una subsucesión débilmente convergente.*

Demostración. (a)⇒(b) Sea (x_n) una sucesión acotada en X tal que (Tx_n) converge débilmente a un vector y. Podemos suponer $y \in \overline{T(B_X)}$. Por el Teorema 4.1.2, $y \in R(T)$. Luego existe $x \in X$ tal que $y = Tx$.

Ahora, como $T(x_n - x) \xrightarrow[n]{w} 0$ y $N(T^{**}) = N(T)$, por el Teorema 4.1.3 (x_n) tiene una subsucesión débilmente convergente.

(b)⇒(c) Trivial.

(c)⇒(a) Del Teorema 4.1.3 se sigue que $N(T^{**}) = N(T)$. Luego, por el Teorema 4.1.2, basta probar que $\overline{T(B_X)} \subset R(T)$.

Sea $y \in \overline{T(B_X)}$; seleccionamos una sucesión (x_n) en B_X tal que $Tx_n \xrightarrow[n]{} y$. Por hipótesis, (x_n) contiene una subsucesión débilmente convergente (x_{k_n}) a un vector $x \in B_X$; luego $y = Tx$. □

Como consecuencia del resultado anterior, podemos obtener una caracterización de los operadores tauberianos en términos de su acción sobre los conjuntos acotados. Diremos que un conjunto es *relativamente (débilmente) compacto* si su clausura (respecto de la topología débil) es un conjunto (débilmente) compacto.

Corolario 4.1.2. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Son equivalentes:*

(a) *T es tauberiano;*

(b) *si C es un subconjunto acotado de X y $T(C)$ es relativamente débilmente compacto, C es relativamente débilmente compacto;*

(c) *si C es un subconjunto acotado de X y $T(C)$ es relativamente compacto, C es relativamente débilmente compacto.*

Demostración. Basta considerar las caracterizaciones sucesionales de los conjuntos relativamente compactos y relativamente débilmente compactos. □

Veamos ahora la caracterización perturbativa de los operadores tauberianos, que debe compararse con la primera parte del Teorema 3.2.1.

Teorema 4.1.5. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es tauberiano si y solo si, para todo operador compacto $K \in \mathcal{L}(X,Y)$, el núcleo $N(T+K)$ es reflexivo.*

Demostración. Si T es tauberiano y K es compacto, $T+K$ es tauberiano por la Proposición 4.1.2. Luego $N(T+K)$ es reflexivo.

Recíprocamente, supongamos que T no es tauberiano. Por el Teorema 4.1.4, podemos encontrar una sucesión acotada (x_n) en X sin subsucesiones débilmente convergentes, de modo que (Tx_n) converge a un vector $y \in Y$. Por el criterio de Kadec-Pełczyński (Teorema 1.2.1) podemos suponer que (x_n) es una sucesión básica. Sea (g_n) la sucesión acotada de los funcionales coeficientes asociada a (x_n). Por el Teorema de Hahn-Banach, podemos encontrar una sucesión acotada (f_n) en X^* donde cada f_n es una extensión de g_n.

Como $\|Tx_n - y\| \underset{n}{\longrightarrow} 0$, pasando a una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $\|Tx_n - y\| \cdot \|f_n\| \leq 2^{-n}$ para todo n. Por tanto, la expresión

$$Kx := \sum_{i=1}^{\infty} \langle f_i, x\rangle (y - Tx_i)$$

define un operador nuclear $K \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Como $(T+K)x_i = y$ para todo $i \in \mathbb{N}$, $N(T+K)$ contiene el subespacio cerrado generado por la sucesión $(x_i - x_1)_{i=2}^{\infty}$; luego $N(T+K)$ no es reflexivo. □

Como consecuencia del Teorema 4.1.5, obtenemos una caracterización algebraica de los operadores tauberianos, que permitirá identificar $\mathcal{T}$ con los semigrupos estudiados en el Capítulo 5.

Proposición 4.1.6. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Son equivalentes:*

(a) *T es tauberiano;*

(b) *si $S \in \mathcal{L}(W, X)$ y $TS \in \mathcal{W}$, $S \in \mathcal{W}$;*

(c) *si E es un subespacio cerrado de X y $T|_E \in \mathcal{W}$, E es reflexivo.*

Demostración. (a)⇒(b) Supongamos que $S \in \mathcal{L}(W, X)$ y $ST \in \mathcal{W}$. Si (w_n) es una sucesión acotada en W, (TSw_n) tiene una subsucesión débilmente convergente. Como T es tauberiano, se sigue del Teorema 4.1.4 que (Sw_n) tiene una subsucesión débilmente convergente. Luego S es débilmente compacto.

(b)⇒(c) Sea E un subespacio cerrado de X. Si $T|_E \equiv TJ_E \in \mathcal{W}$, tenemos $J_E \in \mathcal{W}$; luego E es reflexivo por la Proposición 4.1.2.

(c)⇒(a) Supongamos que T no es tauberiano. El Teorema 4.1.5 implica la existencia de un operador compacto $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ de modo que $N(T + K)$ no es reflexivo. Como $T|_{N(T+K)}$ es compacto, (c) no es válida. □

Acción sobre conjuntos convexos cerrados

El principal resultado de esta sección es el Teorema 4.1.7, probado por Neidinger y Rosenthal [67], que muestra que un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es tauberiano si y solo $T(C)$ es cerrado para todo subconjunto cerrado, convexo y acotado C de X. La demostración necesita el siguiente resultado, obtenido por James en [51] y [52].

Teorema 4.1.6. (Teorema de James) *Un subconjunto débilmente cerrado C de un espacio de Banach X es débilmente compacto si y solo si todo $x \in X^*$ alcanza su máximo en C.*

Consecuencia: X es reflexivo si y solo si todo $x \in X^*$ alcanza su norma en la bola unidad B_X.

Nótese que si C es un conjunto convexo y $x^* \in X^*$, la imagen $X^*(C)$ es un intervalo en $\mathbb{R}$.

Teorema 4.1.7. *Sea X un espacio no reflexivo y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ un operador no nulo. Son equivalentes:*

(a) *T es tauberiano;*

(b) *para todo subconjunto débilmente cerrado C de X, $T(C)$ es débilmente cerrado;*

(c) *para todo subconjunto convexo y cerrado C de X, $T(C)$ es cerrado;*

(d) *para todo subespacio cerrado E de X, $T(B_E)$ es cerrado.*

Demostración. Véase [36]. □

Nótese que, si X es no reflexivo, 0_X verifica todos los apartados del Teorema 4.1.7, salvo el primero.

Por otro lado, es interesante comparar la parte (d) del Teorema 4.1.7 con la parte (b) del Teorema 4.1.2.

Acción sobre las sucesiones básicas

Vimos en la Proposición 1.2.6 que una sucesión básica (x_n) en un espacio de Banach genera un subespacio reflexivo si y solo si (x_n) es shrinking y acotadamente completa. Utilizando este resultado y el Teorema 4.1.5, se deduce que un operador $T\colon X \longrightarrow Y$ es tauberiano si y solo si toda sucesión básica semi-normalizada (x_n) de X para la que $\sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\| < \infty$ es shrinking y acotadamente completa.

A continuación veremos una caracterización algo más refinada de los operadores tauberianos en términos de su acción sobre sucesiones básicas, probada en [50].

Proposición 4.1.7. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Son equivalentes:*

(a) *T es tauberiano;*

(b) *si (x_n) es una sucesión básica seminormalizada en X y verifica $\sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\| < \infty$, (x_n) es acotadamente completa y shrinking;*

(c) *si (x_n) es una sucesión básica seminormalizada en X y verifica $\sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\| < \infty$, (x_n) es acotadamente completa.*

Demostración. Véase [50] o [36]. □

Veamos que en la parte (c) de la Proposición 4.1.7 no podemos sustituir "acotadamente completa" por shrinking.

Proposición 4.1.8. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Son equivalentes:*

(a) $N(T^{**}) = N(T)$;

(b) *si (x_n) es una sucesión básica seminormalizada en X y verifica $\sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\| < \infty$, (x_n) es shrinking.*

Demostración. Véase [50] o [36]. □

4.2. Operadores cotauberianos

Las similaridades entre los operadores tauberianos y los upper semi-Fredholm sugirieron introducir el siguiente concepto.

Definición 4.2.1. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se dice* cotauberiano *si T^* es tauberiano.*

La clase de los operadores cotauberianos se denota $\mathcal{T}^d$.

Los operadores cotauberianos fueron introducidos por Tacon en [75].

Ejercicio 4.2.1. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es cotauberiano si y solamente si el operador residuo T^{co} tiene rango denso.*

Como es de esperar, existen similaridades entre los operadores cotauberianos y los lower semi-Fredholm. Además, muchas propiedades de los operadores cotauberianos son versiones duales de las de los tauberianos. Sin embargo, la dualidad no es perfecta: veremos que existen operadores tauberianos T para los que T^* no es cotauberiano.

El siguiente resultado sugiere que la propiedad de ser tauberiano es menos fuerte para operadores conjugados.

Proposición 4.2.1. *Un operador T es cotauberiano si y solo si verifica $N(T^{***}) = N(T^*)$.*

Demostración. Como los operadores conjugados $T^* \colon Y^* \longrightarrow X^*$ son w*-continuos y la bola unidad B_{Y^*} es w*-compacta, $T^*(B_{Y^*})$ es siempre cerrada. Luego el resultado que queremos probar es consecuencia directa del Teorema 4.1.2. □

Observación 4.2.1. *En general, el conjunto $\mathcal{T}^d(X,Y)$ no es abierto en $\mathcal{L}(X,Y)$.*

En efecto, si T y T_k son los operadores que introdujimos en el Ejemplo 4.1.3, es fácil ver que T^* es tauberiano pero los operadores T_k^* no lo son; luego T es cotauberiano, los operadores T_k no son cotauberianos y (T_k) converge a T.

Queda probado que si X es un espacio de Banach no reflexivo, el conjunto $\mathcal{T}^d(\ell_2(X))$ no es abierto en $\mathcal{L}(\ell_2(X))$.

Veamos algunas propiedades básicas de la clase $\mathcal{T}^d$ de los operadores cotauberianos.

Proposición 4.2.2. *Sean $S,T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $U \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Se verifica:*

(i) $T,U \in \mathcal{T}^d$ *implica* $UT \in \mathcal{T}^d$;

(ii) $UT \in \mathcal{T}^d$ *implica* $U \in \mathcal{T}^d$;

(iii) $T \in \mathcal{T}^d \cap \mathcal{W}$ *implica* Y *reflexivo;*

(iv) $T \in \mathcal{T}^d$ *implica* $Y/\overline{R(T)}$ *reflexivo;*

(v) $T \in \mathcal{T}^d$ *y* $S \in \mathcal{W}$ *implica* $T+S \in \mathcal{T}^d$.

La demostración de las propiedades anteriores puede deducirse fácilmente de las correspondientes propiedades de $\mathcal{T}$ vistas en la Proposición 4.1.2.

Los operadores cotauberianos con rango cerrado pueden caracterizarse en términos de su conúcleo.

Proposición 4.2.3. *Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tiene rango cerrado, T es cotauberiano si y solo si $Y/R(T)$ es reflexivo.*

Demostración. Como $R(T)$ es cerrado, $R(T^*)$ también lo es, y el resultado es consecuencia del Teorema 4.1.1 junto con la identificación $N(T^*) \equiv (Y/R(T))^*$. □

Un contraejemplo

Como T^{**} puede identificarse con una extensión de T, es fácil ver que T^{**} tauberiano implica T tauberiano; equivalentemente, T^{*} cotauberiano implica T tauberiano. Veremos a continuación que, en general, las implicaciones opuestas no son válidas.

Este contraejemplo, obtenido en [6], se basa en la siguiente idea: un operador T es tauberiano si y solo si T^{co} es inyectivo. Luego si encontramos un operador inyectivo S tal que S^{**} no sea inyectivo, y logramos probar que existe un operador T tal que T^{co} puede identificarse con S, como $(T^{**})^{co}$ se identifica $(T^{co})^{**}$, habremos acabado.

Para encontrar estos operadores, construiremos un espacio de Banach $J(X_n)$ tal que podemos identificar $J(X_n)^{co}$ con ℓ_1. La construcción es similar a la del espacio de James.

Denotemos por X_n el subespacio de ℓ_1 generado por $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Como es habitual, $\|\cdot\|_1$ denota la norma en ℓ_1.

Sea (x_n) una sucesión con $x_n \in X_n$ para cada n. Definimos

$$\|(x_n)\|_J := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \|x_{n_{i+1}} - x_{n_i}\|_1^2 \, + \, \|x_{n_k}\|_1^2 \right\}^{1/2},$$

donde el supremo se toma sobre todas las sucesiones crecientes finitas $n_1 < \ldots < n_k$ en $\mathbb{N}$.

Consideramos el espacio

$$J(X_n) := \{(x_n) \, : \, x_n \in X_n, \; \|x_n\|_1 \underset{n}{\longrightarrow} 0, \; \|(x_n)\|_J < \infty\}.$$

Teorema 4.2.1. *Se verifican los siguientes resultados:*

(i) $(J(X_n), \|\cdot\|_J)$ *es un espacio de Banach;*

(ii) $J(X_n)^{**} = \{(x_n) \, : \, x_n \in X_n, \|(x_n)\|_J < \infty\}$*;*

(iii) $J(X_n)^{co}$ *se identifica isométricamente con* ℓ_1.

Demostración. Véase [36]. □

Utilizando el espacio $J(X_n)$ obtenemos el contraejemplo buscado.

Teorema 4.2.2. *Existe un operador* $T \in \mathcal{L}(J(X_n))$ *que es tauberiano, pero* T^{**} *no lo es.*

Demostración. Consideremos el operador $S\colon \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ definido por la expresión $S(a_n) := (a_n/n)$. Claramente S es inyectivo.

Como S es compacto y ℓ_1^* no es separable, $R(S^*)$ no es denso, luego S^{**} no es inyectivo.

Ahora consideramos el operador $T\colon J(X_n) \longrightarrow J(X_n)$ definido por la expresión

$$T\big((x_n)\big) := (Sx_n) \quad \text{para todo } (x_n) \in J(X_n).$$

Claramente $T \in \mathcal{L}(J(X_n))$ y el operador T^{co} puede identificarse con S. Luego T satisface las condiciones del enunciado. $\square$

Observación 4.2.2. *De una manera análoga, se puede probar que el operador T del Teorema 4.2.2 es cotauberiano, pero T^{**} no lo es.*

El siguiente resultado será la clave en la prueba de la caracterización perturbativa para los operadores cotauberianos y, más adelante, para otros semigrupos.

Lema 4.2.1. *Sea (g_n) una sucesión acotada en el espacio dual Y^*. Supongamos que $\operatorname{ínf}_n \|g_n\| > 0$ y que 0 es un punto de w^*-acumulación de $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces (g_n) tiene una subsucesión (g_{n_k}) para la que existe una sucesión acotada (y_k) en Y de modo que $\langle g_{n_i}, y_j\rangle = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Véase [36]. $\square$

Los operadores cotauberianos fueron introducidos en términos del operador conjugado. La siguiente caracterización perturbativa tiene interés porque en ella interviene solamente el propio operador. Este hecho y las correspondientes caracterizaciones perturbativas de los operadores semi-Fredhom sugieren que la Definition 4.2.1 es la elección correcta para el concepto de operador cotauberiano.

Teorema 4.2.3. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es cotauberiano si y solo si $Y/\overline{R(T+K)}$ es reflexivo para todo operador compacto $K \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

Demostración. La implicación directa es fácil: si T es cotauberiano y K es compacto, de la Proposición 4.1.2 se sigue que $T+K$ es cotauberiano; luego $Y/\overline{R(T+K)}$ es reflexivo.

Para probar la implicación inversa, suponemos que T no es cotauberiano; luego T^* no es tauberiano.

Por la Proposición 4.2.1, tenemos que $N(T^{***}) \neq N(T^*)$. Luego el Teorema 4.1.3 implica la existencia de una sucesión acotada (g_n) en Y^* sin subsucesiones débilmente convergentes tal que $(T^* g_n)$ converge en norma a 0.

Nótese que si g es un punto de w*-acumulación de $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$, $T^*(g) = 0$; luego podemos suponer que 0 es un punto de w*-acumulación de $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Por el Lema 4.2.1, pasando a una subsucesión si es necesario, podemos suponer que existe una sucesión acotada (y_n) en Y tal que $\langle g_i, y_j \rangle = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$, y además $\|y_n\| \cdot \|T^* g_n\| < 2^{-n}$ para todo n.

De lo anterior se sigue que la expresión

$$K(x) := -\sum_{n=1} \langle g_n, Tx \rangle y_n \quad \text{para todo} x \in X,$$

define un operador nuclear $K \in \mathcal{L}(X, Y)$. Además,

$$(T + K)^*(g_k) = T^* g_k - \sum_{n=1} \langle g_k, y_n \rangle \, T^* g_n = 0.$$

Como el núcleo $N((T + K)^*)$ contiene la sucesión (g_n), no es reflexivo; por tanto, el conúcleo $Y/\overline{R(T + K)}$, por ser isomorfo al predual de $N((T + K)^*)$, tampoco es reflexivo. □

A continuación daremos una versión dual de la Proposición 4.1.6, que proporciona caracterizaciones algebraicas de la clase $\mathcal{T}^d$ en cuyo enunciado tampoco aparece el operador conjugado. Además permitirá identificar $\mathcal{T}^d$ con los semigrupos estudiados en el Capítulo 5.

Proposición 4.2.4. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Son equivalentes:*

(a) *T es cotauberiano;*

(b) *si $S \in \mathcal{L}(Y, W)$ y $ST \in \mathcal{W}$, $S \in \mathcal{W}$;*

(c) *si F es un subespacio cerrado de Y y $Q_F T \in \mathcal{W}$, el cociente Y/F es reflexivo.*

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Supongamos $T \in \mathcal{T}^d(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,W)$ y $ST \in \mathcal{W}$. Entonces $T^*S^* \in \mathcal{W}$ y $T^* \in \mathcal{T}$. Por la Proposición 4.1.6, $S^* \in \mathcal{W}$; luego $S \in \mathcal{W}$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Basta notar que el cociente Y/F es reflexivo si y solo si $Q_F \in \mathcal{W}$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que T no es cotauberiano. Por el Teorema 4.2.3, podemos encontrar un operador compacto $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que el cociente $Y/\overline{R(T+K)}$ no es reflexivo.

Denotemos $F := \overline{R(T+K)}$. Tenemos que $Q_F T = -Q_F K \in \mathcal{W}$, pero Y/F no es reflexivo. $\square$

4.3. Operadores tauberianos en $L_1(\mu)$

En esta sección, (Ω, Σ, μ) será un espacio de medida finita sin átomos. Podemos pensar que Ω es el intervalo unidad $(0,1)$ y μ es la medida de Lebesgue. Además $L_1(\mu)$ es el espacio de Banach de las funciones integrables $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

El conjunto $\mathcal{T}(L_1(\mu), Y)$ tiene interés por dos motivos: porque sus propiedades son similares a las de $\Phi_+(L_1(\mu), Y)$; y porque $\mathcal{T}(L_1(\mu), Y)$ es, en general, más grande que $\Phi_+(L_1(\mu), Y)$.

Las buenas propiedades de $\mathcal{T}(L_1(\mu), Y)$ se derivan de los siguientes resultados:

(i) un subconjunto A de $L_1(\mu)$ es relativamente débilmente compacto si y solo si es equi-integrable (véase [5, Theorem 5.2.9]); es decir, si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que si $f \in A$ y $\Delta \in \Sigma$,
$$\mu(\Delta) < \delta \Rightarrow \int_\Delta |f|\, d\mu < \varepsilon;$$

(ii) toda sucesión acotada en $L_1(\mu)$ tiene una subsucesión que puede descomponerse como suma de una sucesión disjunta y una sucesión débilmente convergente (véase [5, Lemma 5.2.8]).

La mayor parte de los resultados sobre $\mathcal{T}(L_1(\mu), Y)$ que veremos en esta sección fueron probados en [31].

Proposición 4.3.1. *Un operador $T\colon L_1(\mu) \longrightarrow Y$ es tauberiano si y solo si $N(T^{**}) = N(T)$.*

Demostración. Basta notar que las sucesiones débilmente de Cauchy en $L_1(\mu)$ son débilmente convergentes [11, Proposition VI.2.6] y aplicar la Proposición 4.1.4. $\square$

Una sucesión (f_n) en el espacio $L_1(\mu)$ se dice *disjunta* si $f_m \cdot f_m = 0$ para $m \neq n$.

Teorema 4.3.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(L_1(\mu), Y)$. Son equivalentes:*

(a) *T tauberiano;*

(b) *para toda sucesión normalizada y disjunta (f_n) en $L_1(\mu)$,*

$$\liminf_n \|Tf_n\| > 0;$$

(c) *existe $r > 0$ tal que si (f_n) es una sucesión normalizada y disjunta en $L_1(\mu)$,*

$$\liminf_n \|Tf_n\| > r.$$

Demostración. Véase [36]. $\square$

En la Sección 4.1 mostramos que las componentes $\mathcal{T}(X, Y)$ no son siempre conjuntos abiertos (Ejemplo 4.1.3). Veamos que si lo son en el caso $X = L_1(\mu)$.

Para un operador $T \in \mathcal{L}(L_1(\mu), Y)$, denotamos

$$\beta_T := \inf\{\liminf_n \|T(f_n)\| \colon (f_n) \subset L_1(\mu) \text{ normalizada y disjunta}\}.$$

Corolario 4.3.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(L_1(\mu), Y)$. Se verifica:*

(i) *T es tauberiano si y solo si $\beta_T > 0$;*

(ii) *si T es tauberiano, $S \in \mathcal{L}(L_1(\mu), Y)$ y $\|T - S\| < \beta_T$, S es tauberiano.*

Por tanto, $\mathcal{T}(L_1(\mu), Y)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{L}(L_1(\mu), Y)$.

Demostración. (i) Es una consecuencia directa de la parte (c) del Teorema 4.3.1.

(ii) Supongamos $\|T - S\| = \alpha < \beta_T$. Si (f_n) es una sucesión normalizada y disjunta (f_n) en $L_1(\mu)$, $\liminf_n \|S(f_n)\| \geq \beta_T - \alpha > 0$, luego S es un operador tauberiano.

Claramente, (ii) implica que $\mathcal{T}(L_1(\mu), Y)$ es abierto. $\square$

Observación 4.3.1. *El espacio $L_1(\mu)$ contiene muchos subespacios reflexivos de dimensión infinita.*

De hecho, el espacio $L_1(0,1)$ contiene un subespacio E_p isomorfo a $L_p(0,1)$ para todo $p \in (1,2]$ (véase [61, Corollary 2.f.5]).

Nótese que las aplicaciones cocientes de $L_1(0,1)$ sobre $L_1(0,1)/E_p$ son operadores tauberianos.

Fijado $\Delta \in \Sigma$ con $\mu(\Delta) > 0$, denotamos por $L_1(\Delta)$ al subespacio de $L_1(\mu)$ de las funciones con soporte contenido en Δ:

$$L_1(\Delta) := \{f \in L_1(\mu) \colon\ f = f \cdot \chi_\Delta\},$$

donde χ_Δ es la función característica del conjunto Δ.

Corolario 4.3.2. *Sea $T\colon L_1(\mu) \longrightarrow Y$ un operador tauberiano. Para todo $\Delta \in \Sigma$ con $\mu(\Delta) > 0$, existe $\Delta_1 \in \Sigma$ contenido en Δ con $\mu(\Delta_1) > 0$ de modo que la restricción $T|_{L_1(\Delta_1)}$ es un isomorfismo.*

Demostración. Supongamos que el resultado no es cierto. Entonces podemos encontrar una sucesión (Δ_n) de conjuntos medibles disjuntos con $\mu(\Delta_n) > 0$ tal que ninguna de las restricciones $T|_{L_1(\Delta_n)}$ es un isomorfismo. Luego podemos encontrar, para cada $n \in \mathbb{N}$, una función $f_n \in L_1(\Delta_n)$ tal que $\|f_n\| = 1$ y $\|T(f_n)\| < 1/n$, lo que contradice el Teorema 4.3.1. $\square$

En el caso en que $\Omega = (0,1)$, con μ la medida de Lebesgue, si $\Delta \in \Sigma$ con $\mu(\Delta) > 0$, $L_1(C)$ es isomorfo a $L_1(\mu)$. Luego aplicando el Corolario 4.3.2, deducimos fácilmente la siguiente caracterización de los espacios Y para lo que existen operadores tauberianos de $L_1(\mu)$ en Y.

Corolario 4.3.3. *El conjunto $\mathcal{T}(L_1(0,1), Y)$ es no vacío si y solo si Y contiene un subspacio isomorfo a $L_1(0,1)$.*

Ultrapotencias de operadores tauberianos en $L_1(\mu)$

En esta sección describiremos los operadores tauberianos $T\colon L_1(\mu) \longrightarrow Y$ mediante sus ultrapotencias. Denotaremos por $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro $\aleph_0$-incompleto sobre un conjunto infinito I.

Los siguientes resultados sobre la ultrapotencia $L_1(\mu)_\mathfrak{U}$ pueden encontrarse en [36]:

Podemos construir una medida finita $\mu_{\mathfrak{U}}$ (la ultrapotencia de μ) de modo que el espacio $L_1(\mu_{\mathfrak{U}})$ está incluido en la ultrapotencia $L_1(\mu)_{\mathfrak{U}}$ mediante un operador isométrico

$$J_{\mu_{\mathfrak{U}}} : L_1(\mu_{\mathfrak{U}}) \longrightarrow L_1(\mu)_{\mathfrak{U}}.$$

Además, $J_{\mu_{\mathfrak{U}}}\big(L_1(\mu_{\mathfrak{U}})\big)$ es un subespacio complementado de $L_1(\mu)_{\mathfrak{U}}$. La correspondiente proyección $P_{\mu_{\mathfrak{U}}}$ proporciona una descomposición

$$L_1(\mu)_{\mathfrak{U}} = J_{\mu_{\mathfrak{U}}}\big(L_1(\mu_{\mathfrak{U}})\big) \oplus_1 N(P_{\mu_{\mathfrak{U}}}).$$

Recordemos que los vectores $\mathbf{f} \in L_1(\mu)_{\mathfrak{U}}$ son de la forma $\mathbf{f} = [f_i]$, donde $(f_i)_{i\in I}$ es una familia acotada en $L_1(\mu)$ que representa a $\mathbf{f}$.

Los elementos de $\mathbf{f} \in L_1(\mu)_{\mathfrak{U}}$ que pertenecen a $J_{\mu_{\mathfrak{U}}}\big(L_1(\mu_{\mathfrak{U}})\big)$ o a $N(P_{\mu_{\mathfrak{U}}})$ se caracterizan del siguiente modo:

(i) $\mathbf{f} \in J_{\mu_{\mathfrak{U}}}\big(L_1(\mu_{\mathfrak{U}})\big)$ si y solo si $\mathbf{f}$ admite un representante $(f_i)_{i\in I}$ con $\{f_i : i \in I\}$ equi-integrable en $L_1(\mu)$;

(ii) $\mathbf{f} \in N(P_{\mu_{\mathfrak{U}}})$ si y solo si $\mathbf{f}$ admite un representante $(f_i)_{i\in I}$ para el que $\lim_{\mathfrak{U}} \mu(\operatorname{supp} f_i) = 0$.

Utilizando la representación anterior, se prueba la siguiente caracterización de los operadores tauberianos en términos de sus ultrapotencias.

Proposición 4.3.2. *Sea $T \in \mathcal{L}(L_1(\mu), Y)$. Son equivalentes:*

(a) *T es tauberiano;*

(b) *$T_{\mathfrak{U}}|_{N(P_{\mu_{\mathfrak{U}}})}$ es un isomorfismo;*

(c) *$T_{\mathfrak{U}}|_{N(P_{\mu_{\mathfrak{U}}})}$ es inyectivo;*

(d) *$N(T_{\mathfrak{U}}) \subset J_{\mu_{\mathfrak{U}}}\big(L_1(\mu_{\mathfrak{U}})\big)$.*

Demostración. Véase [36]. □

Sobre los operadores en $\mathcal{T}(L_1(\mu))$

Hemos visto que, para algunos espacios de Banach Y, podemos encontrar operadores en $\mathcal{T}(L_1(\mu), Y)$ que no son upper semi-Fredholm. En el caso $Y = L_1(\mu)$, la existencia de estos operadores es un problema abierto:

Problema 1. Sea $T\colon L_1(\mu) \longrightarrow L_1(\mu)$ un operador tauberiano. ¿Es T upper semi-Fredholm?

Ambos conjuntos $\mathcal{T}(L_1(\mu))$ y $\Phi_+(L_1(\mu))$ son abiertos en $\mathcal{L}(L_1(\mu))$ y sus clases de perturbación (Definición 3.3.2) coinciden:

$$P\Phi_+(L_1(\mu)) = P\mathcal{T}(L_1(\mu)) = \mathcal{R}(L_1(\mu)).$$

Véase [36].

Los operadores upper semi-Fredholm tienen rango cerrado. Luego podemos considerar un problema más débil:

Problema 2. Sea $T\colon L_1(\mu) \longrightarrow L_1(\mu)$ un operador tauberiano con rango cerrado. ¿Es T upper semi-Fredholm?

El último problema es equivalente al siguiente:

Problema 2'. Sea R un subespacio reflexivo de dimensión infinita de $L_1(\mu)$. ¿Puede ser el cociente $L_1(\mu)/R$ isomorfo a un subespacio de $L_1(\mu)$?

Observación 4.3.2. *Nótese que existe un subespacio F_2 de $L_1(0,1)$ isomorfo a ℓ_2 tal que el cociente $L_1(0,1)/F_2$ no es isomorfo a un subespacio de $L_1(0,1)$. Véase [36].*

La construcción del subespacio F_2 anterior es muy intrincada. Interesaría saber que sucede para subespacios reflexivos más naturales:

Problem 3. Sea R_0 el subespacio cerrado de $L_1(0,1)$ generado por las funciones de Rademacher. ¿Es el cociente $L_1(0,1)/R_0$ isomorfo a un subespacio de $L_1(0,1)$?

En [36] se puede encontrar más información sobre estos problemas.

4.4. Operadores supertauberianos

En esta sección estudiaremos la clase $\mathcal{T}^{up}$, formada por los operadores T tales que $T_{\mathfrak{U}}$ es tauberiano para todo ultrafiltro $\mathfrak{U}$, así como la clase $(\mathcal{T}^d)^{up}$. Veremos que coinciden respectivamente con las clases de los operadores supertauberianos y cosupertauberianos, introducidas por Tacon en [75, 76] y estudiadas en [63] y [30].

Podemos resumir sus propiedades diciendo que son similares a las de las clases $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}^d$, pero con componentes abiertas y mejor comportamiento ante la dualidad.

No incluiremos las demostraciones, porque son técnicamente complicadas. Pueden encontrarse en [30] o en [36].

Definición 4.4.1. *Decimos que un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es* supertauberiano *si para todo $0 < \varepsilon < 1$, existen $\delta > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ para los que no existe ninguna sucesión ε-triangular finita $\{x_k\}_{k=1}^n$ tal que $\sup_{1\leq k\leq n} \|T(x_k)\| < \delta$.*

El siguiente resultado incluye varias caracterizaciones de los operadores supertauberianos, algunas de ellas en términos del núcleo de las ultrapotencias del operador.

Teorema 4.4.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ un operador y sea $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro no trivial en un conjunto I. Son equivalentes:*

(a) *T es supertauberiano;*

(b) *$N(T_{\mathfrak{U}})$ es superreflexivo;*

(c) *$N(T_{\mathfrak{U}})$ es reflexivo;*

(d) *existen números reales $0 < \varepsilon < 1$ y $\delta > 0$ y un entero $n \in \mathbb{N}$ para los que no existe ninguna sucesión ε-triangular finita $\{x_k\}_{k=1}^n$ tal que $\sup_{1\leq k\leq n} \|T(x_k)\| < \delta$;*

(e) *$T_{\mathfrak{U}}$ es supertauberiano;*

(f) *$T_{\mathfrak{U}}$ es tauberiano.*

Veamos algunas consecuencias.

Corolario 4.4.1. *Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es supertauberiano, su núcleo $N(T)$ es superreflexivo.*

Corolario 4.4.2. *El subconjunto de los operadores supertauberianos es abierto en* $\mathcal{L}(X,Y)$.

Corolario 4.4.3. *La clase de los operadores supertauberianos coincide con* $\mathcal{T}^{up}$.

Proposición 4.4.1. *Un operador* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *es supertauberiano si y solo si* T^{**} *lo es.*

Decimos que un operador $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ es *superdébilmente compacto* si $K \in \mathcal{W}^{up}$.

Nótese que $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{up}$; luego los operadores compactos son superdébilmente compactos.

Proposición 4.4.2. *La clase* $\mathcal{T}^{up}$ *es estable ante perturbación por operadores superdébilmente compactos.*

Proposición 4.4.3. *Un operador* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *con rango cerrado es supertauberiano si y solo si* $N(T)$ *es superreflexivo.*

Veamos que los operadores supertauberianos admiten caracterización perturbativa.

Teorema 4.4.2. *Un operador* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *es supertauberiano si y solo si para todo operador compacto* $K \in \mathcal{L}(X,Y)$*, el núcleo* $N(T+K)$ *es superreflexivo.*

El siguiente resultado presenta algunas caracterizaciones algebraicas de los operadores supertauberianos.

Proposición 4.4.4. *Sea* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Son equivalentes:*

(a) T *es supertauberiano;*

(b) *para todo espacio* Z *y todo operador* $A \in \mathcal{L}(Z,X)$, $TA \in \mathcal{W}^{up}$ *implica* $A \in \mathcal{W}^{up}$*;*

(c) *si* E *es un subespacio cerrado de* X *y* $T|_E \in \mathcal{W}^{up}$*, el espacio* E *es superreflexivo.*

De la Proposición 4.4.4, se sigue la igualdad $(\mathcal{W}_+)^{up} = (\mathcal{W}^{up})_+$.

Veamos un caso en que los operadores tauberianos coinciden con los supertauberianos.

Teorema 4.4.3. *Sea* μ *una medida finita. Un operador* $T \in \mathcal{L}\big(L_1(\mu),Y\big)$ *es supertauberiano si y solo si es tauberiano.*

Operadores cosupertauberianos

A continuación estudiaremos los operadores de las clase $(\mathcal{T}^{up})^d$.

Definición 4.4.2. *Decimos que un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es* cosupertauberiano *si T^* es supertauberiano.*

Por lo que hemos visto anteriormente, la clase de los operadores cosupertauberianos coincide con $(\mathcal{T}^{up})^d$.

No es difícil probar que

$$(\mathcal{T}^{up})^d = \big((\mathcal{W}_+)^{up}\big)^d = \big((\mathcal{W}^{up})_+\big)^d.$$

Notemos que se verifica la siguiente versión del Teorema de Gantmacher para ultrapotencias.

Proposición 4.4.5. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es superdébilmente compacto si y solo si T^* lo es.*

Los siguientes resultados sobre la clase $(\mathcal{T}^{up})^d$ se pueden deducir por dualidad de los vistos para $\mathcal{T}^{up}$.

Proposición 4.4.6. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ con rango cerrado es cosupertauberiano si y solo si $Y/R(T)$ es superreflexivo.*

Proposición 4.4.7. *El subconjunto de los operadores cosupertauberianos es abierto en $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Teorema 4.4.4. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ un operador y sea $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro no trivial en un conjunto I. Son equivalentes:*

(a) *T es cosupertauberiano;*

(b) *${T^*}_{\mathfrak{U}}$ es tauberiano;*

(c) *${T_{\mathfrak{U}}}^*$ es supertauberiano;*

(d) *${T_{\mathfrak{U}}}^*$ es tauberiano;*

(e) *$T_{\mathfrak{U}}$ es cosupertauberiano;*

(f) *$T_{\mathfrak{U}}$ es cotauberiano.*

Corolario 4.4.4. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es cosupertauberiano si y solo si T^{**} lo es.*

Los operadores cosupertauberianos admiten caracterización en términos del núcleo de las ultrapotencias de su conjugado.

Teorema 4.4.5. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ un operador y sea $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro no trivial en un conjunto I. Son equivalentes:*

(a) *T es cosupertauberiano;*

(b) *$N({T_{\mathfrak{U}}}^*)$ es super-reflexivo;*

(c) *$N({T_{\mathfrak{U}}}^*)$ es reflexivo;*

(d) *$N({T^*}_{\mathfrak{U}})$ es reflexivo;*

(e) *$N({T^*}_{\mathfrak{U}})$ es superreflexivo.*

Sea $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro no trivial. Es bien conocido que la ultrapotencia $(X^*)_{\mathfrak{U}}$ se identifica isométricamente con un subespacio cerrado de $(X_{\mathfrak{U}})^*$. Además, la coincidencia de este subespacio con $(X_{\mathfrak{U}})^*$ se produce si y solo si X es superreflexivo. Por tanto, podemos considerar el operador ${T_{\mathfrak{U}}}^*$ como una extensión de ${T^*}_{\mathfrak{U}}$, y el núcleo $N({T^*}_{\mathfrak{U}})$ como un subespacio de $N({T_{\mathfrak{U}}}^*)$.

Proposición 4.4.8. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es cosupertauberiano si y solo si $N({T^*}_{\mathfrak{U}}) = N({T_{\mathfrak{U}}}^*)$.*

Proposición 4.4.9. *Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es un operador cosupertauberiano y $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ es superdébilmente compacto, $T+K$ es cosupertauberiano.*

Los operadores cosupertauberianos admiten caracterización perturbativa.

Teorema 4.4.6. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es cosupertauberiano si y solo si, para todo operador compacto $K \in \mathcal{L}(X,Y)$, el conúcleo $Y/\overline{R(T+K)}$ es superreflexivo.*

Veamos algunas caracterizaciones de tipo algebraico de los operadores cosupertauberianos. Una de ellas permite identificar a la clase de los operadores cosupertauberianos con uno de los semigrupos asociados al ideal $\mathcal{W}^{up}$.

Proposición 4.4.10. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Son equivalentes:*

(a) *T es cosupertauberiano;*

(b) *para todo espacio Z y todo operador $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$, $AT \in \mathcal{W}^{up}$ implica $A \in \mathcal{W}^{up}$;*

(c) *si E es un subespacio cerrado de Y y $Q_E T \in \mathcal{W}^{up}$, el cociente Y/E es superreflexivo.*

Como consecuencia del Teorema 4.4.4 y la Proposición 4.4.10, tenemos

$$({\mathcal{W}_+}^{up})^d = (\mathcal{W}^{up})_- = (\mathcal{W}_-)^{up}.$$

Las siguientes igualdades resumen algunos de los resultados anteriores:

$$(\mathcal{W}_+)^{up} = \big((\mathcal{W}_-)^d\big)^{up} = \big((\mathcal{W}_-)^{up}\big)^d = \big((\mathcal{W}^{up})_-\big)^d.$$

Capítulo 5

Semigrupos de operadores

En este capítulo introducimos el concepto abstracto de semigrupo de operadores y estudiamos sus propiedades básicas. Además mostramos varios procedimientos para obtener semigrupos a partir de ideales de operadores, describimos algunos conceptos asociados y presentamos ejemplos concretos de semigrupos de operadores; en particular, algunos asociados a los ideales de operadores $\mathcal{K}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{WC}$ y $\mathcal{U}$.

5.1. Definiciones

Sean $S \in \mathcal{L}(V, W)$ y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ dos operadores. Denotamos por $S \times T$ al operador

$$S \times T \colon V \times X \longrightarrow W \times Y$$

que lleva el vector (v, x) al vector (Sv, Tx).

Definición 5.1.1. *Decimos que una clase de operadores $\mathcal{S}$ es un* semigrupo de operadores *(o simplemente, un* semigrupo*) si verifica las condiciones siguientes:*

(i) *la clase Φ de los operadores de Fredholm está contenida en $\mathcal{S}$;*

(ii) *si $S \in \mathcal{L}(V, W)$ y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \times T \in \mathcal{S}$ si y solo si $S, T \in \mathcal{S}$;*

(iii) *si $S \in \mathcal{S}(Y, Z)$ y $T \in \mathcal{S}(X, Y)$, $ST \in \mathcal{S}(X, Z)$.*

Observación 5.1.1. *Obviamente, utilizamos el término* semigrupo *por la condición (iii) en la Definición 5.1.1.*

Muchas veces utilizaremos el término *semigrupo de operadores* para hacer énfasis en el paralelismo con los ideales de operadores de Pietsch [70] y para evitar confusión con el uso del término semigrupo en otros contextos.

Nótese que, si X es un espacio de Banach, la identidad I_X pertenece a todos los semigrupos y 0_X pertenece a todos los ideales.

Ejercicio 5.1.1. *Las clases Φ_+, Φ_- y Φ son semigrupos.*
La clase $\Phi_\pm$ no es un semigrupo.

Si $\mathcal{S}$ es una clase de operadores, $\mathcal{S}^d := \{T \in \mathcal{L}\colon T^* \in \mathcal{S}\}$ denota la clase dual y $\mathcal{S}^{co} := \{T \in \mathcal{L}\colon T^{co} \in \mathcal{S}\}$ la clase residual.

Proposición 5.1.1. *Si $\mathcal{S}$ es un semigrupo de operadores, también $\mathcal{S}^d$ y $\mathcal{S}^{co}$ lo son.*

Demostración. Las clases $\mathcal{S}^d$ y $\mathcal{S}^{co}$ verifican las propiedades de la Definición 5.1.1 por lo siguiente:

(i) $T \in \Phi$ implica $T^*, T^{co} \in \Phi$;

(ii) podemos identificar $(T \times U)^*$ con $T^* \times U^*$ y $(T \times U)^{co}$ con $T^{co} \times U^{co}$;

(iii) $(ST)^* = T^*S^*$ y $(ST)^{co} = S^{co}T^{co}$.

$\square$

Ejercicio 5.1.2. *Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son semigrupos, la clase $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ definida por*

$$(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2)(X, Y) := \mathcal{S}_1(X, Y) \cap \mathcal{S}_2(X, Y)$$

es también un semigrupo.

Ejercicio 5.1.3. *Si $\mathcal{S}$ es un semigrupo,*

$$Sp(\mathcal{S}) := \{X \in \mathbb{B} :\ 0_X \in \mathcal{S}\}$$

es un ideal de espacios.

Los siguientes conceptos resultarán útiles para clasificar los semigrupos de operadores.

Definición 5.1.2. *Sea $\mathcal{S}$ un semigrupo de operadores.*

(i) *$\mathcal{S}$ se dice* left-stable *si $ST \in \mathcal{S}$ implica $T \in \mathcal{S}$;*

(ii) *$\mathcal{S}$ se dice* right-stable *si $TS \in \mathcal{S}$ implica $T \in \mathcal{S}$.*

Veamos como las propiedades del semigrupo $\mathcal{S}$ se transmiten a $\mathcal{S}^d$ y $\mathcal{S}^{co}$.

Proposición 5.1.2. *Sea $\mathcal{S}$ un semigrupo de operadores. Se verifica:*

(i) *si $\mathcal{S}$ es left-stable, $\mathcal{S}^d$ es right-stable y $\mathcal{S}^{co}$ es left stable;*

(ii) *si $\mathcal{S}$ es right-stable, $\mathcal{S}^d$ es left-stable y $\mathcal{S}^{co}$ es right-stable.*

Demostración. (i) Sean $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$ tales que $TS \in \mathcal{S}^d$. Entonces $(TS)^* = S^*T^* \in \mathcal{S}$, y como $\mathcal{S}$ es left-stable, $T^* \in \mathcal{S}$; luego $T \in \mathcal{S}^d$, y queda probado que $\mathcal{S}^d$ es right-stable.

De modo análogo podemos probar que $\mathcal{S}^{co}$ es left-stable.

(ii) Similar a la prueba de (i). □

Definición 5.1.3. *Sea $\mathcal{S}$ un semigrupo de operadores.*

(i) *$\mathcal{S}$ se dice* inyectivo *si contiene la clase Φ_+ de los operadores upper semi-Fredholm;*

(ii) *$\mathcal{S}$ se dice* suprayectivo *si contiene la clase Φ_- de los operadores lower semi-Fredholm.*

El siguiente ejercicio es una aplicación de las igualdades $\Phi_- = (\Phi_+)^d$ y $\Phi_+ = (\Phi_-)^d$.

Ejercicio 5.1.4. *Sea $\mathcal{S}$ un semigrupo. Se verifica:*

(i) *si $\mathcal{S}$ es inyectivo, $\mathcal{S}^d$ es suprayectivo y $\mathcal{S}^{co}$ es inyectivo;*

(ii) *si $\mathcal{S}$ es suprayectivo, $\mathcal{S}^d$ es inyectivo y $\mathcal{S}^{co}$ suprayectivo.*

Los semigrupos más interesantes verifican una de las propiedades introducidas a continuación.

Definición 5.1.4. *Sea $\mathcal{S}$ un semigrupo de operadores.*

(i) *$\mathcal{S}$ se dice* upper *si es inyectivo y left-stable;*

(ii) *$\mathcal{S}$ se dice* lower *si es suprayectivo y right-stable.*

No es difícil probar que un semigrupo inyectivo y right-stable es trivial. Lo mismo sucede con un semigrupo suprayectivo y left-stable.

Proposición 5.1.3. *Sea $\mathcal{S}$ un semigrupo de operadores. Se verifica:*

(i) *si $\mathcal{S}$ es upper, $\mathcal{S}^d$ es lower y $\mathcal{S}^{co}$ es upper;*

(ii) *si $\mathcal{S}$ es lower, $\mathcal{S}^d$ es upper y $\mathcal{S}^{co}$ es lower.*

5.2. Semigrupos asociados a un ideal

Comenzamos introduciendo un procedimiento que asocia a cada ideal de operadores $\mathcal{A}$ dos semigrupos $\mathcal{A}_+$ y $\mathcal{A}_-$.

Definición 5.2.1. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores. Definimos las clases de operadores $\mathcal{A}_+$ y $\mathcal{A}_-$ como sigue:*

(i) *un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ pertenece a $\mathcal{A}_+$ si para todo espacio de Banach W y todo operador $S \in \mathcal{L}(W,X)$, $TS \in \mathcal{A}(W,Y)$ implica $S \in \mathcal{A}(W,X)$. Resumidamente:*

$$\mathcal{A}_+ := \{T \in \mathcal{L} \colon S \in \mathcal{L} \text{ y } TS \in \mathcal{A} \Rightarrow S \in \mathcal{A}\}.$$

(ii) *un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ pertenece a $\mathcal{A}_-$ si para todo espacio de Banach Z y todo operador $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$, $ST \in \mathcal{A}$ implica $S \in \mathcal{A}$. Resumidamente:*

$$\mathcal{A}_- := \{T \in \mathcal{L} \colon S \in \mathcal{L} \text{ y } ST \in \mathcal{A} \Rightarrow S \in \mathcal{A}\}.$$

Proposición 5.2.1. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores. Se verifica:*

(i) las clases $\mathcal{A}_+$ y $\mathcal{A}_-$ son semigrupos de operadores.

(ii) $\mathcal{A}_+$ es left-stable y $\mathcal{A}_-$ es right-stable.

Demostración. (i) Es un ejercicio.

(ii) Para probar que $\mathcal{A}_+$ es left-stable, sean $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ operadores y supongamos que $ST \in \mathcal{A}_+$.

Sea $U \in \mathcal{L}(W,X)$ otro operador tal que $TU \in \mathcal{A}$. Se verifica $STU \in \mathcal{A}(W,Z)$ y, por la definición de $\mathcal{A}_+$, $U \in \mathcal{A}$, lo que prueba que $T \in \mathcal{A}_+$; por tanto $\mathcal{A}_+$ es left-stable.

De modo análogo se prueba que $\mathcal{A}_-$ es right-stable. □

Ejercicio 5.2.1. *Recordemos que $\mathcal{K}$ es el ideal de los operadores compactos y $\mathcal{W}$ el de los operadores débilmente compactos.*

Utilizando las caracterizaciones algebraicas de los semigrupos, comprobar que

(i) $\mathcal{K}_+ = \Phi_+$ *y* $\mathcal{K}_- = \Phi_-$*;*

(ii) $\mathcal{W}_+ = \mathcal{T}$ *y* $\mathcal{W}_- = \mathcal{T}^d$.

Observación 5.2.1. *Podemos reformular la Definición 2.1.3 diciendo que un ideal de operadores $\mathcal{A}$ es inyectivo si y solo si para todo subespacio cerrado M de un espacio de Banach, $J_M \in \mathcal{A}_+$.*

Análogamente, $\mathcal{A}$ es suprayectivo si y solo si para todo subespacio cerrado N de un espacio de Banach, $Q_N \in \mathcal{A}_-$.

La Observación 5.2.1 será crucial en la demostración del siguiente resultado.

Recordemos que, si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, denotamos por $\overline{T}\colon X \longrightarrow \overline{R(T)}$ el operador inducido por T.

Proposición 5.2.2. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores. Se verifica:*

(i) *$\mathcal{A}$ es inyectivo si y solo si $\mathcal{A}_+$ lo es;*

(ii) *$\mathcal{A}$ es suprayectivo si y solo si $\mathcal{A}_-$ lo es.*

Demostración. (i) Supongamos que $\mathcal{A}$ es inyectivo. Como un operador $T \in \Phi_+$ puede descomponerse como $T = J_{R(T)}\overline{T}$, donde $\overline{T} \in \Phi(X, R(T))$, concluimos que $T \in \mathcal{A}_+$.

Para la implicación inversa, basta tener en cuenta la Observación 5.2.1 y el hecho de que $J_M \in \Phi_+$ para todo subespacio cerrado M de un espacio de Banach.

La demostración es similar: si $T \in \Phi_-$, podemos escribir $T = \widetilde{T}Q_{N(T)}$ con $\widetilde{T} \in \Phi(X/N(T), Y)$. □

Observación 5.2.2. *Como ambos ideales de operadores $\mathcal{W}$ y $\mathcal{K}$ son inyectivos y suprayectivos, los semigrupos $\mathcal{W}_+$ y $\mathcal{K}_+$ son upper, mientras que los semigrupos $\mathcal{W}_-$ y $\mathcal{K}_-$ son lower.*

Similarmente, si $\mathcal{A}$ es uno de los ideales de operadores inyectivos $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{WC}$ ó $\mathcal{U}$, el semigrupo $\mathcal{A}_+$ es upper mientras que ${\mathcal{A}^d}_-$ es lower.

Observación 5.2.3. *Sea $\mathcal{RN}$ el ideal de los operadores de Radon-Nikodým, que se introduce en la Definición 6.3.6.*

Los semigrupos $\mathcal{RN}_+$ y ${\mathcal{RN}^d}_-$ fueron estudiados en [69] y en [37,38]. Se probó que ${\mathcal{RN}^d}_-$ admite una caracterización perturbativa similar a la presentada en el Teorema 4.2.3 para los operadores cotauberianos.

Operadores invertibles módulo un ideal

Veamos otro procedimiento para asociar dos semigrupos a cada ideal de operadores, investigado en [3]. El caso del ideal $\mathcal{W}$ fue considerado previamente en [78].

Definición 5.2.2. *Sean $\mathcal{A}$ un ideal de operadores y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

(i) *$T \in \mathcal{A}_l$ si existe $A \in \mathcal{L}(Y,X)$ de modo que $I_X - AT \in \mathcal{A}$;*

(ii) *$T \in \mathcal{A}_r$ si existe $B \in \mathcal{L}(Y,X)$ de modo que $I_Y - TB \in \mathcal{A}$.*

En otras palabras, $\mathcal{A}_l$ es la clase de los operadores invertibles a izquierda, módulo $\mathcal{A}$; y $\mathcal{A}_r$ es la clase de los operadores invertibles a derecha, módulo $\mathcal{A}$.

Proposición 5.2.3. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores. Se verifica:*

(i) *la clase $\mathcal{A}_l$ es un semigrupo de operadores left-stable contenido en $\mathcal{A}_+$;*

(ii) *la clase $\mathcal{A}_r$ es un semigrupo de operadores right-stable contenido en $\mathcal{A}_-$.*

Demostración. La prueba de que $\mathcal{A}_l$ es un semigrupo left-stable y $\mathcal{A}_r$ es un semigrupo right-stable queda como ejercicio.

Para probar las inclusiones, sean $T \in \mathcal{A}_l(X,Y)$ y $S \in \mathcal{L}(W,X)$, y supongamos que $TS \in \mathcal{A}(W,Y)$. Como existe $A \in \mathcal{L}(Y,X)$ de modo que $I_X - AT \in \mathcal{A}$, tenemos $S - ATS \in \mathcal{A}$; luego $S \in \mathcal{A}$, con lo que $T \in \mathcal{A}_+$ y queda probada la inclusión $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}_+$.

La prueba de la inclusión $\mathcal{A}_r \subset \mathcal{A}_-$ es similar. □

Observación 5.2.4. *El semigrupo $\mathcal{A}_l$ puede no ser inyectivo, aunque lo sea el ideal $\mathcal{A}$.*

En efecto, para todo subespacio cerrado M de un espacio de Banach, $J_M \in \mathcal{A}_+$. Sin embargo, $J_M \in \mathcal{K}_l$ si y solo si M es un subespacio complementado. Esto último se sigue de un resultado de Yood [79] que caracteriza los operadores en $\mathcal{K}_l$ como los operadores en Φ_+ con rango complementado.

Análogamente, el semigrupo $\mathcal{A}_r$ puede no ser suprayectivo aunque lo sea el ideal $\mathcal{A}$: $\mathcal{K}_r$ coincide con la clase de los operadores en Φ_- con núcleo complementado.

El siguiente resultado utiliza una construcción de Bourgain para probar que $\mathcal{W}_l$ es una subclase propia de $\mathcal{W}_+$.

Ejemplo 5.2.1. $\mathcal{W}_+(\ell_1) \not\subset \mathcal{W}_l(\ell_1)$.

Demostración. Sea $J\colon \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ un isomorfismo con rango no complementado (véase [15] para la existencia de J).

Tenemos $J \in \mathcal{K}_+(\ell_1) \setminus \mathcal{K}_l(\ell_1)$. Pero como las sucesiones débilmente convergentes en el espacio ℓ_1 son convergentes en norma, $\mathcal{K}(\ell_1) = \mathcal{W}(\ell_1)$. De aquí se siguen las igualdades $\mathcal{K}_+(\ell_1) = \mathcal{W}_+(\ell_1)$ y $\mathcal{K}_l(\ell_1) = \mathcal{W}_l(\ell_1)$. Por tanto, $J \in \mathcal{W}_+(\ell_1) \setminus \mathcal{W}_l(\ell_1)$. $\square$

Proposición 5.2.4. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores y sea $K \in \mathcal{A}(X,Y)$. Se verifica:*

(i) *si $T \in \mathcal{A}_l(X,Y)$, $T + K \in \mathcal{A}_l(X,Y)$;*

(ii) *si $S \in \mathcal{A}_r(X,Y)$, $S + K \in \mathcal{A}_r(X,Y)$.*

Demostración. Probaremos únicamente la parte (i). La prueba de (ii) es analoga.

Supongamos $T \in \mathcal{A}_l(X,Y)$ y seleccionemos $A \in \mathcal{L}(Y,X)$ de modo que $I_X - AT \in \mathcal{A}(X)$. Como $AK \in \mathcal{A}$, tenemos que

$$I_X - A(T+K) = I_X - AT - AK \in \mathcal{A}(X);$$

luego $T + K \in \mathcal{A}_l$. $\square$

Decimos que un semigrupo de operadores $\mathcal{S}$ es *abierto* si $\mathcal{S}(X,Y)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{L}(X,Y)$ para todo par de espacios de Banach X e Y.

Proposición 5.2.5. *Si $\mathcal{A}$ es un ideal de operadores, los semigrupos $\mathcal{A}_l$ y $\mathcal{A}_r$ son abiertos.*

Demostración. Supongamos $T \in \mathcal{A}_l(X,Y)$ y elijamos $A \in \mathcal{L}(Y,X)$ de modo que $I_X - AT \in \mathcal{A}(X)$. Para ver que el semigrupo $\mathcal{A}_l$ es abierto, basta probar que si $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\|S\| < \|A\|^{-1}$, tenemos $T+S \in \mathcal{A}_l$.

En efecto, como $\|AS\| < 1$, el operador $I_X + AS$ es invertible. Luego, por la Proposición 5.2.4, $A(T+S) = (I_X + AS) + K \in \mathcal{A}_l$.

Ahora, como $\mathcal{A}_l$ es left-stable, concluimos $T+S \in \mathcal{A}_l$.

Un argumento similar prueba que $\mathcal{A}_r$ es un semigrupo abierto. □

Observación 5.2.5. *Otro procedimiento general para definir semigrupos, utilizando clases de incomparabilidad de espacios de Banach, fue investigado en [4].*

Clases de perturbación

En el Capítulo 3 estudiamos las clases de peturbación para los operadores semi-Fredholm. Aquí las estudiaremos en el caso más general de los semigrupos de operadores.

Recordemos que si $\mathcal{S}$ es un semigrupo, su clase de perturbación $P\mathcal{S}$ queda determinada por sus componentes:

$$P\mathcal{S}(X,Y) := \{K \in \mathcal{L}(X,Y)\colon T+K \in \mathcal{S} \text{ para todo } T \in \mathcal{S}(X,Y)\},$$

donde X e Y son espacios de Banach para los que $\mathcal{S}(X,Y) \neq \emptyset$.

Obviamente, $P\mathcal{S}(X,Y)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(X,Y)$.

Observación 5.2.6. *Para todo semigrupo $\mathcal{S}$, las componentes $\mathcal{S}(X)$ son no vacías, porque la identidad I_X pertenece a $\mathcal{S}(X)$.*

No es difícil demostrar que $P\mathcal{S}(X)$ es un ideal bilátero del álgebra $\mathcal{L}(X)$ (véase [58]).

Los siguientes hechos muestran que no es útil definir $P\mathcal{S}(X,Y)$ como $\mathcal{L}(X,Y)$ cuando la componente $\mathcal{S}(X,Y)$ es el conjunto vacío:

(i) Los conjuntos $P\Phi_+(X,Y)$ y $P\Phi_-(X,Y)$ están siempre contenidos en $\mathcal{I}n(X,Y)$, los operadores inesenciales [58].

(ii) Para $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, $\Phi_+(L_p(0,1), \ell_p)$ y $\Phi_-(\ell_p, L_p(0,1))$ son vacíos porque $L_p(0,1)$ tiene subespacios complementados isomorfos a ℓ_2. Sin embargo, $\mathcal{I}n(L_p(0,1), \ell_p) \neq \mathcal{L}(L_p(0,1), \ell_p)$ porque el espacio $L_p(0,1)$ tiene subespacios complementados isomorfos a ℓ_p.

Observación 5.2.7. *No hay buenas caracterizaciones para las clases de perturbación de $\mathcal{A}_+$ y $\mathcal{A}_-$, ni siquiera en el caso $\mathcal{A} = \mathcal{K}$ [25], pero si las hay para algunas de sus componentes.*

Por ejemplo, cuando la clase $P\mathcal{W}_+(L_1(\mu), Y)$ está definida, coincide con $\mathcal{R}(L_1(\mu), Y)$, los operadores débilmente precompactos de $L_1(\mu)$ en el espacio Y.

Veamos que las clases de perturbación de $\mathcal{A}_l$ y $\mathcal{A}_r$ admiten una buena descripción.

Definición 5.2.3. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores. Su* radical *$\mathcal{A}^{rad}$ es la clase de operadores cuyas componentes son*

$$\mathcal{A}^{rad}(X,Y) := \{K \in \mathcal{L}(X,Y) \colon \forall\, S \in \mathcal{L}(Y,X),\ \exists U \in \mathcal{L}(X), \\ \text{de modo que } I_X - U(I_X - SK) \in \mathcal{A}\}.$$

Observación 5.2.8. *Para todo ideal de operadores $\mathcal{A}$, la clase $\mathcal{A}^{rad}$ es un ideal de operadores cerrado que contiene $\mathcal{A}$* [70].

Observación 5.2.9. *En la Definición 5.2.3, la expresión*

$$I_X - U(I_X - SK) \in \mathcal{A}$$

puede ser reemplazada por $\quad I_X - (I_X - SK)U \in \mathcal{A}$.

Demostración. Sea $K \in \mathcal{A}^{\mathrm{rad}}$ y denotemos $L_1 := I_X - U(I_X - SK) \in \mathcal{A}$.

Como $I_X - L_1 = U(I_X - SK)$, tenemos $I_X - U \in \mathcal{A}^{\mathrm{rad}}$. Luego existe $W \in \mathcal{L}(X)$ de modo que $I_X - WU \in \mathcal{A}$, con lo que

$$\begin{aligned}(I_X - SK)U &= WU(I_X - SK)U - L_2 \\ &= W(I_X - L_1)U - L_2 = I_X - L_3,\end{aligned}$$

donde $L_2, L_3 \in \mathcal{A}$; por tanto $I_X - (I_X - SK)U \in \mathcal{A}$.

La demostración de la otra implicación es similar. □

Los semigrupos $\mathcal{A}_l$ y $\mathcal{A}_r$ permiten dar descripciones de $\mathcal{A}^{\mathrm{rad}}$ más simples que la propia Definición 5.2.3.

Proposición 5.2.6. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores. Para un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, son equivalentes:*

(a) $T \in \mathcal{A}^{\mathrm{rad}}(X,Y)$;

(b) *para todo* $S \in \mathcal{L}(Y,X)$, $I_X - ST \in \mathcal{A}_l(X)$;

(c) *para todo* $S \in \mathcal{L}(Y,X)$, $I_Y - TS \in \mathcal{A}_l(Y)$;

(d) *para todo* $S \in \mathcal{L}(Y,X)$, $I_X - ST \in \mathcal{A}_r(X)$;

(e) *para todo* $S \in \mathcal{L}(Y,X)$, $I_X - TS \in \mathcal{A}_r(Y)$.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b) Supongamos $T \in \mathcal{A}^{\mathrm{rad}}(X,Y)$. Si $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ seleccionamos $U \in \mathcal{L}(X)$ tal que $K_1 := I_X - U(I_X - ST) \in \mathcal{A}$.

Como $U(I_X - ST) = I_X - K_1 \in \mathcal{A}_l$ y el semigrupo $\mathcal{A}_l$ es left-stable, concluimos $I_X - ST \in \mathcal{A}_l$.

(a)$\Leftarrow$(b) Si $I_X - ST \in \mathcal{A}_l$ para todo $S \in \mathcal{L}(Y,X)$, cualquier inverso a izquierdas módulo $\mathcal{A}$ de $I_X - ST$ puede jugar el papel de U en la Definición 5.2.3.

La demostración de (a)$\Leftrightarrow$(d) es similar, teniendo en cuenta la Observación 5.2.9.

Las equivalencias (b)$\Leftrightarrow$(c) y (d)$\Leftrightarrow$(e) pueden probarse utilizando el siguiente argumento: si $U \in \mathcal{L}(X)$ es inverso a izquierdas (respectivamente, a derechas) de $I_X - ST$ módulo $\mathcal{A}$, es fácil comprobar que el operador $I_Y + TUS$ es un inverso a izquierdas (respectivamente, a derechas) de $I_Y - TS$ módulo $\mathcal{A}$. $\square$

Veamos como el concepto de radical nos permite describir las clases de perturbación de los semigrupos $\mathcal{A}_l$ y $\mathcal{A}_r$.

Teorema 5.2.1. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores. Denotemos por $\mathcal{S}$ uno de los semigrupos $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_r$ o $\mathcal{A}_l \cap \mathcal{A}_r$ y supongamos que $\mathcal{S}(X,Y)$ es no vacío. Se verifica $P\mathcal{S}(X,Y) = \mathcal{A}^{rad}(X,Y)$.*

Demostración. Haremos la demostración en el caso $\mathcal{S} = \mathcal{A}_l$. La de los otros casos es similar.

Supongamos que $K \in \mathcal{A}^{\mathrm{rad}}(X,Y)$ y $T \in \mathcal{A}_l(X,Y)$. Seleccionemos $A \in \mathcal{L}(Y,X)$ tal que

$$D_1 := I_X - AT \in \mathcal{A}(X).$$

Para el operador $-A \in \mathcal{L}(Y,X)$, la definición de $\mathcal{A}^{\mathrm{rad}}$ proporciona otro operador $U \in \mathcal{L}(X)$ de modo que $D_2 := I_X - U(I_X + AK) \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A} \subset P\mathcal{A}_l$, tenemos que

$$UA(T+K) = U(I_X - D_1 + AK) = I_X - D_2 - UD_1 \in \mathcal{A}_l.$$

Luego $T + K \in \mathcal{A}_l$, y queda probado que $\mathcal{A}^{\mathrm{rad}}(X,Y) \subset P\mathcal{A}_l(X,Y)$.

Para probar la inclusión inversa, primero mostraremos que

$$K \in P\mathcal{A}_l(X,Y) \;\text{ y }\; A \in \mathcal{L}(Y) \Rightarrow AK \in P\mathcal{A}_l(X,Y). \tag{5.1}$$

En efecto, como $A \in \mathcal{L}(Y)$ puede escribirse como suma de dos operadores invertibles, basta hacer la prueba en el caso en que A es invertible. En ese caso, $A^{-1}U \in \mathcal{A}_l$ para todo $U \in \mathcal{A}_l(X,Y)$. Luego

$$U + AK = A(A^{-1}U + K) \in \mathcal{A}_l,$$

y concluimos que $AK \in P\mathcal{A}_l$.

Sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ y supongamos que $K \notin \mathcal{A}^{\mathrm{rad}}$. Por la Proposición 5.2.6, existe $A \in \mathcal{L}(Y,X)$ tal que $I_X - AK \notin \mathcal{A}_l(X)$.

Sea $U \in \mathcal{A}_l(X,Y)$. Se verifica

$$U(I_X - AK) = U - UAK \notin \mathcal{A}_l(X,Y);$$

luego $UAK \notin P\mathcal{A}_l$, y la Ecuación (5.1) implica $K \notin P\mathcal{A}_l(X)$. □

Observación 5.2.10. *Como $\Phi = \mathcal{K}_l \cap \mathcal{K}_r$, se sigue del Teorema 5.2.1 que el radical $\mathcal{K}^{rad}$ del ideal de los operadores compactos coincide con la clase $\mathcal{I}n$ de los operadores inesenciales. En particular, éste es un modo de probar que el ideal $\mathcal{I}n$ es cerrado.*

5.3. Semigrupos asociados a $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{WC}$ y $\mathcal{U}$

Inspirados por los resultados sobre operadores semi-Fredholm y tauberianos, varios autores (véase [14], [33], [39], [40], [41], [49] [62]) estudiaron algunas clases de operadores similares que admiten caracterizaciones en términos de sucesiones.

Para cada uno de los ideales de operadores $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{WC}$ y $\mathcal{U}$, se introdujeron dos clases, una con propiedades similares a $\mathcal{T}$ y otra con propiedades similares a $\mathcal{T}^d$. Más tarde se comprobó que eran casos particulares de semigrupos asociados a ideales de operadores.

En esta sección presentaremos las clases asociadas a estos ideales mediante la definición original, pero utilizando notaciones que son compatibles con las que les corresponde como semigrupos asociados a ideales de operadores.

Estos semigrupos admiten caracterizaciones algebraicas y perturbativas similares a las de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}^d$.

Recordemos que $\mathcal{T} = \mathcal{W}_+$. Comenzamos con las clases similares a la de los operadores tauberianos.

Definición 5.3.1. *Las clases $\mathcal{R}_+, \mathcal{C}_+, \mathcal{WC}_+$ y $\mathcal{U}_+$ se definen del modo siguiente. Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

(i) $T \in \mathcal{R}_+$ si una sucesión acotada (x_n) en X tiene una subsucesión débilmente de Cauchy, cuando (Tx_n) es débilmente de Cauchy en el espacio Y;

(ii) $T \in \mathcal{C}_+$ si una sucesión débilmente de Cauchy (x_n) en X es convergente, cuando (Tx_n) es convergente en Y;

(iii) $T \in \mathcal{WC}_+$ si una sucesión débilmente de Cauchy (x_n) en X es débilmente convergente, cuando (Tx_n) es débilmente convergente en Y;

(iv) $T \in \mathcal{U}_+$ si una serie w.u.C. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en X es incondicionalmente convergente, cuando $\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$ es incondicionalmente convergente en Y.

En la Proposición 5.3.4 comprobaremos que las clases introducidas en la Definición 5.3.1 coinciden con las clases $\mathcal{A}_+$ asociadas en la Definición 5.2.1 a los ideales de operadores $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{WC}$ y $\mathcal{U}$.

Introducimos clases similares a la de los operadores cotauberianos por dualidad: Si $\mathcal{A}$ es una de las clases $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{WC}$ ó $\mathcal{U}$, consideraremos la clase

$$\mathcal{A}_+{}^d := \{T \in \mathcal{L} : \ T^* \in \mathcal{A}_+\}.$$

Las siguientes dos proposiciones incluyen las propiedades básicas de las clases $\mathcal{A}_+$ y $\mathcal{A}_+{}^d$ que acabamos de introducir. Su demostración es un ejercicio.

Proposición 5.3.1. *Sea $\mathcal{A}$ uno de los ideales de operadores $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{WC}$ ó $\mathcal{U}$ y sean operadores $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

(i) $S, T \in \mathcal{A}_+ \Rightarrow ST \in \mathcal{A}_+$.

(ii) $ST \in \mathcal{A}_+ \Rightarrow T \in \mathcal{A}_+$.

(iii) $S, T \in \mathcal{A}_+{}^d \Rightarrow ST \in \mathcal{A}_+{}^d$.

(iv) $ST \in \mathcal{A}_+{}^d \Rightarrow S \in \mathcal{A}_+{}^d$.

Proposición 5.3.2. *Sea $\mathcal{A}$ uno de los ideales de operadores $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{WC}$ ó $\mathcal{U}$ y sean operadores $T, K \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

(i) $T \in \mathcal{A}_+ \Rightarrow N(T) \in Sp(\mathcal{A})$.

(ii) $T \in \mathcal{A}_+, K \in \mathcal{A} \Rightarrow T + K \in \mathcal{A}_+$.

(iii) $T \in \mathcal{A}_+{}^d \Rightarrow Y/\overline{R(T)} \in Sp(\mathcal{A})^d$.

(iv) $T \in \mathcal{A}_+{}^d, K \in \mathcal{A}^d \Rightarrow T + K \in \mathcal{A}_+{}^d$.

Los operadores en $\mathcal{A}_+$ ó $\mathcal{A}_+{}^d$ con rango cerrado admiten la siguiente caracterización, que debe compararse con la parte (ii) del Teorema 4.1.1 y la Proposición 4.2.3.

Proposición 5.3.3. *Sea $\mathcal{A}$ uno de los ideales de operadores $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{WC}$ ó $\mathcal{U}$ y sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operador con rango cerrado. Se verifica:*

(i) $T \in \mathcal{A}_+$ *si y solo si* $N(T) \in Sp(\mathcal{A})$.

(ii) $T \in \mathcal{A}_+{}^d$ *si y solo si* $Y/R(T) \in Sp(\mathcal{A})^d$.

Demostración. Una de las direcciones de ambas implicaciones fue probada en la Proposición 5.3.2. Queda probar la otra.

(i) Suponemos $R(T)$ cerrado y $N(T) \in Sp(\mathcal{A})$.

Caso $\mathcal{A} = \mathcal{R}$: Supongamos que $T \notin \mathcal{R}_+$. Entonces existe una sucesión acotada sin subsucesiones débilmente de Cauchy (x_n) en X tal que (Tx_n) es débilmente de Cauchy. Por el Teorema de Rosenthal, podemos suponer que (x_n) es equivalente a la base (e_n) de ℓ_1.

Nótese que $(Tx_{2n} - Tx_{2n-1})$ converge débilmente a 0; luego podemos encontrar una sucesión (y_n) formada por combinaciones convexas sucesivas de $(x_{2n} - x_{2n-1})$ tal que $T(y_n)$ converge a 0. Es fácil ver que (y_n) es equivalente a la base (e_n) de ℓ_1.

Como $R(T)$ es cerrado, existe $C > 0$ tal que

$$\|Tx\| \geq C \operatorname{dist}\big(x, N(T)\big)$$

para todo $x \in X$; por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}\big(y_n, N(T)\big) = 0.$$

De aquí se sigue que $N(T)$ contiene una sucesión equivalente a la base (e_n) de ℓ_1; en contradicción con la hipótesis.

Caso $\mathcal{A} = \mathcal{C}$: Si (x_n) es una sucesión débilmente de Cauchy en X y (Tx_n) es convergente, como $R(T)$ es cerrado, (Tx_n) converge a Tx para algún $x \in X$. Como en el caso anterior, del hecho de que $(Tx_n - Tx)$ converge a 0 deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_n - x, N(T)) = 0.$$

Luego podemos encontrar una sucesión acotada (y_n) en $N(T)$ que verifica

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n - x\| = 0.$$

Como las sucesiones débilmente de Cauchy en $N(T)$ son convergentes, concluimos que (x_n) es convergente en X; luego $T \in \mathcal{C}_+$.

Caso $\mathcal{A} = \mathcal{WC}$: Supongamos que (x_n) es una sucesión débilmente de Cauchy en X tal que (Tx_n) es débilmente convergente. Como $R(T)$ es cerrado, (Tx_n) converge débilmente a Tx para algún $x \in X$.

Un argumento similar al del caso $\mathcal{A} = \mathcal{C}$ nos permite concluir que $T \in \mathcal{WC}_+$.

Caso $\mathcal{A} = \mathcal{U}$: Supongamos que $T \notin \mathcal{U}_+$. Luego podemos encontrar una serie w.u.C., no incondicionalmente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en X, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} Tz_n$ es incondicionalmente convergente.

Reordenando la serie, podemos suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no es convergente. Entonces podemos encontrar $1 \leq k_1 \leq m_1 < k_2 \leq m_2 < \cdots$ en $\mathbb{N}$, de modo que los vectores

$$y_n := x_{k_n} + x_{k_n+1} + \cdots + x_{m_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

verifican $\text{ínf}_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\| > 0$.

Nótese que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es una serie w.u.C. y que $\sum_{n=1}^{\infty} Ty_n$ es incondicionalmente convergente. Por el Corolario 1.2.1, (y_n) tiene una subsucesión básica (z_n) que, por la Proposición 1.2.2, es equivalente a la base (e_n) de c_0.

Como (Ty_n) converge a 0 y $R(T)$ es cerrado, $\text{dist}(y_n, N(T)) \to 0$. Luego concluimos que $N(T)$ contiene una sucesión equivalente a la base (e_n) de c_0, en contradicción con la hipótesis.

(ii) Como podemos identificar $\big(Y/\overline{R(T)}\big)^*$ con $N(T^*)$, se sigue de la parte (i) por dualidad. $\square$

Observación 5.3.1. *Sea $\mathcal{A}$ uno de los ideales de operadores $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{WC}$ ó $\mathcal{U}$. En todos los casos podemos encontrar ejemplos que muestran que, en general,*

$$T \in \mathcal{A}_+ \not\Rightarrow T^* \in {\mathcal{A}_+}^d.$$

En otras palabras, $T^{**} \in \mathcal{A}_+$ implica $T \in \mathcal{A}_+$, pero la implicación inversa no es válida.

En efecto, si $\mathcal{A}$ es uno de esos cuatro ideales de operadores, podemos encontra un espacio de Banach X con un subespacio cerrado E tal que $E \in Sp(\mathcal{A})$, pero $E^{**} \notin Sp(\mathcal{A})$. Luego, por la Proposición 5.3.3, el operador cociente $Q_E \colon X \longrightarrow X/E$ verifica $Q_E \in \mathcal{A}_+$, pero $Q_E^{**} \notin \mathcal{A}_+$.

Lo mismo sucedía con el semigrupo de los operadores tauberianos $\mathcal{W}_+$, pero en este caso el contraejemplo es más difícil de encontrar (véase el Teorema 4.2.2), porque $Sp(\mathcal{W})$ es la clase de los espacios reflexivos y si E es reflexivo, también lo es E^{**}.

Veamos que las clases $\mathcal{A}_+$ y ${\mathcal{A}_+}^d$ admiten una caracterización perturbativa.

Teorema 5.3.1. *Sea $\mathcal{A}$ uno de los ideales de operadores $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{WC}$ ó $\mathcal{U}$. Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, se verifica:*

(i) *$T \in \mathcal{A}_+$ si y solo si $N(T+K) \in Sp(\mathcal{A})$ para todo operador compacto $K \in \mathcal{L}(X,Y)$;*

(ii) *$T \in {\mathcal{A}_+}^d$ si y solo si $Y/\overline{R(T+K)} \in Sp(\mathcal{A})^d$ para todo operador compacto $K \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

Demostración. Como la clase de los operadores compactos está contenida en $\mathcal{A}$ y en $\mathcal{A}^d$ para los ideales de operadores $\mathcal{A}$ que consideramos, las implicaciones directas se siguen de la Proposición 5.3.2.

Para probar las implicaciones inversas en el caso (i), supongamos que $T \notin \mathcal{A}_+$. Para cada $\mathcal{A}$ probaremos que existen sucesiones acotadas (x_n) en X y (f_n) en X^* de modo que

1. $\langle f_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$;
2. $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \notin Sp(\mathcal{A})$;
3. (Tx_n) converge a un vector $y \in Y$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \, \|Tx_n - y\| < \infty$.

Entonces, la expresión

$$K(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle f_n, x\rangle (y - Tx_n); \quad x \in X$$

define un operador nuclear $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $(T+K)x_n = y$ para todo n. De aquí se sigue que $N(T+K)$ contiene un subespacio cerrado de codimensión 1 en $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$; luego $N(T+K) \notin Sp(\mathcal{A})$.

Caso $\mathcal{A} = \mathcal{R}$: Como $T \notin \mathcal{R}_+$, podemos encontrar una sucesión acotada sin subsucesiones débilmente de Cauchy (z_n) en X tal que (Tz_n) es débilmente de Cauchy. Por el Teorema de Rosenthal, podemos suponer que (x_n) es equivalente a la base (e_n) de ℓ_1.

Tomando $y_n := z_{2n} - z_{2n-1}$, la sucesión (y_n) es equivalente a la base (e_n) de ℓ_1 y (Ty_n) converge débilmente a 0. Como otras veces, podemos encontrar una sucesión (x_n) formada por conbinaciones convexas sucesivas de (y_n), de modo que (x_n) es equivalente a la base (e_n) de ℓ_1 y (Tx_n) converge a 0. Como (x_n) es una sucesión básica, la sucesión (f_n) existe. Luego (x_n) y (f_n) satisfacen las condiciones 1, 2 y 3. Pasando a una subsucesión si es necesario, también se satisface 4.

Caso $\mathcal{A} = \mathcal{C}$: Como $T \notin \mathcal{C}_+$, existe una sucesión débilmente de Cauchy, sin subsucesiones convergentes (z_n) en X tal que (Tz_n) converge a un vector $z \in Y$. Por el Criterio de Kadec-Pełczyński, pasando a una subsucesión podemos suponer que (z_n) es una sucesión básica. La demostración continúa de modo similar al caso $\mathcal{A} = \mathcal{R}$.

Caso $\mathcal{A} = \mathcal{WC}$: Como $T \notin \mathcal{WC}_+$, existe una sucesión débilmente de Cauchy, sin subsucesiones débilmente convergentes (z_n) en X tal que (Tz_n) converge débilmente a un vector $z \in Y$. La demostración continúa de modo similar al caso $\mathcal{A} = \mathcal{R}$.

Caso $\mathcal{A} = \mathcal{U}$: Como $T \notin \mathcal{U}_+$, procediendo como hicimos en el caso $\mathcal{A} = \mathcal{U}$ de la demostración de la Proposición 5.3.3, podemos encontrar una sucesión (x_n) en X equivalente a la base (e_n) de c_0 tal que $\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$ es incondicionalmente convergente. Nótese que (Tx_n) converge a 0. La demostración continúa de modo similar al caso $\mathcal{A} = \mathcal{R}$.

Para probar las implicaciones inversas en el caso (ii), supongamos que $T \notin {\mathcal{A}_+}^d$; luego $T^* \notin \mathcal{A}_+(Y^*, X^*)$.

Procediendo como en las correspondientes implicaciones de la parte (i), podemos encontrar sucesiones acotadas (g_n) en Y^* y (G_n) en Y^{**} verificando 1, 2, 3 y 4. En particular, (T^*g_n) converge a un vector $g \in Y^*$ y se verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|G_n\| \, \|T^*g_n - g\| < \infty.$$

Además, aplicando el Lema 4.2.1, podemos suponer $G_n = y_n \in Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$K(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle g - T^*g_n, x\rangle y_n \quad x \in X$$

define un operador nuclear $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $(T^* + K^*)g_n = g$ para todo n.

Entonces $N(T^* + K^*) \notin Sp(\mathcal{A})$; por tanto $Y/\overline{R(T + K)} \notin Sp(\mathcal{A})^d$. $\square$

A continuación, como aplicación del Teorema 5.3.1, presentaremos caracterizaciones algebraicas de las clases $\mathcal{A}_+$ y ${\mathcal{A}_+}^d$.

Proposición 5.3.4. *Sea $\mathcal{A}$ uno de los ideales de operadores $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{WC}$ ó $\mathcal{U}$. Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, se verifica:*

(i) *$T \in \mathcal{A}_+$ si y solo si, para todo espacio de Banach Z y todo $A \in \mathcal{L}(Z,X)$, $TA \in \mathcal{A}$ implica $A \in \mathcal{A}$.*

(ii) *$T \in {\mathcal{A}_+}^d$ si y solo si, para todo espacio de Banach Z y todo $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$, $BT \in \mathcal{A}^d$ implica $B \in \mathcal{A}^d$.*

Demostración. (i) La implicación directa es similar a la del resultados correspondiente para $\mathcal{W}_+$. Consiste en aprovechar las caracterizaciones sucesionales de las clases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_+$.

Para las implicaciones inversas, supongamos que $T \notin \mathcal{A}_+$. Por el Teorema 5.3.1, existe un operador compacto $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ de modo que $N(T+K) \notin Sp(\mathcal{A})$.

Tomando como operador A la inclusión de $N(T+K)$ en X, TA es compacto; luego $TA \in \mathcal{A}$; sin embargo $A \notin \mathcal{A}$.

(ii) La implicación directa se obtiene a partir de (i), por dualidad.

Por otro lado, si $T \notin {\mathcal{A}_+}^d$, el Teorema 5.3.1 implica la existencia de un operador compacto $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $Y/\overline{R(T+K)} \notin Sp(\mathcal{A})^d$.

Tomando como operador B la aplicación cociente del espacio Y sobre $Y/\overline{R(T+K)}$, se verifica que BT es compacto; luego $BT \in \mathcal{A}^d$; sin embargo $B \notin \mathcal{A}^d$. □

Observación 5.3.2. *Sea $\mathcal{A}$ uno de los ideales $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{WC}$ ó $\mathcal{U}$.*

(i) *La parte (i) de la Proposición 5.3.4 nos dice que la clase $\mathcal{A}_+$ introducida en esta sección coincide con la clase $\mathcal{A}_+$ asociada a $\mathcal{A}$ en la Definición 5.2.1.*

(ii) *La parte (ii) de la Proposición 5.3.4 nos dice que la clase ${\mathcal{A}_+}^d$ introducida en esta sección coincide con la clase ${\mathcal{A}^d}_-$ asociada a $\mathcal{A}^d$ en la Definición 5.2.1.*

Otros resultados sobre semigrupos de operadores

En esta sección describiremos brevemente algunos resultados relacionados con semigrupos de operadores que no encajan en las secciones anteriores del capítulo.

Operadores fuertemente tauberianos. No es dificil comprobar que la clase de operadores $\mathcal{T}^s$, definida por

$$\mathcal{T}^s := \{T \in \mathcal{L} : \; T^{co} \text{ es un isomorfismo}\}$$

es un semigrupo de operadores.

Estos operadores fueron investigados en [72] por Rosenthal, que les denominó *strongly tauberian operators.*

No es difícil probar que

$$(\mathcal{T}^s)^d = \{T \in \mathcal{L} : \; T^{co} \text{ suprayectivo}\},$$

y que las componentes del semigrupo $\mathcal{T}^s(X,Y)$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{L}(X,Y)$.

Ultrapotencias de $\mathcal{R}_+$ y $\mathcal{U}_+$. En [34] se estudiaron las clases $(\mathcal{A}_+)^{up}$ y $(\mathcal{A}^d{}_-)^{up}$, con $\mathcal{A}$ uno de los ideales de operadores $\mathcal{R}$ ó $\mathcal{U}$.

Los ideales $\mathcal{R}^{up}$ y $\mathcal{U}^{up}$ son las versiones locales de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{U}$. En particular, $Sp(\mathcal{R}^{up})$ es la clase de los espacios de Banach en que ℓ_1 no es finitamente representable, y $Sp(\mathcal{U}^{up})$ es la clase de los espacios de Banach en que c_0 no es finitamente representable.

Se verifica $T \in (\mathcal{R}_+)^{up}$ si y solo si las ultrapotencias $T_{\mathfrak{U}}$ pertenecen a $\mathcal{R}_+$, y un resultado análogo para $(\mathcal{U}_+)^{up}$.

En general, se obtuvieron resultados similares a los presentados en la sección 4.4 para $(\mathcal{W}_+)^{up}$ y $(\mathcal{W}_-)^{up}$, incluyendo caracterizaciones algebraicas y perturbativas.

Representabilidad finita de operadores. En la Sección 1.3 introdujimos el concepto de representabilidad finita de un espacio de Banach en otro. Existen varios conceptos de representabilidad finita de un operador en otro, aunque todos ellos coinciden con la representabilidad finita de espacios al aplicarlos a identidades de espacios de Banach.

Uno de estos conceptos, denominado *local supportability*, tiene buenas propiedades para los semigrupos. Por ejemplo, en [64] se prueba que el operador residuo T^{co} es localmente soportable en T. Como consecuencia prueban el siguiente resultado:

Proposición 5.3.5. *Sea $\mathcal{S}$ un semigrupo que es upper o lower y verifica $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}^{up}$. Si un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ pertenece a $\mathcal{S}$, T^{**} y T^{co} también pertenecen.*

Además, en [65] se prueba que el operador $(T_{\mathfrak{U}})^*$ es localmente soportable en $(T^*)_{\mathfrak{U}}$.

Capítulo 6

Factorización de operadores

En este capítulo presentaremos una versión refinada de la factorización DFJP para operadores y algunas de sus variantes. Entre otras cosas, estos métodos de factorización permiten obtener ejemplos de operadores tauberianos y cotauberianos.

Además describiremos una factorización uniforme para subconjuntos compactos de operadores y estudiaremos clases de funciones holomorfas que pueden caracterizarse en términos de factorización a través de un operador perteneciente a un ideal de operadores.

6.1. La factorización DFJP

Davis, Figiel, Johnson y Pełczyński obtuvieron en [17] una factorización de operadores que se ha convertido en una herramienta fundamental en la teoría de espacios de Banach. A continuación enunciamos el resultado original.

Teorema 6.1.1 (factorización DFJP). *Para todo operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ existe un espacio de Banach F y operadores $A \in \mathcal{L}(X, F)$ y $j \in \mathcal{L}(F, Y)$ de modo que j es tauberiano y $T = jA$.*

La demostración puede encontrarse en [17, Lemma 1, Corollary 1] y en algunos textos como [19].

El siguiente resultado, obtenido en [24], proporciona una versión refinada de la factorización DFJP (véase la Observación 6.1.1) y tiene un buen comportamiento ante la dualidad.

Teorema 6.1.2 (descomposición tauberiana). *Para todo* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *existen espacios de Banach* E *y* F*, y operadores* $k \in \mathcal{L}(X,E)$*,* $U \in \mathcal{L}(E,F)$ *y* $j \in \mathcal{L}(F,Y)$ *de modo que* k *es cotauberiano con rango denso,* j *es tauberiano e inyectivo,* U *es un isomorfismo biyectivo y* $T = jUk$*.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "k"'] & Y \\ E \arrow[r, "U"'] & F \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Para construir los espacios E y F, consideramos dos sucesiones de normas $(p_T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X y $(q_T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y que son equivalentes a la norma inicial en cada espacio:

$$p_T^n(x) := 2^n\|Tx\| + 2^{-n}\|x\|; \quad x \in X;$$

$$q_T^n(y) := \text{ínf}\left\{s > 0 : y \in s\left(2^n T(B_X) + 2^{-n}B_Y\right)\right\}; \quad y \in Y.$$

Claramente $2^{-n}\|x\| \leq p_T^n(x) \leq (2^n\|T\| + 1)\|x\|$ para todo $x \in X$.

Además, $(2^n\|T\| + 1)^{-1}\|y\| \leq q_T^n(y) \leq 2^n\|y\|$ para todo $y \in Y$.

Denotamos X_n al espacio X dotado de la norma $p_T^n(\cdot)$ e Y_n al espacio Y dotado de la norma $q_T^n(\cdot)$. Claramente

$$\ell_2(X_n) := \left\{(x_n) \subset X : \|(x_n)\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} p_T^n(x_n)^2\Big)^{1/2} < \infty\right\}$$

es un espacio de Banach.

De la misma forma podemos definir $\ell_2(Y_n)$.

Dividiremos la construcción de los espacios E y F y de los operadores j, U y k en varios pasos:

Paso 1: Para cada $(x_n) \in \ell_2(X_n)$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} Tx_k$ es absolutamente convergente en Y.

En efecto, de la definición de la norma en $\ell_2(X_n)$ se sigue que

$$\|Tx_k\| \leq 2^{-k}\|(x_n)\| \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N};$$

luego $\sum_{k=1}^{\infty} \|Tx_k\| < \infty$. Por tanto,

$$N_T := \Big\{(x_n) \in \ell_2(X_n) : \sum_{k=1}^{\infty} Tx_k = 0\Big\}$$

es un subespacio cerrado de $\ell_2(X_n)$.

Paso 2: Definimos el espacio E como el cociente $\ell_2(X_n)/N_T$ y el operador $k\colon X \longrightarrow E$ mediante

$$k(x) := (x, 0, 0, 0, \ldots) + N_T \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Claramente, $k \in \mathcal{L}(X, E)$. Además, en el Paso 7 mostraremos que k^* es inyectivo; luego k tiene rango denso.

Paso 3: Definimos el espacio F como el *subespacio diagonal*

$$\{(y_n) \in \ell_2(Y_n) : y_n = y_1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

de $\ell_2(Y_n)$ y el operador $j\colon F \longrightarrow Y$ mediante

$$j(y, y, y, \ldots) := y \qquad \text{para todo } (y, y, y, \ldots) \in F.$$

Obviamente, $j \in \mathcal{L}(F, Y)$ y es inyectivo.

La parte técnicamente más complicada de la demostración está en el siguiente paso.

Paso 4: La aplicación $U\colon E \longrightarrow F$ definida mediante

$$U((x_n) + N_T) := \Big(\sum_{k=1}^{\infty} Tx_k, \sum_{k=1}^{\infty} Tx_k, \sum_{k=1}^{\infty} Tx_k, \ldots\Big); \quad (x_n) \in \ell_2(X_n)$$

es un isomorfismo biyectivo de E en F.

Veamos primero que U está bien definido. Si $(x_n) \in \ell_2(X_n)$, para cada $m \in \mathbb{N}$ denotamos

$$c_m := \Big\|2^{-m} \sum_{k=1}^{m} x_k\Big\| \quad \text{y} \quad d_m := \Big\|2^{m} \sum_{k=m+1}^{\infty} Tx_k\Big\|.$$

Reescribiendo c_m en la forma $c_m = \| \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-k} 2^{-(m-k)} x_{m-k}\|$, obtenemos

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\Big)^{1/2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|2^{-n} x_n\|^2\Big)^{1/2} \leq 2\|(x_n)\|.$$

Además, reescribiendo d_m en la forma $d_m = \| \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} 2^{m+k} T x_{m+k} \|$, obtenemos

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \Big)^{1/2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \| 2^n T x_n \|^2 \Big)^{1/2} \leq \| (x_n) \|.$$

Observemos que $\sum_{k=1}^{m} x_k \in 2^m c_m B_X$; luego $\sum_{k=1}^{m} T x_k \in 2^m c_m T(B_X)$, y similarmente, $\sum_{k=m+1}^{\infty} T x_k \in 2^{-m} d_m B_Y$. Por tanto

$$q_T^m \Big(\sum_{n=1}^{\infty} T x_n \Big) \leq \text{máx}\{c_m, d_m\} \quad \text{para todo } m;$$

luego

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} q_T^m \Big(\sum_{n=1}^{\infty} T x_n \Big)^2 \Big)^{1/2} \leq 2 \| (x_n) \|,$$

y concluimos que $U \in \mathcal{L}(E, F)$ con $\|U\| \leq 2$.

Claramente U es inyectivo. Queda probar que es suprayectivo.

Sea $(y, y, y, \ldots) \in F$. Para todo $\varepsilon > 0$ tenemos

$$y \in (1 + \varepsilon) q_T^n(y) \left(2^n T(B_X) + 2^{-n} B_Y \right).$$

Luego podemos escribir $y = T u_n + v_n$ con $\|u_n\| \leq 2^n (1 + \varepsilon) q_T^n(y)$ y $\|v_n\| \leq 2^{-n} (1 + \varepsilon) q_T^n(y)$.

Como $q_T^n(y) \underset{n}{\longrightarrow} 0$, la sucesión $(T u_n)$ converge a y. Tomemos $x_1 := u_1$ y $x_n := u_n - u_{n-1}$ para $n > 1$. Obviamente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} T x_n$ converge a y.

Nótese que $2^{-n} \|x_n\| \leq 2(1 + \varepsilon) q_T^n(y)$ y, para todo $n > 1$,

$$2^n \| T x_n \| \leq 2^n \| v_{n-1} - v_n \| \leq 3(1 + \varepsilon) q_T^n(y).$$

Por ello,

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} p_T^n(x_n)^2 \Big)^{1/2} \leq 4(1 + \varepsilon) \Big(\sum_{n=1}^{\infty} q_T^n(y)^2 \Big)^{1/2};$$

luego $(x_n) \in \ell_2(X_n)$ y $U\big((x_n) + N_T\big) = (y, y, y, \ldots)$. Concluimos que U es biyectivo y continuo; luego es un isomorfismo por el teorema de la aplicación abierta.

Paso 5: El operador j es tauberiano y $T = jUk$.

La igualdad $T = jUk$ es consecuencia inmediata de las definiciones. Para ver que j es tauberiano, notemos que podemos identificar $\ell_2(Y_n)^{**}$ con $\ell_2(Y_n^{**})$ y F^{**} con el subespacio diagonal

$$\{(\omega_n) \in \ell_2(Y_n^{**}) : \omega_n = \omega_1 \text{ for all } n\}$$

de $\ell_2(Y_n^{**})$. Con estas identificaciones, j^{**} viene dado por

$$j^{**}(\omega, \omega, \omega, \ldots) := \omega, \qquad \text{para todo } (\omega, \omega, \omega, \ldots) \in F^{**},$$

de donde resulta evidente que j es un operador tauberiano.

Queda probar que k es cotauberiano. Para hacerlo, necesitamos una descripción de los espacios duales de X_n e Y_n.

Consideramos las sucesiones de normas $(p_{T^*}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y^* y $(q_{T^*}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X^* asociadas al operador conjugado $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$:

$$p_{T^*}^n(g) := 2^n\|T^*g\| + 2^{-n}\|g\| \quad g \in Y^*;$$

$$q_{T^*}^n(f) := \text{ínf}\left\{s > 0 : f \in s\left(2^nT^*(B_{Y^*}) + 2^{-n}B_{X^*}\right)\right\} \quad f \in X^*.$$

Paso 6: Podemos identificar isométricamente X_n^* con $(X^*, q_{T^*}^n(\cdot))$ e Y_n^* con $(Y^*, p_{T^*}^n(\cdot))$.

En efecto, denotemos por Z el espacio producto $X \times Y$ con la norma $\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$ y consideremos el operador auxiliar $S \in \mathcal{L}(X, Z)$ definido por $Sx := (2^{-n}x, 2^nTx)$.

El operador conjugado $S^* \in \mathcal{L}(Z^*, X^*)$ viene dado por

$$S^*(f, g) = 2^{-n}f + 2^nT^*g \quad (f, g) \in X^* \times Y^*.$$

Además, observemos que la bola unidad de X_n coincide con $S^{-1}(B_Z)$; luego la bola unidad de X_n^* es

$$\begin{aligned}\{f \in X^* : |f(x)| \leq 1, \forall\, x \in S^{-1}(B_Z)\} &= S^*(B_{Z^*}) \\ &= 2^nT^*(B_{Y^*}) + 2^{-n}B_{X^*},\end{aligned}$$

que es la bola unidad de $(X^*, q_{T^*}^n(\cdot))$; luego $X_n^* \equiv (X^*, q_{T^*}^n(\cdot))$.

La identificación $Y_n^* \equiv (Y^*, p_{T^*}^n(\cdot))$ se puede comprobar de manera análoga.

Paso 7: El operador k es cotauberiano.

Nótese que podemos identificar E^* con

$$\{(f_n) \in \ell_2(X_n^*) : f_n = f_1 \text{ para todo } n\},$$

el subespacio diagonal de $\ell_2(X_n^*)$. Veamos que, con esta identificación, el operador k^* viene dado por

$$k^*(f, f, f, \ldots) := f; \quad (f, f, f, \ldots) \in X^*.$$

En efecto, como $E = \ell_2(X_n)/N_T$, podemos identificar su dual E^* con el anulador $N_T^\perp$ en $\ell_2(X_n^*)$, y no es difícil comprobar que este anulador coincide con el subespacio diagonal de $\ell_2(X_n^*)$.

Nótese que el operador k^* tiene la misma forma que el operador j. Luego el mismo argumento que muestra que j es tauberiano sirve para probar que k^* es tauberiano; luego k cotauberiano. $\square$

A continuación veremos que el Teorema 6.1.2 y las propiedades básicas de los operadores tauberianos y cotauberianos permiten dar una prueba breve del principal resultado de [17].

Corolario 6.1.1. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es débilmente compacto si y sólo si factoriza a través de un espacio de Banach reflexivo.*

Demostración. Supongamos que T es débilmente compacto ($T \in \mathcal{W}$). Sea $T = jUk$ la descomposición tauberiana obtenida en el Teorema 6.1.2. Como j es tauberiano, k es cotauberiano y U es un isomorfismo, obtenemos las siguientes implicaciones:

$$jUk \in \mathcal{W} \Rightarrow Uk \in \mathcal{W} \Rightarrow U \in \mathcal{W} \Rightarrow \ E \text{ y } F \text{ reflexivos.}$$

La implicación inversa es trivial. $\square$

Observación 6.1.1. *Si $T = jUk$ es la descomposición tauberiana del operador T, $A = Uk$ y j proporcionan la factorización DFJP de T obtenida en el Teorema 6.1.1.*

Algunas versiones de la construcción de la factorización DFJP parten de un subconjunto absolutamente convexo y acotado K en un espacio de Banach Y.

Denotando $q_n(\cdot)$ el calibre del conjunto $2^nK + 2^{-n}B_Y$; es decir,

$$q_n(y) := \text{ínf}\{t > 0\colon\ y \in t(2^nK + 2^{-n}B_Y)\},$$

obtienen una norma equivalente en Y para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, denotando $Y_n := (Y, q_n(\cdot))$, definen un espacio de Banach E_K mediante

$$E_K := \Big\{ y \in Y\colon\ \sum_{n=1}^{\infty} q_n(y)^2 < \infty \Big\}.$$

Argumentos similares a los de la demostración del Teorema 6.1.2 prueban que la inclusión de E_K en Y es un operador tauberiano.

No es difícil ver que podemos identificar E_K con el subespacio diagonal de $\ell_2(Y_n)$, y así obtener esta construcción como caso particular de la del Teorema 6.1.1.

En efecto, tomando una familia $\{y_i\colon\ i \in I\}$ que sea un subconjunto denso de K, la expresión

$$T_K(a_i)_{i\in I} := \sum_{i\in I} a_i y_i$$

define un operador $T_K\colon \ell_1(I) \longrightarrow Y$ tal que $\overline{T_K(B_{\ell_1(I)})} = \overline{K}$, y el espacio E_K y la inclusión tauberiana de E_K en Y coinciden con el espacio intermedio y el factor tauberiano de la factorización DFJP de T_K.

Observación 6.1.2. *La descomposición tauberiana de $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ proporciona ejemplos no triviales de operadores tauberianos y cotauberianos. Nótese que j y k tienen rango cerrado si y solo si lo tiene T.*

Veamos que la descomposición tauberiana de un operador tiene un buen comportamiento ante dualidad. Este hecho tiene gran interés en las aplicaciones.

Teorema 6.1.3. *Sea $T = jUk$ la descomposición tauberiana del operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

(i) *La descomposición $T^* = k^*U^*j^*$ es equivalente a la descomposición tauberiana de T^*.*

(ii) *La descomposición $T^{co} = j^{co}U^{co}k^{co}$ es equivalente a la descomposición tauberiana de T^{co}.*

Demostración. Daremos solo el esquema de la demostración, dejando los detalles para el lector.

(i) Vimos en la demostración del Teorema 6.1.2 (Paso 7) que k^* puede ser identificado con el operador j en la descomposición tauberiana de T^*. Los argumentos para las otras dos identificaciones son similares.

(ii) Observemos además que podemos identificar el espacio cociente $\ell_2(X_n)^{**}/\ell_2(X_n)$ con el espacio $\ell_2(X_n^{**}/X_n)$.

En efecto, la aplicación

$$(\alpha_n) + \ell_2(X_n) \in \ell_2(X_n)^{**}/\ell_2(X_n) \longrightarrow (\alpha_n + X_n) \in \ell_2(X_n^{**}/X_n)$$

es un operador isométrico y biyectivo.

Por otro lado, si F es el subespacio diagonal de $\ell_2(Y_n)$, su segundo dual F^{**} puede identificarse con $F^{\perp\perp}$, y no es difícil comprobar que éste último coincide con el subespacio diagonal de $\ell_2(Y_n^{**})$.

De modo análogo, F^{**}/F puede ser identificado con el subespacio diagonal de $\ell_2(X_n^{**}/X_n)$.

Estos y otros argumentos similares permiten identificar la descomposición $T^{co} = j^{co}U^{co}k^{co}$ con la descomposición tauberiana de T^{co}. $\square$

Veremos más adelante que, como consecuencia del Teorema 6.1.3, podemos probar resultados de factorización para operadores que pertenecen a ciertos ideales.

Veamos otras consecuencias del Teorema 6.1.3.

Corolario 6.1.2. *Sea $T = jUk$ la descomposición tauberiana de T y sea $n \in \mathbb{N}$.*

(i) *Los sucesivos operadores conjugados $j^{*(2n)}$ y $k^{*(2n-1)}$ son tauberianos.*

(ii) *Los sucesivos operadores conjugados $j^{*(2n-1)}$ y $k^{*(2n)}$ son cotauberianos.*

Demostración. Basta aplicar repetidamente la primera parte del Teorema 6.1.3. $\square$

El siguiente teorema mostrará que, en la mayoría de los casos, los espacios intermedios en la factorización DFJP de un operador contienen subespacios isomorfos a ℓ_2. Para probarlo, necesitaremos el siguiente resultado auxiliar.

Lema 6.1.1. *Sea* (X_k) *una sucesión de espacios de Banach y sea* M *un subespacio cerrado de dimensión infinita de* $\ell_2(X_k)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, *denotemos por* $P_n\colon \ell_2(X_k) \longrightarrow \ell_2(X_k)$ *la proyección definida por* $P_n(x_i) := (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$.

Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ *y para todo* $\varepsilon > 0$, *existe un vector* $x \in M$ *con* $\|x\| = 1$ *y* $\|P_n x\| < \varepsilon$. *Entonces* M *contiene un subespacio isomorfo a* ℓ_2.

Demostración. Es un argumento de tipo joroba deslizante. Nótese que, para todo $x \in \ell_2(X_k)$, la sucesión $(P_n x)$ converge a x.

Comenzamos eligiendo un vector $x_1 \in M$ con $\|x_1\| = 1$. A continuación, seleccionamos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|P_{n_1} x_1\| > 1 - 2^{-2}$.

Seguidamente, elegimos $x_2 \in M$ tal que $\|x_2\| = 1$ y $\|P_{n_1} x_2\| < 2^{-2}$, y a continuación seleccionamos $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|P_{n_2} x_2\| > 1 - 2^{-4}$. Nótese que $n_2 > n_1$.

Continuando el proceso indefinidamente, obtenemos una sucesión normalizada (x_k) en M y una sucesión estrictamente creciente (n_k) en $\mathbb{N}$ de modo que, para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $i < k$,

$$\|P_{n_k} x_k\| > 1 - 2^{-2k} \quad \text{y} \quad \|P_{n_i} x_k\| < 2^{-2k}.$$

No es difícil comprobar que la sucesión (x_k) es equivalente a la base (e_n) en ℓ_2; luego $\overline{\operatorname{span}}\{x_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ es un subespacio cerrado de M isomorfo a ℓ_2. $\square$

Teorema 6.1.4. *Sea* $j\colon F \longrightarrow Y$ *el factor tauberiano en la descomposición tauberiana de* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *y sea* M *un subespacio cerrado de dimensión infinita de* F.

Si la restricción $j|_M$ *no es un isomorfismo,* M *contiene un subespacio isomorfo a* ℓ_2.

Demostración. En la construcción de la descomposición tauberiana de T vimos que el espacio F es el subespacio diagonal de $\ell_2(Y_n)$, donde $Y_n = (Y, q_T^n(\cdot))$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Como $j|_M$ no es un isomorfismo, podemos encontrar un vector $y \in M$ tal que $\|y\| = 1$ y $\|j(y)\| \leq \varepsilon/2^n$.

Vimos que $q_T^k(y) \leq 2^k \|j(y)\|$ para todo $y \in F$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\|P_n y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} q_T^k(y)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^2/2^{2(n-k)} < \varepsilon^2.$$

Entonces, aplicando el Lema 6.1.1, deducimos que M contiene un subespacio isomorfo a ℓ_2. $\square$

Veamos algunas consecuencias de este teorema. Recordemos que un espacio de Banach X se dice *hereditariamente* ℓ_2 si cada subespacio de dimensión infinita de X contiene un subespacio isomorfo a ℓ_2.

Corolario 6.1.3. *Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es un operador compacto, el espacio F en la descomposición tauberiana de T es hereditariamente ℓ_2.*

Demostración. Como T es compacto, el factor tauberiano $j\colon F \longrightarrow Y$ en la descomposición tauberiana de T es también compacto (Proposición 6.3.2); luego T no es un isomorfismo en ningún subespacio de dimensión infinita, por lo que basta aplicar el Teorema 6.1.4 para obtener el resultado buscado. $\square$

6.2. Versiones de la factorización DFJP

La factorización DFJP, obtenida en [17], ha encontrado muchas aplicaciones. Por ello, muchos autores han desarrollado versiones modificadas con el fin de lograr ciertos objetivos, como que el espacio intermedio sea un retículo o un álgebra de Banach, o que los factores verifiquen condiciones adicionales. En esta sección describiremos algunas de estas versiones.

Una versión isométrica

Lima, Nygaard y Oja [59] obtuvieron una versión isométrica de la factorización DFJP y la aplicaron a obtener caracterizaciones de la propiedad de aproximación (véase Sección 7.3). A continuación describiremos brevemente su construcción.

Fijemos un número $a > 1$ y un subconjunto cerrado y absolutamente convexo K de la bola unidad B_Y de un espacio de Banach Y. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $\|\cdot\|_n$ el calibre del conjunto

$$B_n := a^{n/2}K + a^{-n/2}B_Y.$$

Claramente $\|\cdot\|_n$ es una norma en Y equivalente a la norma original. Definimos

$$\|y\|_K := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|y\|_n^2\right)^{1/2}.$$

Sea $F_K := \{y \in Y\colon \|y\|_K < \infty\}$, $J_K\colon F_K \longrightarrow Y$ el operador natural de inclusión y $C_K := \{y \in Y\colon \|y\|_K \leq 1\}$.

El siguiente resultado no es difícil de probar, una vez que se tiene familiaridad con la factorización DFJP.

Lema 6.2.1. *Sean Y, K y $a > 1$ como acabamos de indicar. Se verifica:*

(i) *F_K es un espacio de Banach;*

(ii) *$K \subset f(a)C_K$.*

Observación 6.2.1. *Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, tomando $a = 4$ y $K = \overline{T(B_X)}$ en la construcción anterior, J_K y F_K son el operador tauberiano y el espacio intermedio en la factorización DFJP de T.*

Para introducir el aspecto isométrico de esta versión, consideramos la función $f\colon (1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(a) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(a^n+1)^2}\right)^{1/2}.$$

Observación 6.2.2. *No es difícil comprobar que existe $\tilde{a} > 1$ tal que $f(\tilde{a}) = 1$. Una buena estimación de $\tilde{a}$ es $e^{4/9}$.*

Para este valor $\tilde{a}$, obtenemos $K \subset C_K \subset B_Y$.

Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ un operador no nulo, $K := \|T\|^{-1}\overline{T(B_X)}$ y, para $a > 1$, sea F_K el espacio construido más arriba.

No es difícil ver que $A_K(x) := Tx$ define un operador $A_K\colon X \longrightarrow F_K$. Veamos algunas propiedades de la factorización obtenida mediante este esquema.

Teorema 6.2.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y denotamos $K = \|T\|^{-1}\overline{T(B_X)}$. Entonces J_K es un operador inyectivo tauberiano y $T = J_K A_K$.*

Si además $f(a) = 1$, $\|T\| = \|A_K\|$ y $\|J_K\| = 1$.

Demostración. La prueba de la primera parte es casi idéntica a la del resultado correspondiente en la factorización DFJP.

La parte isométrica de la prueba no es difícil. $\square$

Una versión condicional

En la factorización DFJP, el espacio intermedio se obtiene como el subespacio diagonal de un espacio $\ell_2(Y_n)$. Informalmente, podemos decir que obtenemos la norma de F haciendo un ℓ_2-promedio de las normas de los espacios Y_n.

Como consecuencia, en muchos casos el espacio F contiene muchos subespacios isomorfos a ℓ_2, como vimos en el Teorema 6.1.4. Como la base (e_n) de ℓ_2 es una base incondicional, el espacio intermedio hereda de alguna manera la incondicionalidad. Esto es un inconveniente si nuestro objetivo es factorizar el operador a través de un espacio hereditariamente indescomponible (véase Definición 6.2.4), ya que estos espacio no contienen sucesiones básicas incondicionales. En el artículo de Gowers y Maurey [44], donde se presenta por primera vez un espacio de este tipo, podemos encontrar más información.

Argyros y Felouzis probaron en [7] que algunos operadores factorizan a través de un espacio hereditariamente indescomponible. Su construcción tiene aspectos comunes con la factorización DFJP, tomando el espacio intermedio como el subespacio diagonal de una suma condicional de espacios de Banach, para evitar la aparición de sucesiones básicas incondicionales.

A continuación daremos algunas ideas de como es la construcción de Argyros y Felouzis, evitando los aspectos difíciles. Avisamos al lector de que es técnicamente mucho más complicada que la factorización DFJP. Sin embargo, pensamos que podría ser aplicada a la obtención de ejemplos muy interesantes.

Sea (X_n) una sucesión de espacios de Banach. Denotemos por $(\|\cdot\|_n)$ la sucesión de sus correspondientes normas y por $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ su producto cartesiano.

Si $x = (x_n)$ es un elemento de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, su *soporte* $\mathrm{supp}(x)$ es el conjunto de los $n \in \mathbb{N}$ para los que $x_n \neq 0$.

Denotemos

$$\Big(\prod_{n=1}^{\infty} X_n\Big)_{00} := \Big\{x \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : \ \mathrm{supp}(x) \text{ finito } \Big\}.$$

y sea $P_n\colon \prod_{n=1}^{\infty} X_n \longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ la proyección definida por

$$P_n\big((x_i)\big) := (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \quad (x_i) \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i.$$

Para cada subconjunto finito $A \subset \mathbb{N}$ y $x = (x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, denotemos por $P_A(x)$ el vector de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ que se obtiene a partir de x, reemplazando x_n por 0 para $n \notin A$. De este modo obtenemos una proyección

$$P_A\colon \prod_{n=1}^{\infty} X_n \longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Sea A y B dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Escribiremos $A < B$ cuando $\max A < \min B$.

Una sucesión de vectores no nulos (x_n) en $(\prod_{n=1}^{\infty} X_n)_{00}$ se dice *sucesión de bloques* si $\operatorname{supp}(x_n) < \operatorname{supp}(x_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 6.2.1. *Sea* $((X_n, \|\cdot\|_n))$ *una sucesión de espacios de Banach. Diremos que un espacio de Banach* $(Z, \|\cdot\|)$ *es un* d-producto de la sucesión (X_n) *si se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $(\prod_{n=1}^{\infty} X_n)_{00} \subset Z \subset \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ *(como conjuntos);*

(ii) $(\prod_{n=1}^{\infty} X_n)_{00}$ *es un subespacio denso de* Z*;*

(iii) *la inclusión natural de* X_n *en* Z *es un operador isométrico para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iv) *la proyección* P_n *es un operador acotado en* Z *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(v) $z = \lim_{n\to\infty} P_n z$ *para todo* $z \in Z$*.*

Observación 6.2.3. *Las condiciones de la definición anterior hacen que* (X_n) *sea una descomposición de Schauder de* Z*.*

Por el principio de la acotación uniforme, $\sup_n \|P_n\| < \infty$*; es decir,* (P_n) *es una sucesión acotada en* $\mathcal{L}(Z)$*.*

En [60, Section 1.9] podemos encontrar información sobre descomposiciones de Schauder de un espacio de Banach.

Las propiedades de las descomposiciones de Schauder son similares a las de las bases de un espacio de Banach. Los siguientes conceptos son similares a los vistos para bases.

Definición 6.2.2. *Sea Z un d-producto de la sucesión (X_n) de espacios de Banach.*

(i) *El d-product Z se dice* acotadamente completo *si*

$$x \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n, \ \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n(x)\| < \infty \implies x \in Z;$$

(ii) *El d-product Z se dice* shrinking *si $\alpha = \text{lím}_{n\to\infty} P_n^*\alpha$ para todo $\alpha \in Z^*$;*

(iii) *El d-product Z se dice* bimonotono *si $\|P_A\| = 1$ para todo intervalo de enteros A en $\mathbb{N}$.*

La demostración de los siguientes resultados es similar a la de los correspondientes resultados para bases de un espacio de Banach. Puede encontrarse en [60, Section 1.b].

Proposición 6.2.1. *Sea Z un d-producto shrinking de la sucesión (X_n) de espacios de Banach. Se verifica:*

(i) *Z^* es d-producto de la sucesión de espacios duales (X_n^*), a través de las inclusiones naturales;*

(ii) *podemos identificar el bidual Z^{**} con el espacio de todas las sucesiones (x_n^{**}), con $x_n^{**} \in X_n^{**}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que verifican la condición $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_1^{**} + \cdots + x_n^{**}\| < \infty$.*

Los siguientes conceptos para d-productos son similares a los vistos para $\ell_2(X_n)$ en la construcción de la descomposición tauberiana de un operador.

Definición 6.2.3. *Sea $(\|\cdot\|_n)$ una sucesión de normas equivalentes en un espacio de Banach X y sea Z un d-producto de la sucesión de espacios $\big((X, \|\cdot\|_n)\big)$.*

Se define el subespacio diagonal ΔZ *de Z mediante*

$$\Delta Z := \{(x_i) \in Z\colon\ x_n = x_1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Además, $J\colon \Delta Z \longrightarrow X_1 := (X, \|\cdot\|_1)$ es la aplicación definida por

$$J\big((x, x, x, \ldots)\big) := x \qquad \text{para todo } (x, x, x, \ldots) \in \Delta Z.$$

A continuación mostraremos que el subespacio diagonal introducido en la Definición 6.2.3 tiene propiedades similares a las del espacio intermedio en la factorización DFJP.

Proposición 6.2.2. *Sea* $(\|\cdot\|_n)$ *una sucesión de normas equivalentes en un espacio de Banach* X *y sea* Z *un d-producto de la sucesión de espacios* $\big((X, \|\cdot\|_n)\big)$.

Si el d-producto Z *es acotadamente completo y shrinking, el operador* $J\colon \Delta Z \longrightarrow X$ *es inyectivo y tauberiano.*

Demostración. Claramente J es inyectivo. Además,

$$\|J(x, x, x, \ldots)\| = \|P_1(x, x, x, \ldots)\| \leq \|P_1\| \cdot \|(x, x, x, \ldots)\|;$$

luego es un operador acotado.

Como todo vector $\alpha \in (\Delta Z)^{**}$ puede obtenerse como w*-límite de una red acotada en ΔZ y Z es un d-producto shrinking, por la Proposición 6.2.1 existe $x^{**} \in X^{**}$ de modo que

$$\alpha = (x^{**}, x^{**}, x^{**}, x^{**}, \ldots).$$

Supongamos que $J^{**}\alpha \in X$. Entonces $x^{**} = x \in X$ y

$$\sup_{n\in N} \|P_n(x, x, x, \ldots)\| = \sup_{n\in N} \|P_n^{**}\alpha\| < \infty.$$

Como el d-producto Z es además acotadamente completo, concluimos que $\alpha = (x, x, x, \ldots) \in Z$; luego $\alpha \in \Delta Z$. Así queda probado que J es tauberiano. □

Definición 6.2.4. *Un espacio de Banach* X *se dice* hereditariamente indescomponible (H.I.) *si ningún subespacio cerrado de* X *admite una descomposición como suma directa de dos subespacios cerrados de dimensión infinita.*

Observación 6.2.4. *No es difícil ver que un espacio de Banach H.I. no puede contener sucesiones básicas incondicionales. Además, el resultado de dicotomía de Gowers* [43] *establece que todo espacio de Banach de dimensión infinita contiene una sucesión básica incondicional o un subespacio cerrado de dimensión infinita que es H.I.*

A partir de ahora, presentaremos conceptos y resultados que permiten mostrar que ciertos operadores factorizan a través de un espacio H.I.; en particular, incluyen construcciones de espacios de Banach H.I. La demostración de estos resultados es técnicamente muy complicada, por lo que no la incluiremos.

Definición 6.2.5. *Diremos que un d-producto Z es* H.I. para bloques *si el subespacio cerrado de Z generado por cualquier sucesión de bloques es un espacio H.I.*

El siguiente resultado es una de las claves para obtener factorizaciones de operadores a través de espacios H.I. Su demostración no es difícil. Sin embargo, construir d-productos que sean H.I. para bloques es bastante delicado. Véase [7, Section 7].

Proposición 6.2.3. *Sea $(\|\cdot\|_n)$ una sucesión de normas equivalentes en un espacio de Banach X y sea Z un d-producto de la sucesión de espacios $\big((X, \|\cdot\|_n)\big)$.*

Si el espacio Z es H.I. para bloques y el operador $J\colon \Delta Z \longrightarrow X_1$ es estrictamente singular, ΔZ es un espacio de Banach H.I.

Demostración. Véase [7, Proposition 2.1]. □

El siguiente resultado se obtiene aplicando la Proposición 6.2.3. Para entender su relevancia, conviene compararlo con el Corolario 6.1.3.

Teorema 6.2.2. *Todo operador compacto $T\colon X \longrightarrow Y$ se factoriza a través de un espacio de Banach H.I.*

Demostración. Véase [7, Theorem 8.5]. □

Observación 6.2.5. *El Teorema 6.2.2 es también válido para operadores estrictamente singulares $T\colon \ell_p \longrightarrow \ell_q$ en el caso $q < \infty$, y para la inclusión natural $i\colon L_\infty(0,1) \longrightarrow L_1(0,1)$.*

Para los detalles, puede consultarse [7].

6.3. Ideales de operadores y factorización

Como ya dijimos, una de las aplicaciones de la factorización DFJP que se hicieron en [17] fue probar que los operadores débilmente compactos factorizan a través de espacios de Banach reflexivos. Posteriormente se comprobó que esta factorización procuraba resultados similares para otras clases de operadores.

Definición 6.3.1. *Decimos que un ideal de operadores $\mathcal{A}$ es* factorizable *si todo operador $T \in \mathcal{A}$ factoriza a través de un espacio de Banach perteneciente al ideal de espacios $Sp(\mathcal{A})$.*

Brevemente, podemos decir que un ideal de operadores $\mathcal{A}$ es factorizable si se verifica $\mathcal{A} = Op\big(Sp(\mathcal{A})\big)$.

Como consecuencia de las propiedades de la descomposición tauberiana, vamos a mostrar ejemplos de ideales de operadores con la propiedad de factorización.

El siguiente resultado, que relaciona las propiedades de un operador con las de sus factores en la descomposición tauberiana, será fundamental para nuestros propósitos.

Proposición 6.3.1. *Sea $T = jUk$ la descomposición tauberiana de un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica*

(i) $\|k\,x\| \leq 2^n\|Tx\| + 2^{-n}\|x\|$ *para todo $x \in X$;*

(ii) $j(B_F) \subset 2^n T(B_X) + 2^{-n}B_Y$.

Demostración. (i) Recordemos que el operador k actúa del espacio X en $E = \ell_2(X_n)/N_T$. Es fácil comprobar que verifica

$$k\,(x) = (0, \overset{(n-1)}{\ldots}, 0, x, 0, 0, \ldots) + N_T$$

para todo $n \in \mathbb{N}$; luego

$$\|k\,(x)\| \leq \|(0, \overset{(n-1)}{\ldots}, 0, x, 0, 0, \ldots)\| = p_T^n(x) \leq 2^n\|Tx\| + 2^{-n}\|x\|$$

para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Nótese que $(y, y, y, \ldots) \in B_F$ implica $q_T^n(y) < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$; por tanto $j(B_F) \subset 2^n T(B_X) + 2^{-n}B_Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Como consecuencia del resultado anterior, los factores j y k heredan algunas de las propiedades del operador T:

Proposición 6.3.2. *Sea $T = jUk$ la descomposición tauberiana de un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores. Se verifica:*

(i) *si $\mathcal{A}$ es cerrado e inyectivo, $T \in \mathcal{A}$ implica $k \in \mathcal{A}$;*

(ii) *si $\mathcal{A}$ es cerrado y suprayectivo, $T \in \mathcal{A}$ implica $j \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Lema 2.1.1 y la Proposición 6.3.1. □

El siguiente concepto facilitará la exposición de los resultados de esta sección.

Definición 6.3.2. *Decimos que un ideal de operadores $\mathcal{A}$ es* interpolable *si para todo operador $T \in \mathcal{A}$, el espacio intermedio en la factorización DFJP de T pertenece a $Sp(\mathcal{A})$.*

Observación 6.3.1. *Nótese que el espacio intermedio en la factorización DFJP coincide con el espacio F en la descomposición tauberiana.*

Veamos algunos primeros ejemplos de ideales de operadores con esta propiedad.

Teorema 6.3.1. *Los siguientes ideales de operadores son interpolables:*

(i) *$\mathcal{F}$, los operadores de rango finito;*

(ii) *$\mathcal{S}$, los operadores de rango separable;*

(iii) *$\mathcal{W}$, los operadores débilmente compactos;*

(iv) *$\mathcal{R}$, los operadores débilmente precompactos (o de Rosenthal).*

Demostración. Sea $T = jUk$ la descomposición tauberiana de un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

(i) Como $k\colon X \longrightarrow E$ tiene rango denso y $j\colon F \longrightarrow Y$ es inyectivo, si $R(T)$ tiene dimensión finita, $\dim(F) = \dim(R(j)) = \dim(R(T)) < \infty$.

(ii) Se sigue claramente de la definición que $R(T)$ es denso en $R(j)$; luego $R(j)$ es separable. Como j es un operador inyectivo y tauberiano de F en el espacio separable $\overline{R(j)}$, aplicando el Teorema 7.2.1 concluimos que F es separable.

(iii) fue probado en el Corolario 6.1.1.

(iv) Como el ideal de operadores $\mathcal{R}$ es suprayectivo y cerrado, de la Proposición 6.3.2 deducimos que $j \in \mathcal{R}$; luego por la Proposición 2.2.2, el espacio F no contiene ningún subespacio M isomorfo a ℓ_1 para el que la restricción $j|_M$ sea un isomorfismo.

Como j es tauberiano e inyectivo, toda restricción de j a un subespacio isomorfo a ℓ_1 es un isomorfismo. Por tanto, F no puede contener subespacios isomorfos a ℓ_1; es decir, $F \in Sp(\mathcal{R})$. □

La Proposición 6.3.2 puede aplicarse al estudio de los productos de ideales de operadores.

Definición 6.3.3. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ dos ideales de operadores.*

El producto de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ *es la clase $\mathcal{A} \circ \mathcal{D}$ de todos los operadores T de la forma $T = AD$, con $A \in \mathcal{A}$ y $D \in \mathcal{D}$.*

No es difícil comprobar que el producto $\mathcal{A} \circ \mathcal{D}$ de dos ideales de operadores $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ es un ideal de operadores.

Corolario 6.3.1. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ dos ideales de operadores cerrados. Si $\mathcal{A}$ es suprayectivo y $\mathcal{D}$ es inyectivo,*

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{D}(X, Y) = \mathcal{A}(X, Y) \cap \mathcal{D}(X, Y)$$

para todo par de espacios de Banach X e Y.

Demostración. Supongamos que $T \in \mathcal{A}(X, Y) \cap \mathcal{D}(X, Y)$ y sea $T = jUk$ la descomposición tauberiana de T. Como aplicación de la Proposición 6.3.2 obtenemos $j \in \mathcal{A}$ y $k \in \mathcal{D}$; luego $T \in \mathcal{A} \circ \mathcal{D}$.

La implicación inversa es trivial. □

Sean (X_n) e (Y_n) dos sucesiones de espacios de Banach. No es difícil comprobar que todo operador

$$T \colon \ell_2(X_n) \longrightarrow \ell_2(Y_n)$$

puede representarse mediante una matriz infinita de operadores con componentes $T_{mn} \colon X_n \longrightarrow Y_m$; $m, n \in \mathbb{N}$.

Además, como obtenemos T_{mn} multiplicando T por dos proyecciones, si $\mathcal{A}$ es un ideal de operadores y $T \in \mathcal{A}$, las componentes T_{mn} también pertenecen a $\mathcal{A}$.

Definición 6.3.4. *Decimos que un ideal de operadores $\mathcal{A}$ es ℓ_2-*estable *si un operador $T\colon \ell_2(X_n) \longrightarrow \ell_2(Y_n)$ pertenece a $\mathcal{A}$ cuando todas sus componentes T_{mn} pertenecen a $\mathcal{A}$.*

Observación 6.3.2. *No es difícil comprobar que los ideales de operadores ℓ_2-estables son cerrados.*

El siguiente resultado proporciona un modo de comprobar que algunos ideales de operadores son interpolables.

Teorema 6.3.2. *Todo ideal de operadores $\mathcal{A}$ que es inyectivo, suprayectivo y ℓ_2-estable es interpolable.*

Demostración. Sea $T = jUk$ la descomposición tauberiana de un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Recordemos que $j \in \mathcal{L}(F, Y)$, $k \in \mathcal{L}(X, E)$, F es el subespacio diagonal de $\ell_2(Y_n)$ y $E = \ell_2(X_n)/N_T$.

Denotemos por $J\colon F \longrightarrow \ell_2(Y_n)$ y $Q\colon \ell_2(X_n) \longrightarrow \ell_2(X_n)/N_T$ los respectivos operadores de inclusión y cociente.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "k"'] & Y \\
E \arrow[r, "U"'] & F \arrow[u, "j"'] \arrow[d, "J"] \\
\ell_2(X_n) \arrow[u, "Q"] \arrow[r] & \ell_2(Y_n)
\end{tikzcd}$$

donde cada uno de los espacios X_n es isomorfo a X y cada uno de los espacios Y_n es isomorfo a Y.

No es difícil comprobar que las componentes $(JUQ)_{mn}$ de la representación matricial del operador $JUQ\colon \ell_2(X_n) \longrightarrow \ell_2(Y_n)$ coinciden con T considerado como operador de X_n en Y_m.

Como el ideal de operadores $\mathcal{A}$ es ℓ_2-estable, obtenemos $JUQ \in \mathcal{A}$. De donde, teniendo en cuenta que $\mathcal{A}$ es inyectivo y suprayectivo, deducimos que $U \in \mathcal{A}$. Como U es un isomorfismo biyectivo, concluimos que E y F pertenecen a $Sp(\mathcal{A})$. Luego $\mathcal{A}$ es interpolable. $\square$

Consideremos las siguientes clases de operadores.

Definición 6.3.5. *Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operador.*

(i) *T se dice* de Banach-Saks *si toda sucesión acotada (x_n) en X admite una subsucesión (x_{n_k}) tal que $\big(T(x_{n_1} + \cdots + x_{n_k})/k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente; es decir, (Tx_{n_k}) es Cesàro convergente.*

(ii) *T se dice* decomposing *si para todo espacio medible (Ω, Σ, μ) con $\mu(\Omega) < \infty$ y todo operador $S\colon Y \longrightarrow L_\infty(\mu)$, existe una función μ-medible $g\colon \Omega \longrightarrow X^*$ de modo que $(STx)(t) = \langle g(t), x\rangle$ a.e. para todo $x \in X$.*

Denotaremos respectivamente por $\mathcal{BS}$ y $\mathcal{D}$ las clases de los operadores de Banach-Saks y decomposing.

Ejercicio 6.3.1. *Las clases $\mathcal{BS}$ y $\mathcal{D}$ son ideales de operadores.*

Proposición 6.3.3. *Los siguientes ideales de operadores son inyectivos, suprayectivos y ℓ_2-estables:*

(i) *$\mathcal{S}$, los operadores de rango separable;*

(ii) *$\mathcal{W}$, los operadores débilmente compactos;*

(iii) *$\mathcal{BS}$, los operadores de Banach-Saks;*

(iv) *$\mathcal{D}$, los operadores decomposing.*

Por tanto, como consecuencia del Teorema 6.3.2, son interpolables.

Demostración. (i) Claramente, $\mathcal{S}$ es inyectivo y suprayectivo. Y como la ℓ_2-suma de una sucesión de espacios separables es un espacio separable, es también ℓ_2-estable.

(ii) Es bien sabido (y fácil de comprobar) que $\mathcal{W}$ is injectivo y suprayectivo. Además, como podemos identificar $\ell_2(X_n)^{**}$ con $\ell_2(X_n^{**})$, es fácil comprobar que las componentes del segundo conjugado

$$T^{**}\colon \ell_2(X_n^{**}) \longrightarrow \ell_2(Y_n^{**})$$

se identifican con los operadores T_{mn}^{**}.

De aquí se sigue fácilmente que $T \in \mathcal{W}$ si y solo si las componentes T_{mn} están en $\mathcal{W}$; es decir, que $\mathcal{W}$ es ℓ_2-estable.

La demostración de los casos (iii) y (iv) puede encontrarse en [47, Theorem 2.3]. □

Veamos como el buen comportamiento ante la dualidad de la descomposición tauberiana permite obtener nuevos ideales de operadores interpolables a partir de los ya conocidos.

Teorema 6.3.3. *Si $\mathcal{A}$ es un ideal de operadores interpolable, los ideales $\mathcal{A}^d$ y $\mathcal{A}^{co}$ también lo son.*

Demostración. Es una aplicación directa del Teorema 6.1.3: Si $T = jUk$ es la descomposición tauberiana de T, $T^* = k^*U^*j^*$ y $T^{co} = j^{co}U^{co}k^{co}$ se identifican con las respectivas descomposiciones tauberianas de T^* y T^{co}. $\square$

Veamos que la inversa de la primera implicación del Teorema 6.3.3 no es cierta, en general.

Definición 6.3.6. *Decimos que $A \in \mathcal{L}(L_1(\mu), X)$ es* representable *si existe una función medible $g\colon \Omega \longrightarrow Y$ de modo que*

$$A(f) = \int_\Omega f(t)g(t)dt \quad \textit{para todo } f \in L_1(\mu).$$

Decimos que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es un operador de Radon-Nikodým *si para todo espacio de medida finita (Ω, Σ, μ) y todo operador $S\colon L_1(\mu) \longrightarrow X$, el operador TS es representable.*

En [70, 24.2.6] se prueba que la clase $\mathcal{RN}$ de los operadores de Radon-Nikodým es un ideal de operadores inyectivo y cerrado.

Observación 6.3.3. *El ideal de operadores dual $\mathcal{RN}^d$ coincide con el de los operadores descomponibles $\mathcal{D}$, que es interpolable (Proposición 6.3.3).*

Sin embargo, el ideal $\mathcal{RN}$ no es interpolable.

En efecto, $Sp(\mathcal{RN})$ es la clase de los espacios de Banach con la propiedad de Radon-Nikodým (Definición 7.1.1). Además, en [23] se prueba la existencia de un espacio de Banach X_2 y un operador $T \in \mathcal{RN}(X_2, c_0)$ tal que si escribimos T como producto de dos operadores, uno de ellos es un isomorfismo en un subespacio isomorfo a c_0; luego el espacio intermedio no tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

Del argumento anterior se sigue que los ideales de operadores $\mathcal{U}$ y $\mathcal{RN}$ no satisfacen la propiedad de factorización.

Factorización de aplicaciones holomorfas

Veremos que los resultados de factorización para operadores en algunos ideales pueden extenderse a ciertas clases de funciones holomorfas entre espacios de Banach. Siguiendo los trabajos [27] y [28], caracterizaremos las funciones holomorfas f que pueden escribirse de una de las formas $f = T \circ g$ ó $f = g \circ T$, donde g es otra función holomorfa y T es operador perteneciente a un ideal $\mathcal{A}$ que es cerrado e inyectivo ó suprayectivo.

Evidentemente, cuando el ideal de operadores satisfaga la propiedad de factorización, también las funciones holomorfas en la clase correspondiente podrán factorizarse.

Conceptos y notaciones. Sean X e Y espacios de Banach y sea $n \in \mathbb{N}$.

Diremos que una aplicación $P\colon X \longrightarrow Y$ es un *polinomio homogéneo de orden* n si existe una aplicación n-lineal continua

$$\hat{P} : X \times \overset{(n)}{\cdots} \times X \longrightarrow Y$$

de modo que $P(x) = \hat{P}(x, \ldots, x)$ para todo $x \in X$.

Denotaremos $\mathcal{P}(^n X, Y)$ al conjunto de los polinomios homogéneos de orden n que actúan de X en Y. Además identificaremos el espacio Y con $\mathcal{P}(^0 X, Y)$, las aplicaciones constantes de X en Y.

Definición 6.3.7. *Diremos que una función* $f\colon X \longrightarrow Y$ *es* holomorfa *si para cada* $z \in X$ *existe un entorno abierto* U_z *de* z *y una sucesión de polinomios* $\mathrm{d}^n f[z] \in \mathcal{P}(^n X, Y) \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$*, de modo que la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} d^n f[z](x - z)$$

converge uniformemente a $f(x)$ *para* $x \in U_z$*.*

El polinomio $\mathrm{d}^n f[z]$ *es la* diferencial de orden n de f en el punto z.

Denotaremos $\mathcal{H}(X, Y)$ al espacio vectorial de las funciones holomorfas de X en Y. Además, $\mathcal{H}_b(X, Y)$ será el subespacio de las funciones en $\mathcal{H}(X, Y)$ que son acotadas en los subconjuntos acotados de X.

Obviamente, $\mathcal{P}(^n X, Y) \subset \mathcal{H}_b(X, Y)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ideales suprayectivos

Es bien sabido que los ideales de operadores suprayectivos corresponden con familias de conjuntos acotados en espacios de Banach. A continuación describiremos brevemente esta relación.

Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores suprayectivo. Para cada espacio de Banach Y, consideramos la siguiente familia de conjuntos acotados:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(Y) := \{T(B_Z) : \quad Z \text{ espacio de Banach}, T \in \mathcal{A}(Z,Y)\}.$$

No es difícil comprobar que un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ pertenece al ideal $\mathcal{A}$ si y solo si $T(B_X) \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(Y)$.

Definición 6.3.8. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores suprayectivo. Decimos que una función holomorfa $f\colon X \longrightarrow Y$ pertenece a $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ si para todo $z \in X$ existe un entorno abierto U_z tal que $f(U_z) \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(Y)$.*

Veamos algunas caracterizaciones para las funciones holomorfas en $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

Teorema 6.3.4. *Sean $f \in \mathcal{H}(X,Y)$ y $\mathcal{A}$ un ideal de operadores suprayectivo. Son equivalentes:*

(i) $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}(X,Y)$;

(ii) *existe un entorno abierto U_0 de 0 en X tal que $f(U_0) \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(Y)$;*

(iii) $d^n f[z] \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ *para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in X$;*

(iv) $d^n f[0] \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ *para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Véase [28, Proposition 5]. □

Como consecuencia, obtenemos la siguiente representación de las funciones en $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

Teorema 6.3.5. *Sean $f \in \mathcal{H}(X,Y)$ y $\mathcal{A}$ un ideal de operadores suprayectivo. Se verifica $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ si y solamente si existe un espacio de Banach Z, un operador $T \in \mathcal{A}(Z,Y)$ y una función $g \in \mathcal{H}_b(X,Z)$ de modo que $f = T \circ g$.*

La demostración se hace aplicando el Teorema 6.3.4. Véase [28].

Corolario 6.3.2. *Sea $f \in \mathcal{H}(X,Y)$ y sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores suprayectivo con la propiedad de factorización. Se verifica $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ si y solo si existe un espacio $Z \in Sp(\mathcal{A})$, un operador $T \in \mathcal{L}(Z,Y)$ y una función $g \in \mathcal{H}(X,Z)$ de modo que $f = T \circ g$.*

Ideales inyectivos

También es bien sabido que los ideales de operadores inyectivos pueden describirse mediante topologías localmente convexas en espacios de Banach que son menos fuertes que la de la norma. A continuación describiremos brevemente esta relación.

Sean $\mathcal{A}$ un ideal de operadores inyectivo y X un espacio de Banach. Consideremos la topología localmente convexa $\tau_{\mathcal{A}}$ generada en X por las seminormas

$$\{p_T(\cdot) : \quad Z \text{ espacio de Banach, } T \in \mathcal{A}(X,Z)\}$$

donde $p_T(x) := \|Tx\| \quad (x \in X)$.

Jarchow probó en [54, Section 3] que, para todo par de espacios de Banach X e Y, se verifica

$$\mathcal{A}(X,Y) = \mathcal{L}_c\big((X,\tau_{\mathcal{A}}),Y\big), \tag{6.1}$$

donde $\mathcal{L}_c\big((X,\tau_{\mathcal{A}}),Y\big)$ es el espacio de las aplicaciones lineales continuas del espacio localmente convexo $(X,\tau_{\mathcal{A}})$ en Y.

Observación 6.3.4. *Si $\mathcal{A}$ es un ideal de operadores inyectivo, $\tau_{\mathcal{A}}$ es la más fina de todas las topologías localmente convexas que coinciden con $\tau_{\mathcal{A}}$ en los subconjuntos acotados de X [54, Proposition 4.2]. Luego la Ecuación 6.1 implica que un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ pertenece a $\mathcal{A}$ si y solo si es $\tau_{\mathcal{A}}$-continuo cuando se le restringe a los subconjuntos acotados de X.*

La observación anterior sugiere la introducción del siguiente concepto.

Definición 6.3.9. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores inyectivo Decimos que una función holomorfa $f\colon X \longrightarrow Y$ pertenece a $\mathcal{H}^{\mathcal{A}}(X,Y)$ si es uniformemente $\tau_{\mathcal{A}}$-continua cuando se la restringe a los subconjuntos acotados de X.*

Antes de caracterizar las funciones en $\mathcal{H}^{\mathcal{A}}(X,Y)$, consideramos el caso particular de los polinomios homogéneos.

Proposición 6.3.4. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{P}(^nX,Y)$ y $\mathcal{A}$ un ideal de operadores cerrado e inyectivo. Son equivalentes:*

(a) P es uniformemente $\tau_{\mathcal{A}}$-continuo sobre los subconjuntos acotados de X;

(b) existe un espacio de Banach Z y un operador $T \in \mathcal{A}(X,Z)$ de modo que
$$\|P(x)\| \leq \|Tx\|^n \qquad \text{para todo } x \in X;$$

(c) existe un espacio de Banach Z, un operador $T \in \mathcal{A}(X,Z)$ y un polinomio $Q \in \mathcal{P}(^nZ,Y)$ de modo que $P = Q \circ T$.

El resultado anterior puede encontrarse en [27, Corollary 5].

Una parte de la demostración del siguiente resultado consiste en aplicar la Proposición anterior a los términos del desarrollo en serie
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-1}d^nf[0](x)$$
de una función holomorfa f.

Teorema 6.3.6. *Sean $f \in \mathcal{H}(X,Y)$ y $\mathcal{A}$ un ideal de operadores inyectivo y cerrado. Se verifica $f \in \mathcal{H}^{\mathcal{A}}(X,Y)$ si y solo si existe un espacio de Banach Z, un operador $T \in \mathcal{A}(X,Z)$ y una función $g \in \mathcal{H}_b(Z,Y)$ de modo que $f = g \circ T$.*

Podemos encontrar la demostración en [27, Proof of Theorem 8].

Corolario 6.3.3. *Sean $f \in \mathcal{H}(X,Y)$ y $\mathcal{A}$ un ideal de operadores inyectivo y cerrado con la propiedad de factorización. Se verifica $f \in \mathcal{H}^{\mathcal{A}}(X,Y)$ si y solo si existe un espacio $Z \in Sp(\mathcal{A})$, un operador $T \in \mathcal{L}(X,Z)$ y una función $g \in \mathcal{H}_b(Z,Y)$ de modo que $f = T \circ g$.*

Factorización uniforme para subconjuntos compactos de operadores

Vamos a describir una variante de la descomposición tauberiana de un operador que, en el caso de un ideal de operadores cerrado, inyectivo y suprayectivo $\mathcal{A}$, permitirá obtener una factorización conjunta de los operadores de un subconjunto compacto H de $\mathcal{A}(X,Y)$. Más concretamente, probaremos el siguiente resultado.

Teorema 6.3.7. *Sean X e Y espacios de Banach y sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores cerrado, inyectivo y suprayectivo.*

Si H es un subconjunto compacto de $\mathcal{A}(X,Y)$, existen espacios de Banach X_H y Y_H, operadores $j_H \in \mathcal{A}(Y_H,Y)$ y $k_H \in \mathcal{A}(X,X_H)$, y un subconjunto compacto H_0 de $\mathcal{A}(X_H,Y_H)$, de modo que cada $T \in H$ puede descomponerse como

$$T = j_H T_0 k_H \quad \textit{con } T_0 \in H_0.$$

La demostración del Teorema 6.3.7 la daremos más adelante. Primero presentaremos algunos conceptos y resultados previos.

Con el fin de evitar confusiones, denotaremos por $T = j_T U_T k_T$ la descomposición tauberiana de un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "k_T"'] & Y \\
E_T \arrow[r, "U_T"'] & F_T \arrow[u, "j_T"']
\end{tikzcd}$$

Además, si A es un subconjunto de un espacio de Banach, $\overline{\text{aco}}(A)$ denotará la envoltura absolutamente convexa y cerrada de A.

Fijado un subconjunto acotado H de $\mathcal{L}(X,Y)$, consideraremos los siguientes subconjuntos acotados de Y y X^*:

$$W_H := \overline{\text{aco}}\big(\bigcup_{T\in H} T(B_X)\big) \quad \text{y} \quad W_{H^*} := \overline{\text{aco}}\big(\bigcup_{T\in H} T^*(B_{Y^*})\big).$$

Denotemos por $q_n(\cdot)$ el calibre del conjunto $2^n W_H + 2^{-n} B_Y$, que es una norma equivalente a la original en Y. Además, si $Y_n := (Y, q_n(\cdot))$, definimos

$$Y_H := \{(y_n) \in \ell_2(Y_n) \colon\ y_n = y_1 \ \text{ para todo } n\};$$

es decir, Y_H es el subespacio diagonal de $\ell_2(Y_n)$.

Claramente, la aplicación $j_H \colon Y_H \longrightarrow Y$ definida por

$$j_H(y, y, y, \ldots) := y \qquad \text{para todo } (y, y, y, \ldots) \in Y_H.$$

es un operador continuo e inyectivo.

Por otro lado, el calibre $q_n^*(\cdot)$ del conjunto $2^n W_{H^*} + 2^{-n} B_{X^*}$ es una norma dual en X^* (nótese que es un conjunto w*-compacto) equivalente a la norma original. Denotamos $p_n(\cdot)$ a la norma predual en X; es decir, $(X, p_n(\cdot))^*$ de identifica isométricamente con $(X^*, q_n^*(\cdot))$.

No es difícil comprobar que la norma $p_n(\cdot)$ coincide con el calibre del siguiente conjunto:

$$\{x \in X \colon\ |\langle f, x\rangle| \leq 1, \ \text{ para todo } \ f \in 2^n W_{H^*} + 2^{-n} B_{X^*}\}.$$

Entonces, denotando $X_n := (X, p_n(\cdot))$, podemos identificar isométricamente $\ell_2(X_n)^*$ con $\ell_2(X_n^*)$. Por tanto, si M_H es el subespacio diagonal de $\ell_2(X_n^*)$, podemos definir

$$X_H := \ell_2(X_n)/(M_H)_\perp$$

y considerar el operador $k_H \colon X \longrightarrow X_H$ definido por

$$k_H(x) := (x, 0, 0, 0, \ldots) + (M_H)_\perp \quad x \in X.$$

El siguiente resultado permitirá mostrar que algunas de las propiedades "uniformes" de los operadores del subconjunto H son heredadas por los operadores j_H y k_H.

Lema 6.3.1. *Sea H un subconjunto acotado H de $\mathcal{L}(X, Y)$ y sean $j_H \colon Y_H \longrightarrow Y$ y $k_H \colon X \longrightarrow X_H$ los operadores que acabamos de definir. Se verifica*

$$j_H(B_{Y_H}) \subset 2^n W_H + 2^{-n} B_Y \ \ \textit{para todo } n \in \mathbb{N}, \quad \textit{y}$$

$$k_H(x) \leq \sup_{T \in H} 2^n \|Tx\| + 2^{-n}\|x\| \ \ \textit{para todo all } x \in X \ \textit{ y todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Es similar a la demostración de la Proposición 6.3.1. □

Recordemos que $T = j_T U_T k_T$ es la descomposición tauberiana de T. Veamos que la construcción anterior proporciona una factorización conjunta para los operadores de un subconjunto acotado de $\mathcal{L}(X,Y)$.

Proposición 6.3.5. *Si H es un subconjunto acotado de $\mathcal{L}(X,Y)$, existen operadores $r_T \in \mathcal{L}(F_T, Y_H)$ y $s_T \in \mathcal{L}(X_H, E_T)$ de modo que*

$$j_T = j_H r_T \quad \text{y} \quad k_T = s_T k_H \quad \text{para todo} \quad T \in H.$$

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[rr, "T"] \arrow[dl, "k_H"'] & & Y & \\
X_H \arrow[dr, "s_T"'] & & & & Y_H \arrow[ul, "j_H"'] \\
& E_T \arrow[rr, "U_T"'] & & F_T \arrow[ur, "r_T"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Definimos la aplicación $r_T \colon F_T \longrightarrow Y_H$ mediante

$$r_T(y,y,y,\ldots) := (y,y,y,\ldots).$$

Claramente $r_T \in \mathcal{L}(F_T, Y_H)$ y $\|r_T\| \leq 1$.

Además definimos el operador $s_T \colon X_H \longrightarrow E_T$ mediante

$$s_T((x_n) + (M_H)_\perp) := (x_n) + N_T.$$

donde N_T es el subespacio considerado en la Sección 6.1.

Como en la construcción de la descomposición tauberiana, el operador conjugado de s_T tiene la misma forma que r_T; luego $s_T \in \mathcal{L}(X_H, E_T)$ y $\|s_T\| \leq 1$. Además, es fácil comprobar que se verifica $j_T = j_H r_T$ y $k_T = s_T k_H$. □

Observación 6.3.5. *Los operadores $r_T \in \mathcal{L}(F_T, Y_H)$ y $s_T \in \mathcal{L}(X_H, E_T)$ de la Proposición anterior son, respectivamente, tauberiano y cotauberiano.*

En efecto, $j_T = j_H r_T \in \mathcal{W}_+$ implica $r_T \in \mathcal{W}_+$, y $k_T = s_T k_H \in \mathcal{W}_-$ implica $s_T \in \mathcal{W}_-$.

El siguiente resultado técnico es un refinamiento del Lema 2.1.1.

Lema 6.3.2. *Sean $\mathcal{A}$ un ideal de operadores cerrado, H un subconjunto compacto de $\mathcal{A}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{L}(X,Y)$. Supongamos que se verifica una de las siguiente condiciones:*

(i) *$\mathcal{A}$ es inyectivo y para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|Sx\| \leq \delta \sup_{T\in H} \|Tx\| + \varepsilon\|x\| \qquad \textit{para todo } x \in X;$$

(ii) *$\mathcal{A}$ es suprayectivo y para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$S(B_Z) \subset \delta\, \overline{\mathrm{aco}}\,(\cup_{T\in H} T(B_X)) + \varepsilon B_Y.$$

Entonces $S \in \mathcal{A}$.

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$ y seleccionemos $T_1, \ldots, T_n \in H$ de modo que para todo $T \in H$ exista $i \in \{1, \ldots, n\}$ verificando $\|T - T_i\| < \varepsilon/\delta$.

(i) Claramente, para cada $x_0 \in B_X$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ de modo que

$$\sup_{T\in H} \|Tx_0\| < \|T_i x_0\| + 2\varepsilon\|x_0\|/\delta.$$

Consideremos el operador $U\colon X \longrightarrow \big(Y \times \overset{(n)}{\cdots} \times Y, \|\cdot\|_\infty\big)$, definido por $Ux := (T_1x, \ldots, T_nx)$. Para todo $x \in X$, se verifica

$$\delta \sup_{T\in H} \|Tx\| < \delta\|Ux\| + 2\varepsilon\|x\|;$$

luego $\|Sx\| \leq \delta\|Ux\| + 2\varepsilon\|x\|$ para todo $x \in X$.

Como $\mathcal{A}$ es cerrado e inyectivo, y $U \in \mathcal{A}$, del Lema 2.1.1 se sigue $S \in \mathcal{A}$.

(ii) Para todo $T \in H$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ de modo que

$$T(B_X) \subset T_i(B_X) + (\varepsilon/\delta)B_Y.$$

Consideremos el operador $V\colon \big(X \times \overset{(n)}{\cdots} \times X, \|\cdot\|_1\big) \longrightarrow Y$ definido por $V(x_1, \ldots, x_n) := T_1x_1 + \cdots + T_nx_n$. Se verifica

$$\delta \cup_{T\in H} T(B_X) \subset \delta V(B_{X\times \overset{(n)}{\cdots} \times X}) + \varepsilon B_Y;$$

luego $S(B_Z) \subset \delta V(B_{X\times \overset{(n)}{\cdots} \times X}) + 2\varepsilon B_Y$.

Como $\mathcal{A}$ es cerrado y suprayectivo, y $U \in \mathcal{A}$, del Lema 2.1.1 se sigue $S \in \mathcal{A}$. □

Utilizando los argumentos anteriores, podemos derivar fácilmente el siguiente resultado:

Proposición 6.3.6. *Sea $\mathcal{A}$ un ideal de operadores cerrado, inyectivo y suprayectivo, y sea H un subconjunto compacto de $\mathcal{A}(X,Y)$. Se verifica:*

(i) $j_H \in \mathcal{A}(Y_H, Y)$ *y* $k_H \in \mathcal{A}(X, X_H)$.

(ii) *Para todo* $T \in H$, $r_T \in \mathcal{A}(F_T, Y_H)$ *y* $s_T \in \mathcal{A}(X_H, Y_T)$.

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado principal de esta sección.

Demostración del Teorema 6.3.7. Consideramos los espacios X_H y Y_H, y los operadores $r_T \in \mathcal{L}(F_T, Y_H)$ y $s_T \in \mathcal{L}(X_H, E_T)$ obtenidos en la Proposición 6.3.5. Entonces

$$T = j_H\, r_T\, U_T\, s_T\, k_H \quad \text{para todo } T \in H.$$

Definimos el conjunto H_0 como la clausura de

$$\{T_0 := r_T U_T s_T \colon\, T \in H\} \subset \mathcal{L}(X_H, Y_H).$$

Claramente $T = j_H T_0 k_H$ para todo $T \in H$. Además, por la Proposición 6.3.6, los tres factores j_H, T_0 y k_H pertenecen a $\mathcal{A}$.

Quedaría probar que H_0 es un conjunto compacto. En lugar de hacerlo, referimos al lector a [29]. □

Capítulo 7

Otras aplicaciones de los operadores tauberianos

En capítulos anteriores hemos visto algunas aplicaciones de los operadores tauberianos. En este capítulo presentaremos otras aplicaciones, como la equivalencia entre la propiedad de Radon-Nikodým (RNP) y la propiedad de Krein-Milman (KMP) en espacios de Banach X para los que existe un operador tauberiano inyectivo $T\colon X \times X \longrightarrow X$. También veremos que los operadores tauberianos, aun sin ser isomorfismos, preservan algunas propiedades isomorfas de los espacios y de los conjuntos acotados. Además veremos aplicaciones de la factorización DFJP al estudio de la propiedad de aproximación y mostraremos relaciones entre las propiedades de las álgebras de Calkin asociadas a los operadores débilmente compactos y la propiedad de aproximación débil.

7.1. Equivalencia de la RNP y la KMP

En [74], Schachermayer probó que para un espacio de Banach X isomorfo a $X \times X$ la propiedad de Radon-Nikodým es equivalente a la propiedad de Krein-Milman. De hecho, para la validez de la prueba basta suponer que existe un operador tauberiano inyectivo de $X \times X$ en X. La clave es el Teorema 4.1.7, que muestra que un operador tauberiano aplica conjuntos convexos cerrados en conjuntos cerrados. Aquí expondremos la parte de la demostración en la que intervienen los operadores tauberianos.

Definición 7.1.1. *Un espacio de Banach X tiene la* propiedad de Radon-Nikodým (RNP) *si, fijado un espacio de medida finita* (Ω, Σ, μ)*, para toda medida μ-continua $F\colon \Sigma \longrightarrow X$ de variación acotada, existe una función Bochner-integrable $f : \Omega \to X$, denominada* derivada de Radon-Nikodým *de F, tal que*

$$F(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu; \quad \textit{para todo } A \in \Sigma.$$

El teorema clásico de Radon-Nikodým establece que $\mathbb{R}$ tiene la RNP.

Los espacios reflexivos y los duales separables tiene la RNP, mientras que c_0 y $L_1(0,1)$ no la tienen. En [19] y [21] podemos encontrar más información.

Definición 7.1.2. *Sea C un subconjunto convexo de un espacio vectorial. Diremos que $x_0 \in C$ es un* punto extremo de C *si $C \setminus \{x_0\}$ es convexo.*

En general, el conjunto de los puntos extremos de C puede ser vacío. Sin embargo, el teorema clásico de Krein-Milman garantiza que si K es un subconjunto convexo y compacto de un espacio localmente convexo, K coincide con la envoltura convexa y cerrada de sus puntos extremos. Este es el origen del siguiente concepto:

Definición 7.1.3. *Un espacio de Banach X tiene la* propiedad de Krein-Milman (KMP) *si todo subconjunto cerrado, convexo y acotado en X coincide con la envoltura convexa cerrada de sus puntos extremos.*

El siguiente resultado es consecuencia de los teoremas de Hahn-Banach y de Bishop-Phelps. En [21, Lemma 5.11] se puede ver una demostración.

Proposición 7.1.1. *Un espacio de Banach X tiene la KMP si y solo si todo subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo C de X tiene un punto extremo.*

El siguiente resultado es bien conocido.

Proposición 7.1.2. *Un espacio de Banach con la RNP tiene la KMP.*

No se sabe si, en general, los espacios con la KMP tienen la RNP. Aquí lo probaremos en un caso particular. Una de las claves de la prueba es el siguiente resultado [74, Proof of Theorem 2.3].

Teorema 7.1.1. *Un espacio de Banach X tiene la RNP si y solo si el espacio $\ell_2(X)$ tiene la KMP.*

Veamos que los operadores tauberianos inyectivos preservan la propiedad de Krein-Milman.

Proposición 7.1.3. *Sean X e Y espacios de Banach para los que existe un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tauberiano inyectivo. Si Y tiene la KMP, también X la tiene.*

Demostración. Supongamos que el espacio X no tiene la KMP. Por la Proposición 7.1.1, X contiene un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo sin puntos extremos.

Claramente $T(C)$ es un subconjunto no vacío, acotado, convexo y sin puntos extremos en el espacio Y. Como por el Teorema 4.1.7, $T(C)$ es cerrado, la Proposición 7.1.1 implica que Y no tiene la KMP. □

El siguiente resultado de estabilidad es otro ingrediente importante en la prueba del resultado principal de esta sección.

Teorema 7.1.2. *Si existe un operador $T\colon X \times X \longrightarrow X$ tauberiano e inyectivo, también existe un operador $S\colon \ell_2(X) \longrightarrow X$ tauberiano e inyectivo.*

Demostración. Claramente podemos escribir

$$T(x,y) = U(x) + V(y), \quad (x,y) \in X \times X,$$

con $U, V \in \mathcal{L}(X)$, y suponer que $r := \text{máx}\{\|U\|, \|V\|\} < 1$.

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \in \ell_2(X)$ una sucesión finitamente no nula. Podemos definir $S(x)$ recursivamente mediante:

$$S(0,\ldots,0,\ldots) := 0,$$

$$S(x_1,\ldots,x_n,0,0,\ldots) := T\big(x_1, S(x_2,\ldots,x_n,0,0,\ldots)\big).$$

Es fácil comprobar que

$$S(x_1,\ldots,x_n,0,0,\ldots) = \sum_{i=1}^{n} V^{i-1} U x_i.$$

Claramente S es una aplicación lineal. Además,

$$\|S(x_1,\ldots,x_n,0,0,\ldots)\| \leq \sum_{i=1}^{n} r^i\|x_i\| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} r^{2i}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\Big)^{1/2}.$$

Por continuidad podemos extender S a un operador $S\colon \ell_2(X) \longrightarrow X$ que verifica

$$S(x_i) = T\big(x_1, S(x_{i+1})\big) \quad \text{para todo } (x_i) \in \ell_2(X),$$

donde (x_{i+1}) denota la sucesión $(x_2, x_3, \ldots)$.

Como T es inyectivo, de la última igualdad se sigue que S es inyectivo:

$$S(x_i) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, S(x_{i+1}) = 0 \Rightarrow x_2 = 0, S(x_{i+2}) = 0 \Rightarrow \cdots$$

Análogamente, los operadores biconjugados

$$T^{**}\colon X^{**}\times X^{**} \longrightarrow X^{**} \quad \text{y} \quad S^{**}\colon \ell_2(X^{**}) \longrightarrow X^{**}$$

verifican

$$S^{**}(z_i) = T^{**}\big(z_1, S^{**}(z_{i+1})\big) \quad \text{for every } (z_i) \in \ell_2(X^{**}) \equiv \ell_2(X)^{**}.$$

Como T es tauberiano, para todo $(z_i) \in \ell_2(X^{**})$ se verifica

$$S^{**}(z_i) \in X \Rightarrow z_1 \in X, S^{**}(z_{i+1}) \in X \Rightarrow z_2 \in X, S(z_{i+2}) \in X \Rightarrow \cdots$$

Luego $(z_i) \in \ell_2(X)$, por lo que S es tauberiano. □

Veamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 7.1.3. *Sea X un espacio de Banach para el que existe un operador tauberiano inyectivo $T\colon X\times X \longrightarrow X$. El espacio X tiene la RNP si y solo si tiene la KMP.*

Demostración. Una implicación es consecuencia de la Proposición 7.1.2. Para probar la otra, supongamos que X tiene la KMP. Como, por el Teorema 7.1.2, existe un operador tauberiano inyectivo $S\colon \ell_2(X) \longrightarrow X$, la Proposición 7.1.3 implica que $\ell_2(X)$ tiene la KMP. Luego, por el Teorema 7.1.1, X tiene la RNP. □

7.2. Preservación de propiedades isomorfas

Aunque la propiedad de ser X isomorfo a un subespacio de un espacio de Banach Y es estrictamente más fuerte que la existencia de un operador tauberiano (o tauberiano inyectivo) $T\colon X \longrightarrow Y$, veremos que en el último caso X hereda algunas propiedades isomorfas de Y, y que los subconjuntos acotado A de X heredan algunas propiedades isomorfas de $T(A)$. En este sentido entendemos el título de la sección.

Propiedades de espacios

Decimos que un espacio de Banach X es *casi-reflexivo* si $\dim X^{co} < \infty$; y que X es *hereditariamente reflexivo* si todo subespacio cerrado de dimensión infinita de X contiene un subespacio reflexivo de dimensión infinita.

Teorema 7.2.1. *Sean X e Y espacios de Banach. Denotemos por $\mathcal{P}$ una de las siguientes propiedades:*

(i) *propiedad de Krein-Milman;*

(ii) *propiedad de Radon-Nikodým;*

(iii) *reflexividad;*

(iv) *casi-reflexividad*

(v) *reflexividad hereditaria;*

(vi) *ser débilmente sucesionalmente completo;*

(vii) *no contener subespacios isomorfos a ℓ_1;*

(viii) *no contener subespacios isomorfos a c_0;*

(ix) *ser reflexivos los subespacios débilmente suc. completos;*

(x) *separabilidad;*

(xi) *separabilidad del dual.*

Supongamos que existe un operador tauberiano inyectivo $T\colon X \longrightarrow Y$. Si Y satisface $\mathcal{P}$, también X satisface $\mathcal{P}$.

Demostración. (i) Fue probado en la Proposición 7.1.3.

(ii) Similar a la de (i), usando cierta caracterización geométrica de la propiedad de Radon-Nikodým (ver [36]).

(iii) Consecuencia directa de la definición de operador tauberiano.

(iv) Basta notar que, como el operador residuo $T^{co}\colon X^{co} \longrightarrow Y^{co}$ es inyectivo, se verifica

$$\dim X^{co} \leq \dim Y^{co} < \infty.$$

(v) Se sigue de (iii) y de que las restricciones de un operador tauberiano son también operadores tauberianos.

(vi) Sea (x_n) una sucesión débilmente de Cauchy en X. Como Y es débilmente sucesionalmente completo, (Tx_n) es débilmente convergente. Luego, por ser T tauberiano e inyectivo, (x_n) es también débilmente convergente.

(vii) Como el espacio ℓ_1 no tiene subespacios reflexivos de dimensión infinita, las restricciones de T a subespacios isomorfos a ℓ_1 son siempre isomorfismos. Luego Y tiene subespacios isomorfos a ℓ_1 si X los tiene.

(viii) Similar a la de (vii).

(ix) Consecuencia de (iii) y (vi), argumentando como en la demostración de (v).

(x) Como $T(B_X)$ es separable, podemos seleccionar una sucesión (x_n) en B_X tal que (Tx_n) es densa en $T(B_X)$.

Fijemos $x \in B_X$ y seleccionemos (x_{n_k}) tal que (Tx_{n_k}) converge a Tx. Por el Corolario 4.1.1, $(x_{n_k} - x)$ es débilmente nula. Como la clausura débil y la clausura en norma coinciden para conjuntos convexos, el conjunto de las combinaciones convexas con coeficientes racionales de (x_n) es denso en B_X; luego X es separable.

(xi) Supongamos Y^* separable. Como $N(T^{**}) = N(T) = \{0\}$, el rango de T^* es denso en X^*; luego X^* es separable. □

Corolario 7.2.1. *Sea $\mathcal{P}$ una de las nueve primeras propiedades del enunciado del Teorema 7.2.1. Supongamos que existe un operador tauberiano $T\colon X \longrightarrow Y$. Si Y satisface $\mathcal{P}$, también X satisface $\mathcal{P}$.*

Demostración. Consideramos la descomposición $T = \widetilde{T}Q_{N(T)}$, donde $\widetilde{T}\colon X/N(T) \longrightarrow Y$ es el operador inyectivo asociado a T.

Como $\widetilde{T}$ es un operador tauberiano, el Teorema 7.2.1 implica que el espacio cociente $X/N(T)$ satisface $\mathcal{P}$. Luego, para acabar la demostración, basta observar que en los nueve casos que estamos considerando la propiedad $\mathcal{P}$ verifica:

$$M \text{ reflexivo, } X/M \text{ satisface } \mathcal{P} \Longrightarrow X \text{ satisface } \mathcal{P}.$$

En la monografía [16] podemos encontrar abundante información sobre estas propiedades de tipo tres espacios. □

Observación 7.2.1. *El Corolario anterior falla para las dos últimas propiedades consideradas en el Teorema 7.2.1, porque el núcleo de T o su espacio dual pueden no ser separables.*

Propiedades de conjuntos

Aquí consideramos resultados que pueden considerarse "localizaciones" de los incluidos en el Teorema 7.2.1. Las demostraciones no son muy distintas.

Definición 7.2.1. *Sea A un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach X.*

Decimos que A tiene la propiedad de Krein-Milman *si cada subconjunto convexo y cerrado de A coincide con la envoltura convexa y cerrada de sus puntos extremos.*

Decimos que A tiene la propiedad de Radon-Nikodým *si para cada subconjunto no vacío, convexo y cerrado K de A y cada $\varepsilon > 0$ existe un punto $x_0 \in K$ que no pertenece a la envoltura convexa del conjunto $\{y \in K : \|x_0 - y\| \geq \varepsilon\}$.*

Nótese que un espacio de Banach X tiene la KMP o la RNP si y solo si su bola unidad B_X tiene la propiedad correspondiente.

Teorema 7.2.2. *Sean X e Y espacios de Banach y A un subconjunto convexo, cerrado y acotado de X. Denotemos por $\mathcal{P}$ una de las siguientes propiedades de conjuntos:*

(i) *propiedad de Krein-Milman;*

(ii) *propiedad de Radon-Nikodým;*

(iii) *w^*-clausura débilmente compacta;*

(iv) *ser débilmente sucesionalmente completo;*

(v) *no contener sucesiones equivalentes a la base (e_n) de ℓ_1;*

(vi) *no contener sucesiones equivalentes a la base (e_n) de c_0;*

(vii) *separabilidad.*

Supongamos que existe un operador tauberiano inyectivo $T\colon X \longrightarrow Y$. Si $T(A)$ satisface $\mathcal{P}$, también A satisface $\mathcal{P}$.

En la tesis de Neidinger [66] podemos encontrar la demostración detallada de los resultados del teorema anterior.

7.3. Propiedad de aproximación y álgebras de Calkin

Recordemos que un espacio de Banach X tiene la *propiedad de aproximación (A.P.)* si, para todo subconjunto compacto K de X y todo $\varepsilon > 0$, existe un operador de rango finito $T\colon X \longrightarrow X$ de modo que $\sup_{x\in K} \|Tx - x\| < \varepsilon$.

Este concepto fue introducido para investigar si todo espacio de Banach separable tiene base. Es fácil ver que todo espacio con base satisface la A.P. Sin embargo, Enflo [22] probó que existen espacios separables que no verifican la A.P.; luego no tienen base.

La versión isométrica de la factorización DFJP nos permitirá obtener caracterizaciones de la A.P. Para hacerlo, necesitaremos los siguientes conceptos.

Definición 7.3.1. *Un subspacio cerrado M de un espacio de Banach X es un* ideal en X *si su anulador $M^\perp$ es núcleo de una proyección de norma uno actuando en X^*.*

Definición 7.3.2. *Decimos que una red de operadores (T_α) en $\mathcal{L}(X,Y)$* converge fuertemente *a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ si la red $(T_\alpha x)$ converge a Tx para todo $x \in X$.*

Denotemos por $\mathcal{K}_Y$ y $\mathcal{W}_Y$ las familias de los conjuntos absolutamente convexos de la bola unidad B_Y que son respectivamente compactos y débilmente compactos.

Para cada conjunto $K \in \mathcal{W}_Y$, consideraremos el espacio F_K y el operador $J_K \colon F_K \longrightarrow Y$ que aparecen en la construcción de la versión isométrica de la factorización DFJP (con $f(a) = 1$), presentada en la Sección 6.2.

Teorema 7.3.1. *Sea Y un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(a) *Y satisface la A.P.*

(b) *$\mathcal{F}(Y_K, Y)$ es un ideal en $\mathcal{L}(Y_K, Y)$ para todo $K \in \mathcal{W}_Y$.*

(c) *Para todo $K \in \mathcal{W}_Y$, existe una red (A_α) en $\mathcal{F}(Y_K, Y)$ que converge fuertemente a J_K y verifica $\sup_\alpha \|A_\alpha\| \leq \|J_K\|$.*

(d) *Para todo $K \in \mathcal{K}_Y$, existe una red (A_α) en $\mathcal{F}(Y_K, Y)$ que converge en norma a J_K*

Demostración. Véase [59, Theorem 1.2]. □

Como aplicación del Teorema 7.3.1, obtenemos las siguientes caracterizaciones de la A.P. para un espacio de Banach y su dual. Las demostraciones, así como otras versiones de estos resultados, pueden encontrarse en [59].

Teorema 7.3.2. *Sea Y un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(a) *Y satisface la A.P.*

(b) *$\mathcal{F}(X, Y)$ es un ideal en $\mathcal{W}(X, Y)$ para todo espacio de Banach X.*

(c) *$\mathcal{F}(X, Y)$ es un ideal en $\mathcal{W}(X, Y)$ para todo espacio de Banach separable y reflexivo X.*

Teorema 7.3.3. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(a) *X^* satisface la A.P.*

(b) *$\mathcal{F}(X, Y)$ es un ideal en $\mathcal{W}(X, Y)$ para todo espacio de Banach Y.*

(c) *$\mathcal{F}(X, Y)$ es un ideal en $\mathcal{W}(X, Y)$ para todo espacio de Banach separable y reflexivo Y.*

Álgebras de Calkin

Sea X un espacio de Banach. Como el conjunto de los operadores compactos $\mathcal{K}(X)$ es un ideal bilátero cerrado, el cociente $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$ es un álgebra Banach. Se denomina *álgebra de Calkin* de X.

El interés del álgebra de Calkin en teoría de Fredholm proviene del hecho de que un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ es Fredholm si y solo si la clase de T es invertible en el álgebra cociente $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$.

Por otro lado, para todo $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ se define la *norma esencial* mediante

$$\|T\|_e := \operatorname{dist}(T, \mathcal{K}(X,Y));$$

es decir, $\|T\|_e$ es la norma de la clase del operador T en el espacio cociente $\mathcal{L}(X,Y)/\mathcal{K}(X,Y)$.

En [58], Lebow y Schechter investigaron los operadores semi-Fredholm utilizando la norma esencial junto con un concepto de medida de no compacidad para los subconjuntos de un espacio de Banach. Su objetivo era extender el concepto de operador en Φ_+ ó Φ_- a elementos de un álgebra de Banach.

Definición 7.3.3. *Sea C un subconjunto acotado de un espacio de Banach X. La* medida de no compacidad $\gamma(C)$ *de C se define mediante la expresión*

$$\gamma(C) := \text{ínf}\{\varepsilon > 0\colon\ C \subset D + \varepsilon B_X\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los subconjuntos compactos D del espacio X.

Utilizando la cantidad $\gamma(\cdot)$, podemos definir una medida de no compacidad para operadores.

Definición 7.3.4. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se define*

$$\gamma(T) := \gamma(T(B_X)).$$

Obviamente,

$$T \text{ compacto } \iff \|T\|_e = 0 \iff \gamma(T) = 0.$$

Lebow y Schechter probaron el siguiente resultado:

Teorema 7.3.4. *Sea* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$*.*

(i) $T \in \Phi_+$ *si y solo si existe una constante* $C > 0$ *tal que, para todo espacio de Banach* Z *y todo* $S \in \mathcal{L}(Z, X)$*,* $\gamma(S) \leq C\gamma(TS)$*.*

(ii) $T \in \Phi_-$ *si y solo si existe una constante* $C > 0$ *tal que, para todo espacio de Banach* Z *y todo* $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$*,* $\gamma(S) \leq C\gamma(ST)$*.*

La demostración puede encontrase en [58, Teoremas 3.1, 4.8 y 5.5].

Es fácil probar que $\gamma(T) \leq \|T\|_e$ para todo $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Lebow y Schechter plantearon el problema de la equivalencia de $\gamma(\cdot)$ y $\|\cdot\|_e$ en $\mathcal{L}(X, Y)$; es decir, si existe una constante $C > 0$ tal que $\|T\|_e \leq C\gamma(T)$ para todo $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Fueron capaces de dar una respuesta positiva en el caso en que Y verifica una variante de la A.P.

Definición 7.3.5. *Se dice que un espacio de Banach* Y *satisface la* propiedad de aproximación compacta acotada (B.C.A.P.) *si existe una constante* $\lambda \geq 1$ *tal que para todo subconjunto compacto* D *de* X *y todo* $\varepsilon > 0$*, existe un operador compacto* $K \colon X \longrightarrow X$ *tal que*

$$\|K - I\| \leq \lambda \quad y \quad \sup_{x \in D} \|Kx - x\| < \varepsilon.$$

Posteriormente, Astala y Tylli [8] probaron que la B.C.A.P. del segundo espacio era necesaria para la equivalencia de $\gamma(\cdot)$ y $\|\cdot\|_e$. Obtuvieron el siguiente resultado:

Teorema 7.3.5. *Un espacio de Banach* Y *verifica la B.C.A.P. si y solo si existe una constante* $C > 0$ *tal que para todo espacio de Banach* X*, cada* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *verifica* $\|T\|_e \leq C\gamma(T)$*.*

Demostración. Véase [58, Theorem 3.6] y [8, Theorem 2.3]. $\square$

Por otro lado, Astala y Tylli investigaron en [9] los operadores tauberianos utilizando medidas de no compacidad débiles para conjuntos y para operadores, una norma esencial débil y un concepto de propiedad de aproximación débil para espacios de Banach. A continuación, describiremos sus resultados.

Definición 7.3.6. *Sea C un subconjunto acotado de un espacio de Banach X. La* medida de no compacidad débil $\omega(C)$ *de C se define mediante la expresión*

$$\omega(C) := \text{ínf}\{\varepsilon > 0\colon\ C \subset D + \varepsilon B_X\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los subconjuntos débilmente compactos D de X.

De este modo, podemos definir dos medidas de no compacidad débil para operadores.

Definición 7.3.7. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Definimos la* norma esencial débil *$\|T\|_w$ de T como la norma de la clase del operador T en el espacio cociente $\mathcal{L}(X,Y)/\mathcal{W}(X,Y)$.*

Además, definimos $\omega(T) := \omega(T(B_X))$.

Es fácil ver que $\omega(T) \leq \|T\|_w$ para todo $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Definición 7.3.8. *Sea $\lambda \geq 1$. Decimos que un espacio de Banach Y satisface la* λ-propiedad de aproximación débil (λ-W.A.P.) *si para todo subconjunto débilmente compacto $D \subset Y$ y todo $\varepsilon > 0$, existe un operador $K \in \mathcal{W}(Y)$ de modo que*

$$\sup_{y\in D} \|y - Ky\| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|I - K\| \leq \lambda.$$

Decimos que el espacio Y satisface la W.A.P. *si satisface la λ-W.A.P. para algún $\lambda \geq 1$.*

Veamos que la equivalencia de $\omega(\cdot)$ y $\|\cdot\|_w$ en $\mathcal{L}(X,Y)$ caracteriza la W.A.P. del segundo espacio.

Teorema 7.3.6. *Sea Y un espacio de Banach.*

(i) *Si Y satisface la λ-W.A.P., $\|T\|_w \leq \lambda\omega(T)$ para todo espacio de Banach X y todo $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

(ii) *Si Y no satisface la λ-W.A.P. para ningún $\lambda \geq 1$, existe un espacio de Banach X y una sucesión normalizada de operadores (T_n) en $\mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\omega(T_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$.*

Demostración. Véase [9] ó [36]. □

Como dijimos antes, el primer espacio de Banach separable que no satisfacía la A.P. fue construido por Enflo en 1973. La construcción es muy complicada y el ejemplo es muy diferente a los espacios de Banach clásicos. Sin embargo, en el caso de la W.A.P., existen espacios clásicos que no la satisfacen. El siguiente resultado nos permitirá mostrar algunos ejemplos.

Proposición 7.3.1. *Sea Y un espacio de Banach que contiene una sucesión débilmente convergente pero no convergente. Si $\mathcal{W}(Y) \subset \mathcal{C}(Y)$, el espacio Y no satisface la W.A.P.*

Demostración. Sea (y_n) una sucesión débilmente convergente, no convergente en Y. Claramente podemos suponer que (y_n) es débilmente nula, está contenida en la bola unidad B_Y y existe una constante $c > 0$ tal que $\|y_m - y_n\| > c$ para $m \neq n$.

Nótese que $D := \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ es un subconjunto débilmente compacto de Y y que, si $K : Y \longrightarrow Y$ es un operador débilmente compacto, (Ky_n) converge en norma a 0. Por tanto $\sup_{y \in D} \|y - Ky\| \geq c$; luego Y no satisface la W.A.P. □

Un espacio de Banach X satisface la *propiedad de Dunford-Pettis* si $\mathcal{W}(X, Y) \subset \mathcal{C}(X, Y)$ para todo espacio de Banach Y.

Como los espacios $C[0, 1]$, $L_\infty(0, 1)$ y $L_1(0, 1)$ satisfacen la propiedad de Dunford-Pettis [5, Theorem 5.4.5] y contienen sucesiones equivalentes a la base (e_n) en ℓ_2, el siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la Proposición 7.3.1.

Corolario 7.3.1. *Los espacios $C[0, 1]$, $L_\infty(0, 1)$ y $L_1(0, 1)$ no satisfacen la W.A.P.*

En las referencias [68] y [73], podemos encontrar algunos resultados recientes sobre la W.A.P., incluyendo nuevos ejemplos de espacios de Banach clásicos que no la verifican.

Bibliografía

[1] P. Aiena, *Fredholm and local spectral theory, with application to multipliers.* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.

[2] P. Aiena, M. González, A. Martínez-Abejón, *Operator semigroups in Banach space theory.* Boll. Unione Mat. Ital. (8) **4** (2001), 157–205.

[3] P. Aiena, M. González, A. Martínez-Abejón, *On the operators which are invertible modulo an operator ideal.* Bull. Austral. Math. Soc. **64** (2001), 233–243.

[4] P. Aiena, M. González, A. Martínez-Abejón, *Incomparable Banach spaces and semigroups of operators.* Arch. Math. **79** (2002), 372–378.

[5] F. Albiac, N. Kalton, *Topics in Banach space theory.* Springer, New York, 2006.

[6] T. Álvarez, M. González, *Some examples of tauberian operators.* Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 1023–1027.

[7] S. A. Argyros, V. Felouzis, *Interpolating hereditarily indecomposable Banach spaces.* J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), 243–294.

[8] K. Astala, H.-O. Tylli, *On the bounded compact approximation property and measures of noncompactness.* J. Funct. Anal. **70** (1987), 388–401.

[9] K. Astala, H.-O. Tylli, *Seminorms related to weak compactness and to tauberian operators.* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **107** (1990), 365–375.

[10] B. Beauzamy, *Opérateurs uniformément convexifiants.* Studia Math. **57** (1976), 103–139.

[11] B. Beauzamy, *Introduction to Banach spaces and their geometry.* North Holland, Amsterdam, 1982.

[12] E. Behrends, *On the principle of local reflexivity.* Studia Math. **100** (1991), 109–128.

[13] C. Bessaga, A. Pełczyński, *On bases and unconditional converging series in Banach spaces spaces.* Studia Math. **17** (1958), 151–164.

[14] F. Bombal, B. Hernando, *A double-dual characterization of Rosenthal and semi-tauberian operators.* Proc. R. Ir. Acad **95A** (1995), 69–75.

[15] J. Bourgain, *New classes of $\mathcal{L}^p$-spaces.* Lecture Notes in Math. 889; Springer, Berlin, New York, 1981.

[16] J. M. F. Castillo, M. González, *Three-space problems in Banach space theory.* Lecture Notes in Math. 1667; Springer, Berlin, 1997.

[17] W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson, A. Pełczyński, *Factoring weakly compact operators.* J. Funct. Anal. **17** (1974), 311–327.

[18] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces.* Springer, New York, 1984.

[19] J. Diestel, J. J. Uhl, Jr., *Vector measures.* Math. Surveys 15; Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977.

[20] D. van Dulst, *Reflexive and superreflexive Banach spaces.* Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1978.

[21] D. van Dulst, *The geometry of Banach spaces with the Radon-Nikodým property.* Supplemento ai rendiconti del Circolo matematico di Palermo Serie II - numero 7, Palermo, 1985.

[22] P. Enflo, *A counterexample to the approximation property in Banach spaces.* Acta Math **130** (1973), 309–317.

[23] N. Ghoussoub, W. B. Johnson, *Counterexamples to several problems on the factorization of bounded linear operators.* Proc. Amer. Math. Soc. **92** (1984), 233–238.

[24] M. González, *Dual results of factorization for operators.* Ann. Acad. Sci. Fennicae Math. **18** (1993), 3–11.

[25] M. González, *The perturbation classes problem in Fredholm theory.* J. Funct. Anal. **200** (2003), 65–70.

[26] M. González, *The perturbation classes of some semigroups associated to an operator ideal.* Rendiconti Circ. Mat. Palermo, Ser. II **73** (2004), 53–75.

[27] M. González, J. Gutiérrez, *Injective factorization of holomorphic mappings.* Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1715–1721.

[28] M. González, J. Gutiérrez, *Surjective factorization of holomorphic mappings.* Comment. Math. Univ. Carolinae **41** (2000), 469–476.

[29] M. González, J. Gutiérrez, *Factoring compact sets of compact operators.* J. Math. Anal. Appl. **255** (2001), 510–518.

[30] M. González, A. Martínez-Abejón, *Supertauberian operators and perturbations.* Arch. Math. **64** (1995), 423–433.

[31] M. González, A. Martínez-Abejón, *Tauberian operators on $L_1(\mu)$-spaces.* Studia Math. **125** (1997), 289–303.

[32] M. González, A. Martínez-Abejón, *Ultrapowers and semi-Fredholm operators.* Boll. Unione Mat. Ital. **11-B** (1997), 415–433.

[33] M. González, A. Martínez-Abejón, *Lifting unconditionally converging series and semigroups.* Bull. Austral. Math. Soc. **57** (1998), 135–146.

[34] M. González, A. Martínez-Abejón, *Ultrapowers and semigroups of operators.* Integral Equations Operator Theory **37** (2000), 32–47.

[35] M. González, A. Martínez-Abejón, *The origin of Tauberian operators.* Divulg. Mat. **15** (2007), 59–69.

[36] M. González, A. Martínez-Abejón, *Tauberian operators.* Operator Theory: Advances and applications, vol. 194; Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.

[37] M. González, A. Martínez-Abejón, J. Pello, *Conjugate operators that preserve the nonconvergence of bounded martingales.* J. Funct. Anal. **252** (2007), 566–580.

[38] M. González, A. Martínez-Abejón, J. Pello, *$\mathcal{L}_1$-spaces with the Radon-Nikodým property containing reflexive subspaces.* Preprint (2009), 1–11.

[39] M. González, V. M. Onieva, *Semi-Fredholm operators and semigroups associated with some classical operator ideals.* Proc. R. Ir. Acad. **88A** (1988), 35–38.

[40] M. González, V. M. Onieva, *Semi-Fredholm operators and semigroups associated with some classical operator ideals II.* Proc. R. Ir. Acad. **88A** (1988), 119–124.

[41] M. González, V. M. Onieva, *Characterizations of tauberian operators and other semigroups of operators.* Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 399–405.

[42] M. González, E. Saksman, H.-O. Tylli, *Representing non-weakly compact operators.* Studia Math. **113** (1995), 289–303.

[43] W.T. Gowers, *An infinite Ramsey theorem and some Banach-space dichotomies.* Ann. of Math. (2) **156** (2002), 797–833.

[44] W.T. Gowers, B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem.* J. Amer. Math. Soc **6** (1993), 851–874.

[45] A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$.* Canad. J. Math. **5** (1953), 129–173.

[46] S. Heinrich, *Ultraproducts in Banach space theory.* J. Reine Angew. Math. **313** (1980), 72–104.

[47] S. Heinrich, *Closed operator ideals and interpolation.* J. Funct. Anal. **35** (1980), 397–411.

[48] S. Heinrich, *Finite representability and super-ideals of operators.* Dissertationes Math. **172** (1980), 5–37.

[49] B. Hernando, *Some properties of the second conjugate of a tauberian operator.* J. Math. Anal. Appl. **228** (1998), 60–65.

[50] J. H. Holub, *Characterizations of tauberian operators and related operators on Banach spaces.* J. Math. Anal. Appl. **178** (1993), 280–288.

[51] R. C. James, *Weak compactness and reflexivity.* Israel J. Math. **2** (1964), 101–119.

[52] R. C. James, *Reflexivity and the sup of linear functionals.* Israel J. Math. **13** (1972), 289–300.

[53] H. Jarchow, *Locally convex spaces.* Teubner, Stuttgart, 1981.

[54] H. Jarchow, *On certain locally convex topologies on Banach spaces.* In: K. Bierstedt and B. Fuchssteiner (eds) Functional analysis: Surveys and recent results III, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[55] H. Jarchow, *Weakly compact operators on $C(K)$ and C^*-algebras.* In: H. Hogbe-Nlend (ed) Functional analysis and its applications, World Scientific, Singapore, 1988.

[56] M. I. Kadec, A. Pełczyński, *Basic sequences, bi-orthogonal systems and norming sets in Banach and Fréchet spaces.* Studia Math. **25** (1965), 297–323. (Russian)

[57] N. Kalton, A. Wilansky, *Tauberian operators on Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **57** (1976), 251–255.

[58] A. Lebow, M. Schechter, *Semigroups of operators and measures of noncompactness.* J. Funct. Anal. **7** (1971), 1–26.

[59] A. Lima, O. Nygaard, E. Oja, *Isometric factorization of weakly compact operators and the approximation property.* Israel J. Math. **119** (2000), 325–348.

[60] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I. Sequence spaces.* Springer, Berlin, 1977.

[61] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces II. Function spaces.* Springer, Berlin, 1979.

[62] D. H. Martin, J. Swart, *A characterization of semi-Fredholm operators defined on almost reflexive spaces.* Proc. R. Ir. Acad. **86A** (1986), 91–93.

[63] A. Martínez-Abejón, *Semigrupos de operadores y ultrapotencias.* Ph. D. Thesis, Universidad de Cantabria, Santander, 1994.

[64] A. Martínez-Abejón, J. Pello, *Finite representability of the Yang operator.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28** (2003), 169–180.

[65] A. Martínez-Abejón, J. Pello, *Finite representability of operators.* J. Math. Anal. Appl. **278** (2003), 527–541.

[66] R. Neidinger, *Properties of tauberian operators on Banach spaces.* Ph. D. Thesis, The University of Texas at Austin, Austin TX, 1984.

[67] R. Neidinger, H. P. Rosenthal, *Norm-attainment of linear functionals on subspaces and characterizations of tauberian operators.* Pacific J. Math. **118** (1985), 215–228.

[68] E. Odell, H.-O. Tylli, *Weakly compact approximation in Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 1125–1159.

[69] J. Pello, *Semigrupos de operadores asociados a la propiedad de Radon-Nikodým.* Ph. D. Thesis, Universidad de Oviedo, 2005.

[70] A. Pietsch, *Operator ideals.* North Holland, Amsterdam, 1980.

[71] H. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing ℓ_1.* Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **71** (1974), 2411–2413.

[72] H. Rosenthal, *On wide-(s) sequences and their applications to certain classes of operators.* Pacific J. Math. **189** (1999), 311–338.

[73] E. Saksman, H.-O. Tylli, *New examples of weakly compact approximation in Banach spaces.* Ann. Acad. Sci. Fennicae Math. **33** (2008), 429–438.

[74] W. Schachermayer, *For a Banach space isomorphic to its square the Radon-Nikodým property and the Krein-Milman property are equivalent.* Studia Math. **81** (1985), 329–339.

[75] D. G. Tacon, *Generalized semi-Fredholm transformations.* J. Austral. Math. Soc. **34** (1983), 60–70.

[76] D. G. Tacon, *Generalized Fredholm transformations.* J. Austral. Math. Soc. Ser. A **37** (1984), 89–97.

[77] K. W. Yang, *The generalized Fredholm operators.* Trans. Amer. Math. Soc. **216** (1976), 313–326.

[78] K. W. Yang, *Operators invertible modulo the weakly compact operators.* Pacific J. Math. **71** (1977), 559–564.

[79] B. Yood, *Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continuous transformation.* Duke Math. J. **18** (1951), 599–612.