

XXII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

---

POLINOMIOS ORTOGONALES  
NO ESTÁNDAR.  
PROPIEDADES ALGEBRAICAS  
Y ANALÍTICAS

Francisco Marcellán

Yamilet Quintana

---

MÉRIDA, VENEZUELA, 9 AL 15 DE SEPTIEMBRE DE 2009



XXII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

---

POLINOMIOS ORTOGONALES NO ESTÁNDAR.  
PROPIEDADES ALGEBRAICAS Y ANALÍTICAS

Francisco Marcellán

Universidad Carlos III de Madrid. España

pacomarc@ing.uc3m.es

Yamilet Quintana

Universidad Simón Bolívar. Venezuela

yquintana@usb.ve

---

MÉRIDA, VENEZUELA, 9 AL 15 DE SEPTIEMBRE DE 2009

## XXII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las siguientes instituciones: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana.

La XXI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de Los Andes (CEP, CDCHT, Facultad de Ciencias y Departamento de Matemáticas) y el Rectorado de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado.

2000 Mathematics Subject Classification: 42C05, (33C25, 30E05).

©Ediciones IVIC

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

**POLINOMIOS ORTOGONALES NO ESTÁNDAR. PROPIEDADES ALGEBRAICAS Y ANALÍTICAS**

Francisco Marcellán - Yamilet Quintana

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas

Preprensa e impresión: Editorial Texto

Depósito legal If66020095102413

ISBN 978-980-261-109-6

Caracas, Venezuela

2009

# CONTENIDO

PREFACIO	i
<b>1 POLINOMIOS ORTOGONALES NO ESTÁNDAR</b>	<b>1</b>
1.1 Ortogonalidad estándar . . . . .	1
1.2 Ortogonalidad no estándar . . . . .	5
1.2.1 Ortogonalidad sobre la circunferencia unidad . . .	5
1.2.2 Ortogonalidad tipo Sobolev . . . . .	14
1.2.3 Comportamiento asintótico . . . . .	19
1.2.4 Polinomios ortogonales matriciales . . . . .	20
1.2.5 Ortogonalidad Múltiple: Tipo I y Tipo II . . . . .	22
1.2.6 Ortogonalidad no hermitiana . . . . .	23
1.3 Ejercicios . . . . .	24
<b>2 POLINOMIOS ORTOGONALES SOBRE LA CIRCUNFERENCIA UNIDAD. TRANSFORMACIONES ESPECTRALES</b>	<b>29</b>
2.1 Funciones de Carathéodory y funciones de Schur . . . . .	30
2.1.1 El operador multiplicación y su representación matricial: matrices de Hessenberg . . . . .	31
2.1.2 Transformaciones espectrales en la circunferencia unidad . . . . .	35
2.1.3 Transformación de Aleksandrov . . . . .	37
2.1.4 Polinomios asociados de orden $N$ en la circunferencia unidad . . . . .	37
2.1.5 Los polinomios antiasociados de orden $N$ en la circunferencia unidad . . . . .	39
2.1.6 Transformación de Christoffel . . . . .	40
2.1.7 Transformación de Uvarov . . . . .	57

2.1.8	Transformación de Geronimus . . . . .	59
2.2	Transformaciones $\mathcal{L}_R = \Re\mathfrak{e}[P_n(z)]\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_I = \Im\mathfrak{m}[P_n(z)]\mathcal{L}$ . . . . .	62
2.2.1	Funciones de Carathéodory. . . . .	66
2.2.2	Ejemplos . . . . .	71
2.3	La teoría CMV . . . . .	76
2.4	Ejercicios . . . . .	81
<b>3</b>	<b>POLINOMIOS ORTOGONALES Y ESPACIOS DE SOBOLEV CON PESO</b>	<b>85</b>
3.1	Medidas vectoriales soportadas en intervalos acotados . .	85
3.1.1	Propiedades algebraicas y estudio de asintóticas de polinomios ortogonales . . . . .	86
3.1.2	Noción de coherencia y asintótica relativa exterior	93
3.1.3	Distribución de ceros . . . . .	97
3.2	Medidas vectoriales soportadas en intervalos no acotados .	98
3.2.1	Propiedades asintóticas . . . . .	101
3.2.2	Polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev. Un caso no diagonal . . . . .	111
3.3	Series de Fourier relativas a polinomios ortogonales en espacios de Sobolev . . . . .	141
3.4	Ejercicios . . . . .	144
<b>4</b>	<b>PROBLEMAS ABIERTOS</b>	<b>147</b>
4.1	Desarrollos en series de Fourier-Sobolev . . . . .	147
4.2	Transformaciones espectrales sobre la circunferencia unidad . . . . .	147
4.3	Asintótica y localización de ceros . . . . .	148
<b>5</b>	<b>APÉNDICE</b>	<b>149</b>
	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>153</b>
	<b>INDICE ALFABÉTICO</b>	<b>159</b>

# PREFACIO

El desarrollo de la Teoría de Polinomios Ortogonales (TPO), se ha focalizado en dos direcciones, íntimamente relacionadas:

- Aspectos algebraicos.
- Aspectos analíticos.

La primera dirección tiene una estrecha relación con la Teoría de Funciones Especiales, Combinatoria y Algebra Lineal, y está principalmente dedicada al estudio de sistemas ortogonales concretos o jerarquías de dichos sistemas, tales como los polinomios de Jacobi, de Hahn, de Askey-Wilson, etc. La teoría de polinomios ortogonales discretos y los  $q$ -análogos también se encuentran en esta dirección de la TPO, así como también muchos de los avances actuales en el estudio de polinomios ortogonales en varias variables.

La segunda dirección está caracterizada por el uso de métodos propios del Análisis Matemático o métodos relacionados con él. Las propiedades generales de sistemas de polinomios ortogonales abarcan una pequeña parte de estos aspectos analíticos, mientras que la parte más amplia es cubierta por dos ramas extremadamente ricas: la TPO sobre la recta real y la TPO sobre la circunferencia unidad.

Históricamente, la aparición de los polinomios ortogonales clásicos, en el caso real, y presentados en la forma de fracciones continuas se remonta al siglo XVIII, pero su amplio desarrollo tuvo lugar en el siglo XIX y principios del siglo XX, mientras que los polinomios sobre la circunferencia unidad son mucho más recientes, dado que aparecen por primera vez en los trabajos de Szegő y de Geronimus, en la primera mitad del siglo XX. Las monografías [60], [61] presentan de manera exhaustiva el desarrollo de lo sucedido en la TPO sobre la circunferencia unidad desde entonces.

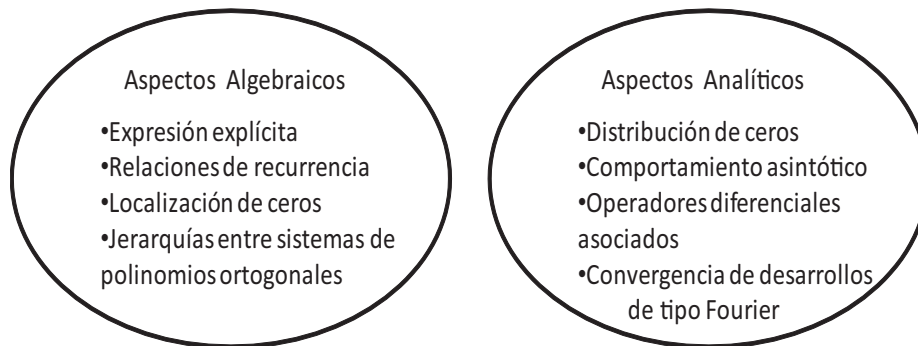


Figura 1: Aspectos algebraicos y analíticos presentes en la TPO.

La conexión de la TPO con otras áreas de la Matemática, tanto desde una perspectiva teórica como de sus aplicaciones es digna de ser resaltada. Entre ellas, cabe destacar: la teoría de fracciones continuas, teoría de operadores (operadores de Jacobi y Toeplitz), problemas de momentos, funciones analíticas (conjetura de Bieberbach), interpolación, aproximación polinómica y racional (en particular, la aproximación de Padé), cuadratura gaussiana y sus extensiones, métodos espectrales para el análisis numérico de problemas de frontera en ecuaciones diferenciales y derivadas parciales, teoría de potencial electrostático, mecánica cuántica, entropía de información, funciones especiales, teoría de números (irracionalidad y trascendencia), teoría de grafos, combinatoria, matrices aleatorias, procesos estocásticos (procesos de nacimiento y muerte, teoría de la predicción), transformada de Radon, teoría de control (controlabilidad de ecuaciones de Laguerre o de Jacobi), tomografía computarizada, etc.

Esta monografía tiene como objetivo principal presentar el estado del arte de la teoría de polinomios ortogonales asociados a productos escalares en los siguientes contextos:

1. Medidas de probabilidad soportadas sobre la circunferencia unidad.
2. Medidas vectoriales soportadas en la recta real y espacios de Sobolev.

Centraremos nuestra atención en las propiedades analíticas de dichos polinomios, con especial énfasis en sus estimaciones asintóticas fuertes,



del cociente y raíz  $n$ -ésima, así como el comportamiento de sus ceros y los aspectos computacionales vinculados a los mismos.

Con este curso también se completa una serie de contribuciones relativas a ortogonalidad clásica y ortogonalidad y cuadratura sobre la circunferencia unidad presentada en las XIV y XVII Escuelas Venezolanas de Matemática, respectivamente, (ver [19] y [43]).

El material está organizado de la siguiente manera: En el primer capítulo, se desarrollan las nociones básicas necesarias sobre polinomios ortogonales no estándar. El segundo capítulo está dedicado a polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad, mientras que el tercer capítulo comprende el estudio de polinomios ortogonales en espacios de Sobolev con peso. El cuarto capítulo contiene algunos problemas abiertos.

Cada uno de los capítulos de esta monografía se divide en secciones. La numeración de cada resultado (lema, proposición, teorema o corolario) esta en concordancia con la sección respectiva. Además, la numeración de las fórmulas está en correspondencia con el capítulo donde se encuentran. Al final de cada capítulo, se presenta un grupo de ejercicios relacionados con sus contenidos. La conclusión de cada demostración se indica mediante el símbolo ■.

Finalmente, queremos agradecer al comité organizador del XXII Escuela Venezolana de Matemáticas, la oportunidad de dictar este curso y esperamos que este material, sirva de guía, estímulo y referencia, a todas aquellas personas que tengan la oportunidad de leerlo.

Francisco Marcellán y Yamilet Quintana.



# NOTACIÓN

$\Phi_n(0)$	coeficientes de Verblunsky.
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	números enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente.
$\mathbb{D}$	disco unidad.
$\mathbb{I}$	subconjunto no finito de $\mathbb{R}$ .
$\mathbb{T}$	circunferencia unidad.
$\mathbb{P}$	espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes reales.
$\mathbb{P}_n$	subespacio vectorial de todos los polinomios de grado a lo sumo $n$ .
$\mathbb{P}(\mathbb{C})$	espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes complejos.
$\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$	subespacio de todos los polinomios con coeficientes complejos de grado a lo sumo $n$ .
$\Lambda$	espacio vectorial de los polinomios de Laurent.
$\lambda_\infty(\zeta)$	función de Christoffel.
$\mathcal{L}$	funcional lineal definido positivo (o cuasi-definido).
$\mu$	medida de Borel.
$\text{supp}(\mu)$	soporte de la medida $\mu$ .
$M_x, M_z$	operador multiplicación por la variable $x$ , o por la variable $z$ , respectivamente.
$L^2(\mathbb{T}, \mu)$	funciones de cuadrado integrable con respecto a la medida $\mu$ en la circunferencia unidad.
$\mathbf{D}^\infty$	conjunto de sucesiones $\{\alpha_j\}_{j=0}^\infty$ con $ \alpha_j  < 1$ .
$\mathcal{P}$	conjunto de medidas de probabilidad sobre la circunferencia unidad.
$D(z)$	función de Szegő.
$M(0, 1)$	clase de Nevai.
$K_n(z, y)$	núcleo reproductor de grado $n$ .



# CAPÍTULO 1

## POLINOMIOS ORTOGONALES NO ESTÁNDAR

### 1.1 Ortogonalidad estándar

Sea  $\mathbb{P}$  el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y  $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}$  el subespacio de los polinomios de grado a lo sumo  $n$ . Denotaremos por  $M_x : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  al operador multiplicación por la variable independiente  $x$ , es decir,

$$M_x(p) = xp, \text{ para todo } p \in \mathbb{P}. \quad (1.1)$$

DEFINICION 1.1. Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow [0, \infty)$  un producto interno sobre  $\mathbb{P}$ . Una sucesión de polinomios  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  se llamará sucesión de polinomios ortogonales con respecto al producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  si satisface

1. Para todo  $n \in \mathbb{Z}_+$  se cumple que  $\text{grad}(p_n) = n$ .
2.  $\langle p_n, p_m \rangle = 0$  si  $n \neq m$ , y  $\langle p_n, p_n \rangle \neq 0$

DEFINICION 1.2. Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow [0, \infty)$  un producto interno sobre  $\mathbb{P}$ . Diremos que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno estándar sobre  $\mathbb{P}$ , si el operador  $M_x$  es autoadjunto, es decir,

$$\langle M_x(p), q \rangle = \langle xp, q \rangle = \langle p, xq \rangle = \langle p, M_x(q) \rangle, \text{ para todo } p, q \in \mathbb{P}. \quad (1.2)$$

DEFINICION 1.3. Diremos que una sucesión de polinomios ortogonales  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  es estándar si es ortogonal con respecto a un producto interno estándar sobre  $\mathbb{P}$ .

## EJEMPLO 1.1.1.

1. Sea  $\mu$  una medida de Borel positiva cuyo soporte es un subconjunto  $\mathbb{I}$ , no finito, de la recta real y tal que

$$\int_{\mathbb{I}} |x|^n d\mu(x) < \infty,$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

No es difícil ver que el producto interno  $\langle p, q \rangle_\mu = \int_{\mathbb{I}} p(x)q(x)d\mu(x)$  es un producto interno estándar sobre  $\mathbb{P}$ , que permite definir de manera unívoca una sucesión de polinomios ortogonales mónicos  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  tal que

$$\langle P_n, x^k \rangle_\mu = \int_{\mathbb{I}} P_n(x)x^k d\mu(x) = 0, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.3)$$

La sucesión  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  se denomina **sucesión estándar de polinomios ortogonales mónicos respecto a la medida  $\mu$** .

2. Podemos definir sobre  $\mathbb{P}_n$  un producto interno no estándar de la manera siguiente: Sean  $p, q \in \mathbb{P}_n$ ,

$$p(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i \quad y \quad q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j,$$

donde  $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ ,  $(0 \leq i \leq k)$ ,  $(0 \leq j \leq m)$ ,  $(0 \leq k, m \leq n)$ , y  $a_k b_m \neq 0$ .

Si  $\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^{\min(k,m)} a_i b_i$ , entonces se verifica que

$\langle xp, q \rangle = \sum_{i=0}^{\min(k+1,m)} a_i b_{i+1}$ , mientras que  $\langle p, xq \rangle = \sum_{i=0}^{\min(k,m+1)} a_{i+1} b_i$ , y estas dos sumas, en general, no son iguales.

Una de las propiedades fundamentales, de indudable interés numérico, de los polinomios ortogonales estándar asociados a una medida  $\mu$ , es que se pueden generar de forma recurrente\*.

---

\*Esta relación de recurrencia a tres términos, sigue siendo válida para productos internos estándar.

PROPOSICION 1.1.1. (*Fórmula de recurrencia a tres términos*).

Sea  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión estándar de polinomios ortogonales mónicos respecto a una medida  $\mu$ . Entonces se verifica la siguiente relación de recurrencia a tres términos

$$P_{n+1}(x) = (x - \lambda_n) P_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x), \quad (1.4)$$

siempre que  $n \geq 0$ ,  $P_{-1} = 0$ ,  $\gamma_0 \in \mathbb{R}$  y además,

$$\lambda_n = \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\|P_n\|^2}, \text{ para } n \geq 0 \text{ y}$$

$$\gamma_n = \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} \neq 0, \text{ para } n \geq 1.$$

Recíprocamente, cualquier sucesión de polinomios mónicos en  $\mathbb{P}$  que satisfaga (1.4) con  $\gamma_n$  real positivo y  $\lambda_n$  real, es una sucesión estándar de polinomios ortogonales mónicos respecto a alguna medida  $\mu$  (no necesariamente única)<sup>†</sup>.

En términos matriciales, la relación (1.4) viene dada por

$$x \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \end{pmatrix} = J_n \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \end{pmatrix} + P_n(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

donde  $J_n$  es una matriz tridiagonal

$$J_n = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_1 & \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \lambda_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{n-1} & \lambda_{n-1} \end{pmatrix},$$

conocida con el nombre de matriz mónica de Jacobi de orden  $n$ .

Una consecuencia inmediata de la relación (1.5) es la siguiente

---

<sup>†</sup>Este resultado es conocido como Teorema de Favard.

PROPOSICION 1.1.2. *Si  $x_0$  es un cero de  $P_n$ , entonces es un autovalor de  $J_n$ .*

Obsérvese que la matriz infinita  $J_\infty$  dada por

$$J_\infty = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_1 & \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \gamma_2 & \lambda_2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

satisface la relación

$$x \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = J_\infty \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

$J_\infty$  es conocida en la literatura con el nombre de matriz de Jacobi. A partir de esta matriz podemos introducir un operador  $\mathbf{J} : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+)$  de la forma siguiente: Dada  $\alpha = \{\alpha_j\}_{j \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ , definimos  $\mathbf{J}(\alpha) = \{\beta_i\}_{i \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$  como la sucesión cuyos términos vienen dados por

$$\mathbf{J}(\alpha) = J_\infty \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \alpha_0 + \alpha_1 \\ \gamma_1 \alpha_0 + \lambda_1 \alpha_1 + \alpha_2 \\ \gamma_2 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \alpha_3 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \alpha_{n-2} + \lambda_{n-1} \alpha_{n-1} + \alpha_n \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

es decir,  $\beta_i = \sum_{j=0}^{\infty} u_{ij} \alpha_j$ , donde  $u_{ij}$  representa la entrada  $(i, j)$  de la matriz  $J_\infty$ .

El operador  $\mathbf{J}$  es un operador autoadjunto con respecto al producto interno usual sobre  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$  (ver ejercicio 1, al final del capítulo) y tiene un vector cíclico:  $e_0 = \{1, 0, 0, \dots\}$ . Entonces, por el teorema espectral



$\mathbf{J}$  es unitariamente equivalente al operador multiplicación por  $x$ ,  $M_x$  en  $L^2(\mu)$ , es decir, el operador unitario  $U : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \mathbb{P}$  dado por

$$U(e_n) = \frac{P_n}{\|P_n\|}, \quad e_n = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$$

puede ser extendido a un operador unitario  $\mathbf{U} : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow L^2(\mu)$ , tal que

$$\mathbf{J} = \mathbf{U}^{-1}M_x\mathbf{U}.$$

En este contexto, la medida  $\mu$  se denomina medida espectral asociada a  $\mathbf{J}$ .

## 1.2 Ortogonalidad no estándar

Como cabría esperar, en esta sección describiremos los distintos tipos de ortogonalidad no pertenecientes al caso estándar, intensamente estudiados desde la década de los años ochenta del siglo pasado.

### 1.2.1 Ortogonalidad sobre la circunferencia unidad

El estudio de los polinomios ortogonales con respecto a una medida de probabilidad no trivial, soportada en la circunferencia unidad  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  fue iniciado por G. Szegő en una serie de artículos publicados entre 1915 y 1925 (ver [63]). Posteriormente, Ya. L. Geronimus ([24], [25] y [26]) extendió esta teoría en un contexto más general de ortogonalidad respecto a funcionales lineales, basado en la teoría clásica de funciones de variable compleja. Un eje importante de actividad investigadora en la década de los cincuenta fue el estudio de la conexión con el problema trigonométrico de momentos y la teoría de procesos estocásticos estacionarios discretos ([33]). Más tarde, en los años ochenta, se analizó el problema desde una perspectiva algebraica ligada al problema de factorización de matrices de Hessenberg (la representación matricial del operador de multiplicación respecto a la base de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad) de dimensión finita ([32]). De la misma manera, apareció una abundante bibliografía en teoría de sistemas lineales relacionados con polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad, en el marco de los generadores de espacios

de estado (ver, por ejemplo, [38] y referencias contenidas ahí).

Posteriormente, en la década de los noventa, se desarrolla una teoría constructiva de familias de polinomios ortogonales asociados a perturbaciones de medidas soportadas en la circunferencia unidad (ver [1], [27], [28], [37], [44], [48], [47], entre otros), así como una interpretación basada en la representación matricial del operador de multiplicación respecto a una base ortonormal respecto a medidas soportadas en arcos de la circunferencia unidad ([29], [30]).

La fórmula de recurrencia a tres términos (1.4) es una propiedad característica de los polinomios ortogonales estándar, y se debe al hecho de que para una sucesión estándar de polinomios ortogonales mónicos  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  se satisface

$$\langle M_x(P_n), P_k \rangle = \langle P_n, M_x(P_k) \rangle = 0, \text{ para } k < n - 1. \quad (1.8)$$

En el caso de productos internos complejos, los dos miembros de (1.8), son totalmente diferentes. Por ejemplo, consideremos el siguiente producto interno en el espacio de todos los polinomios con coeficientes complejos  $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ :

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} p(z) \overline{q(z)} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(e^{i\theta}) \overline{q(e^{i\theta})} d\theta. \quad (1.9)$$

Denotando por  $M_z$  al operador multiplicación por  $z$ , es sencillo comprobar que (1.9) no es un producto interno estándar y, por tanto, la sucesión de polinomios ortogonales mónicos  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  asociada a (1.9) no satisface una relación de recurrencia a tres términos como (1.4). Sin embargo,  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  satisface la siguiente relación de recurrencia:

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z), \text{ para todo } n \geq 0.$$

Obsérvese que, en este caso,  $\Phi_n(z) = z^n$ , para todo  $n \geq 0$ .

Como sabemos, la circunferencia unidad  $\mathbb{T}$  es la curva más simple sobre el plano complejo con un número de propiedades adicionales, por lo que los polinomios ortogonales sobre  $\mathbb{T}$  son de particular interés. Si  $\sigma$  es una medida de probabilidad sobre  $\mathbb{T}$  (es decir, una medida cuyo soporte no es un conjunto finito), los polinomios ortogonales mónicos  $\Phi_n(z, \sigma)$

(o simplemente  $\Phi_n(z)$ , cuando no hay posibilidades de confusión) están unívocamente determinados por las relaciones

$$\Phi_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_{n,j}), \quad \int_{\mathbb{T}} z^{-j} \Phi_n(z) d\sigma(z) = 0, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (1.10)$$

De manera que en el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{T}, \sigma)$ , dotado con el producto interno

$$\langle f, g \rangle_{\sigma} = \int_{\mathbb{T}} f(z) \overline{g(z)} d\sigma(z),$$

se tiene que  $\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle_{\sigma} = 0$ , si  $n \neq m$ . Los polinomios ortonormales están dados por  $\varphi_n(z) = \frac{\Phi_n(z)}{\|\Phi_n\|}$ . Obsérvese que la familia ortonormal  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  **puede no ser una base de  $L^2(\mathbb{T}, \sigma)$** . Por ejemplo, si en (1.9)  $\sigma$  es la medida normalizada de Lebesgue entonces  $z^{-1}$  es ortogonal a todo  $\Phi_n(z)$ . Un celebrado resultado de Szegő, establece que  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  es base ortogonal de  $L^2(\mathbb{T}, \sigma)$ , si  $\sigma' \notin L^1(\mathbb{T})$ , donde  $\sigma'$  es la derivada de Radon-Nikodym de  $\sigma$  con respecto a la medida normalizada de Lebesgue soportada en  $\mathbb{T}$ .

Entonces, de (1.10) y del hecho que  $\dim(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) = n + 1$ , se deduce que

$$\deg(P) = n, \quad P \perp z^j, \quad j = 0, \dots, n-1 \Rightarrow P(z) = c\Phi_n(z). \quad (1.11)$$

Sobre  $L^2(\mathbb{T}, \sigma)$  la aplicación  $\Upsilon : L^2(\mathbb{T}, \sigma) \rightarrow L^2(\mathbb{T}, \sigma)$ , dada por  $\Upsilon(f) = f^*$ , donde  $f^*(z) := z^n \overline{f(z)}$  (la cual depende de  $n$ ), está definida de manera natural. El espacio  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  es invariante a izquierda por  $\Upsilon$ , es decir:

$$P(z) = \sum_{j=0}^n \lambda_j z^j \Rightarrow P^*(z) = \sum_{j=0}^n \bar{\lambda}_{n-j} z^j. \quad (1.12)$$

De (1.11) se sigue que

$$\deg(P) = n, \quad P \perp z^j, \quad j = 1, \dots, n \Rightarrow P(z) = c\Phi_n^*(z). \quad (1.13)$$

### Fórmulas de recurrencia de Szegő y coeficientes de Verblunsky

Si  $\mathcal{L}$  es un funcional lineal en el espacio  $\Lambda$  de los polinomios de Laurent ( $\Lambda := \text{span} \{z^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ) tal que  $\mathcal{L}$  es Hermitiano, es decir,  $c_n = \mathcal{L}(z^n) = \overline{\mathcal{L}(z^{-n})} = \bar{c}_{-n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces se puede introducir una forma bilineal

asociada con  $\mathcal{L}$  en el espacio  $\mathbb{P}(\mathbb{C})$  de los polinomios con coeficientes complejos como sigue

$$\langle p(z), q(z) \rangle_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(p(z)\bar{q}(z^{-1})), \quad (1.14)$$

donde  $p, q \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$ . Denotaremos mediante  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  el subespacio de los polinomios de grado a lo sumo  $n$ . Usualmente denotaremos por  $\langle \mathcal{L}, P(z) \rangle$  al valor  $\mathcal{L}(P(z))$ , para todo  $P(z) \in \Lambda$ .

La matriz de Gram asociada la forma bilineal (1.14) en términos de la base canónica  $\{z^n\}_{n \geq 0}$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{C})$  es

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_0 & c_{-1} & \cdots & c_{-n} & \cdots \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_{-(n-1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

conocida en la literatura como matriz de Toeplitz [33].

Se dice que el funcional lineal es cuasi-definido si las submatrices principales  $(\mathbf{T}_n)_{n \geq 0}$  de  $\mathbf{T}$  son no singulares. En este caso, se puede introducir una única sucesión de polinomios mónicos  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  con  $\text{grad}(\Phi_n) = n$  tal que

$$\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle_{\mathcal{L}} = \mathcal{K}_n \delta_{n,m}, \quad (1.16)$$

donde  $\mathcal{K}_n \neq 0$  para todo  $n \geq 0$ . Esta sucesión se denomina sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociados a  $\mathcal{L}$ .

Además, tenemos

$$\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_{\mathcal{L}} = \|\Phi_n\|^2 = \mathcal{K}_n.$$

La sucesión de polinomios ortogonales mónicos satisface dos relaciones de recurrencia equivalentes debidas a G. Szegő (ver [26], [33], [60], [63])

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(z), \quad (1.17)$$

$$\Phi_{n+1}(z) = \left(1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2\right) z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_{n+1}^*(z), \quad (1.18)$$

que se denominan relaciones de recurrencia ascendente y descendente, respectivamente, donde  $\Phi_n^*(z) = z^n \bar{\Phi}_n(z^{-1})$  es el llamado polinomio recíproco. Obsérvese que de (1.17) se tiene

$$\Phi_{n+1}^*(z) = \Phi_n^*(z) + \overline{\Phi_{n+1}(0)} z \Phi_n(z). \quad (1.19)$$

Los números complejos  $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$  se denominan coeficientes de reflexión (o coeficientes de Verblunsky) y tienen suma importancia en el estudio de los polinomios ortogonales en la circunferencia unidad. En el caso cuasi-definido, tenemos  $|\Phi_n(0)| \neq 1$  para todo  $n \geq 1$ .

El teorema de Carathéodory-Toeplitz nos da una caracterización de la sucesión  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  en términos de la determinación de un problema de momentos: Sean  $\mathbf{T}_n$  las submatrices principales de  $\mathbf{T}$ , entonces  $\det(\mathbf{T}_n) > 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}_+$ , si y sólo si, existe una medida de Borel positiva  $\sigma$  no trivial sobre  $\mathbb{T}$  tal que

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\sigma(\theta).$$

Cuando las submatrices principales  $(\mathbf{T}_n)_{n \geq 0}$  de  $\mathbf{T}$  tienen determinante positivo, entonces el funcional lineal se dice definido positivo. En este caso, podemos garantizar que existe una única sucesión de polinomios ortonormales  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  respecto al funcional  $\mathcal{L}$  que satisface

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_{\mathcal{L}} = \delta_{n,m}. \tag{1.20}$$

El  $n$ -ésimo polinomio ortonormal está dado por

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{T}_n \det \mathbf{T}_{n-1}}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ c_{-(n-1)} & c_{-(n-2)} & c_{-(n-3)} & \dots & c_1 \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^n \end{vmatrix}.$$

con el convenio  $\det \mathbf{T}_{-1} = 1$ .

Ambas sucesiones de polinomios están relacionadas por

$$\Phi_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{\kappa_n},$$

donde  $\kappa_n$  es el coeficiente principal de  $\varphi_n(z)$ , que está dado por

$$\kappa_n = \sqrt{\frac{\det \mathbf{T}_{n-1}}{\det \mathbf{T}_n}}.$$

Además, tenemos

$$\mathcal{K}_n = \frac{1}{\kappa_n^2}.$$

Si denotamos por  $\mathbf{D}^\infty$  al conjunto de sucesiones  $\{\alpha_j\}_{j=0}^\infty$  con  $|\alpha_j| < 1$  y por  $\mathcal{P}$  al conjunto de medidas de probabilidad no triviales sobre  $\mathbb{T}$ , la aplicación  $\mathcal{S} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{D}^\infty$  definida por  $\mathcal{S}(\sigma) := \{\alpha_j(\sigma)\}_{j=0}^\infty$  está bien definida. Verblunsky demostró el siguiente resultado:

TEOREMA 1.1. (*Verblunsky*<sup>‡</sup>, 1936).  *$\mathcal{S}$  es una biyección.*

Por lo tanto,

TEOREMA 1.2. *Para cualquier medida de probabilidad no trivial  $\sigma$ , soportada en la circunferencia unidad, podemos definir una sucesión de números complejos  $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$  con  $|\Phi_n(0)| < 1$ ,  $n \geq 1$ , tal que se cumplen las relaciones de recurrencia (1.17) y (1.18), donde  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  es la familia de polinomios ortogonales con respecto a  $\sigma$ .*

Además,

$$\begin{aligned} \|\Phi_{n+1}\|^2 &= (1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2) \|\Phi_n\|^2 \\ &= \prod_{j=0}^n (1 - |\Phi_{j+1}(0)|^2). \end{aligned}$$

La familia de coeficientes de Verblunsky proporciona información cualitativa acerca de la medida y su correspondiente sucesión de polinomios ortogonales.

La medida  $\sigma$  puede descomponerse como suma de una medida que es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue normalizada  $\frac{d\theta}{2\pi}$  y una medida singular. Denotamos mediante  $\omega = \sigma'$  la derivada de Radon-Nikodym de  $\sigma$  respecto a la medida de Lebesgue y por  $\sigma_s$  la medida singular. Entonces

$$d\sigma(\theta) = \omega(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} + d\sigma_s(\theta).$$

---

<sup>‡</sup>También llamado el Teorema de Favard para la circunferencia unidad.

DEFINICION 1.4. [63] Supongamos que se satisface la condición de Szegő,

$$\int_0^{2\pi} \log(\omega(\theta)) \frac{d\theta}{2\pi} > -\infty. \quad (1.21)$$

Entonces, la función de Szegő,  $D(z)$ , se define en  $|z| < 1$  mediante

$$D(z) = \exp \left( \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log(\omega(\theta)) d\theta \right). \quad (1.22)$$

Además,  $D(z)$  es analítica y no se anula en  $\mathbb{D}$ .

La condición de Szegő (1.21) es equivalente a que  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 < \infty$ .

El siguiente resultado es usualmente atribuido a G. Szegő, A. N. Kolmogorov y M. G. Krein

TEOREMA 1.3. Para cualquier medida de probabilidad no trivial  $\sigma$  con soporte en  $\mathbb{T}$ , las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_n\| = 0$ .
- (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 < \infty$ .
- (c)  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una base de  $L^2(\mathbb{T}, \sigma)$ .
- (d)  $\int_{\mathbb{T}} \log \sigma'(z) dz = -\infty$ , es decir,  $\log \sigma' \notin L^1(\mathbb{T})$ .

Decimos que la medida  $\sigma$  es de variación acotada si se cumple

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_{n+1}(0) - \Phi_n(0)| < \infty.$$

La función de Christoffel asociada con una medida de probabilidad no trivial  $\sigma$ , soportada en la circunferencia unidad, está definida del modo siguiente. Sea

$$\lambda_n(\zeta) = \min \left\{ \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta), \quad \deg(P) \leq n, \quad P(\zeta) = 1 \right\}.$$

Fijado  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_n$  es una función positiva y decreciente en  $n$ , de manera que

$$\begin{aligned} \lambda_{\infty}(\zeta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\zeta) \\ &= \inf \left\{ \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta), \quad P \in \mathbb{P}(\mathbb{C}), \quad P(\zeta) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

$\lambda_\infty$  se conoce en la literatura como función de Christoffel ([60]).

Existe una relación entre la función de Christoffel y la familia de coeficientes de Verblunsky asociados a una medida de probabilidad  $\sigma$  dada.

**TEOREMA 1.4.** *Sea  $\sigma$  una medida de probabilidad no trivial soportada en la circunferencia unidad, y sea  $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$  la correspondiente familia de coeficientes de Verblunsky. Entonces,*

- (a) Si  $|\zeta| > 1$ ,  $\lambda_\infty(\zeta) = 0$ .
- (b) Si  $|\zeta| = 1$ ,  $\lambda_\infty(\zeta) = \sigma(\{\zeta\})$ .
- (c) Si  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 = \infty$ , entonces  $\lambda_\infty(\zeta) = 0$  para todo  $\zeta$  con  $|\zeta| < 1$ .
- (d) Si  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 < \infty$ , entonces  $\lambda_\infty(\zeta) > 0$  para todo  $\zeta$  con  $|\zeta| < 1$ .

Además,

$$\lambda_\infty(0) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - |\Phi_n(0)|^2).$$

También se puede mostrar que

$$\lambda_n(\zeta) = \frac{1}{K_n(\zeta, \zeta)},$$

donde  $K_n(z, y)$  es el  $n$ -ésimo núcleo reproductor asociado con  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ , que está definido mediante

$$K_n(z, y) = \sum_{j=0}^n \overline{\varphi_j(y)} \varphi_j(z) = \sum_{j=0}^n \frac{\overline{\Phi_j(y)} \Phi_j(z)}{\mathbf{k}_j},$$

con  $\mathbf{k}_j = \|\Phi_j\|^2 = \kappa_j(\sigma)^{-2}$ . Existe una fórmula directa para calcular  $K_n(z, y)$ , en términos del  $(n+1)$ -ésimo polinomio ortonormal.

**TEOREMA 1.5.** *(Fórmula de Christoffel-Darboux) Para todo  $n \geq 0$  y  $z, y \in \mathbb{C}$  con  $\bar{y}z \neq 1$ ,*

$$K_n(z, y) = \sum_{j=0}^n \overline{\varphi_j(y)} \varphi_j(z) = \frac{\overline{\varphi_{n+1}^*(y)} \varphi_{n+1}^*(z) - \overline{\varphi_{n+1}(y)} \varphi_{n+1}(z)}{1 - \bar{y}z}.$$



En el caso cuasi-definido, la fórmula anterior se convierte en

$$K_n(z, y) = \frac{\overline{\Phi_{n+1}^*(y)}\Phi_{n+1}^*(z) - \overline{\Phi_{n+1}(y)}\Phi_{n+1}(z)}{\mathcal{K}_{n+1}(1 - \bar{y}z)}.$$

El núcleo reproductor tiene, entre otras, las siguientes propiedades.

TEOREMA 1.6. Sean  $y \in \mathbb{C}$  y  $p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ . Entonces se verifican las siguientes propiedades:

$$(a) \quad \mathcal{L}(p(z), K_n(z, y)) = p(y), \quad (1.23)$$

$$(b) \quad K_n(z, 0) = \sum_{j=0}^n \overline{\varphi_j(0)}\varphi_j(z) = \kappa_n(\sigma)\varphi_n^*(z), \quad (1.24)$$

$$(c) \quad K_n(0, 0) = \sum_{j=0}^n |\varphi_j(0)|^2 = \kappa_n^2(\sigma) \quad (1.25)$$

Además, considerando el polinomio recíproco de  $K_n(x, y)$  en la variable  $x$ , que denotaremos mediante  $K_n^*(x, y)$ , se tiene

$$K_n^*(x, y) = \frac{1}{\mathcal{K}_{n+1}} \frac{\overline{\Phi_{n+1}(x)}\Phi_{n+1}^*(y) - \overline{\Phi_{n+1}^*(x)}\Phi_{n+1}(y)}{x - y},$$

conocido en la literatura como el Bézoutiano de  $\Phi_{n+1}$  y  $\Phi_{n+1}^*$ .

De la relación (1.25) se tiene

$$\kappa_n^2(\sigma) - \kappa_{n-1}^2(\sigma) = |\varphi_n(0)|^2 = \kappa_n^2(\sigma)|\Phi_n(0)|^2,$$

de donde se sigue que

$$\left( \frac{\kappa_{n-1}(\sigma)}{\kappa_n(\sigma)} \right)^2 = 1 - |\Phi_n(0)|^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.26)$$

Las funciones

$$q_j(t) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\varphi_j(z)}}{t - z} d\sigma(z), \quad t \notin \mathbb{T}, \quad j \geq 0, \quad (1.27)$$

se denominan *funciones de segunda especie* asociadas con  $\sigma$ . También denotamos

$$Q_j(t) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\Phi_j(z)}}{t - z} d\sigma(z) = (\kappa_j(\sigma))^{-1}q_j(t).$$

### 1.2.2 Ortogonalidad tipo Sobolev

Un *producto interno de Sobolev* sobre el espacio  $\mathbb{P}$  o sobre el espacio  $\mathbb{P}(\mathbb{C})$  es, esencialmente, un producto interno que involucra a las derivadas de los polinomios hasta un cierto orden.

A modo de ejemplo, un tal producto interno puede ser definido de la siguiente manera:

Sea  $(\mu_0, \dots, \mu_m)$  un vector de  $m + 1$  medidas positivas de Borel soportadas en  $\mathbb{C}$  tales que

$$\int_{\mathbb{C}} |z|^{2n} d\mu_k(z) < \infty, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad k = 0, \dots, m,$$

es decir, cada elemento de la sucesión  $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$  es una función de cuadrado integrable para cada  $\mu_k$ , ( $k = 0, \dots, m$ ), o, equivalentemente,

$$\{z^n\}_{n=0}^{\infty} \subset L^2(\mu_k), \quad (k = 0, \dots, m).$$

Supondremos, adicionalmente, que el soporte de  $\mu_0$  contiene, al menos, una número infinito de puntos, y que  $\mu_m$  no es la medida nula. Así pues, llamaremos producto interno de Sobolev sobre  $\mathbb{P}(\mathbb{C})$  asociado al vector de medidas  $(\mu_0, \dots, \mu_m)$ , al definido por

$$\langle p, q \rangle_S = \sum_{k=0}^m \int p^{(k)}(z) \overline{q^{(k)}(z)} d\mu_k(z) = \sum_{k=0}^m \langle p^{(k)}, q^{(k)} \rangle_{L^2(\mu_k)}, \quad (1.28)$$

para todo  $p, q \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$ , donde  $q^{(k)}$  denota la derivada  $k$ -ésima del polinomio  $q$ .

La norma asociada a (1.28) se llama *norma de Sobolev* y, como es usual, se define mediante

$$\|q\|_S = \langle q, q \rangle_S^{1/2} = \left( \sum_{k=0}^m \|q^{(k)}\|_{L^2(\mu_k)}^2 \right)^{1/2}.$$

De manera análoga a la ortogonalidad estándar, diremos que una sucesión de polinomios  $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$  es ortogonal con respecto al producto interno (1.28), si para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$  se tiene que  $\text{grad}(Q_n) = n$  y

$$\langle Q_n, Q_m \rangle_S \begin{cases} \neq 0, & n = m \\ = 0, & n \neq m \end{cases}$$

En este caso  $Q_n$  es el  $n$ -ésimo *polinomio ortogonal de Sobolev* asociado al producto interno dado en (1.28).

Nuevamente si  $\langle Q_n, Q_n \rangle_S = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ , se dice que la sucesión es ortonormal. El  $n$ -ésimo *polinomio ortogonal mónico de Sobolev* es aquel polinomio  $\tilde{Q}_n(z)$  que satisface

$$\langle \tilde{Q}_n, \tilde{Q}_m \rangle_S \begin{cases} \neq 0, & n = m \\ = 0, & n \neq m \end{cases}$$

y su coeficiente principal (coeficiente líder) es igual a 1.

Así, la sucesión  $\{\tilde{Q}_n\}_{n \geq 0}$  queda definida unívocamente por las condiciones:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_n(z) &= z^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_{i,n} z^i, \quad (c_{i,n} \in \mathbb{C}) \\ \langle \tilde{Q}_n, z^k \rangle_S &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Si  $q_n(z)$  es el polinomio ortonormal de grado  $n$  correspondiente al producto (1.28), entonces

$$q_n(z) = \frac{1}{\|Q_n\|_S} Q_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Desde su inicio, el estudio de los polinomios ortogonales de Sobolev puso al descubierto que existen marcadas diferencias entre éstos y los polinomios ortogonales estándar con respecto a una medida  $\mu$ . En efecto, se sabe que en el caso estándar los ceros de la sucesión de polinomios ortogonales se encuentran en el interior de la cápsula convexa del soporte de la medida de ortogonalidad. Sin embargo, en 1962 Althammer [4] consideró el siguiente ejemplo de producto interno de Sobolev

$$\langle p, q \rangle_S = \int p(x)q(x)d\mu_0(x) + \int p'(x)q'(x)d\mu_1(x). \quad (1.30)$$

donde  $\text{supp}(\mu_0) = \text{supp}(\mu_1) = [-1, 1]$ ,

$$d\mu_0(x) = dx, \quad d\mu_1(x) = \begin{cases} 10dx, & -1 \leq x < 0 \\ dx, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

para el cual el polinomio ortogonal mónico de segundo grado,

$$\tilde{Q}_2(x) = x^2 + \frac{27}{35}x - \frac{1}{3},$$

tiene un cero en  $x = -1,08 \notin [-1, 1]$ . Como se observó posteriormente, la existencia de un cero fuera del soporte de la medida de ortogonalidad es un hecho muy frecuente en los polinomios ortogonales de Sobolev (ver [55]). Incluso puede ocurrir que muchos de estos ceros sean complejos.

Otra distinción importante a destacar en relación con los productos de Sobolev es la siguiente:

Supongamos en (1.28) que  $\mathbb{I}_k = \text{supp}(\mu_k) \subset \mathbb{R}$ ,  $k = 0, \dots, m$ , donde  $\mathbb{I}_k$  es un intervalo y  $p, q \in \mathbb{P}$ , entonces

$$\langle p, q \rangle_S = \sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{I}_k} p^{(k)}(x) q^{(k)}(x) d\mu_k(x). \quad (1.31)$$

Si en (1.31)  $m \geq 1$ , consideramos el operador de multiplicación por  $x$ ,  $M_x$  sobre el espacio  $\mathbb{P}$  es claro que  $M_x$  no es autoadjunto con respecto a (1.31). Como ya hemos dicho la simetría de este operador con respecto al producto interno es decisiva en la búsqueda de una fórmula de recurrencia a tres términos.

En [21] se prueba que si en (1.31)  $\mu_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , son medidas atómicas con soporte formado por un número finito de puntos, es decir, es una combinación lineal finita de deltas de Dirac, entonces la sucesión de polinomios ortogonales (única salvo una constante multiplicativa no nula) con respecto al producto (1.31), satisface una relación de recurrencia con un número finito de términos que no depende del grado del polinomio.

También en [4], Althammer consideró el producto interno de Sobolev

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx + \lambda \int_{-1}^1 p'(x)q'(x)dx, \quad (1.32)$$

donde  $\lambda > 0$ . Este producto recibe el nombre de producto interno de Legendre-Sobolev y sus polinomios ortogonales asociados pueden verse como generalizaciones de los polinomios clásicos de Legendre.

Históricamente, el trabajo de P. Althammer fue el primero en considerar como materia de estudio los polinomios ortogonales de Sobolev. La motivación para la consideración de estos sistemas de polinomios fue *el problema de la mejor aproximación polinomial por mínimos cuadrados* en la métrica inducida por el producto interno (1.32).

Como sabemos, la solución de este problema es

$$P_n = \sum_{k=0}^n \langle f, q_k \rangle_S q_k,$$

donde  $\{q_n\}$  es la sucesión de polinomios ortonormales de Sobolev con respecto al producto (1.32).

Al igual que en [4], trabajos posteriores de W. Gröbner [34], J. Brenner [8], F. W. Schäfke [59] y, finalmente, E. A. Cohen [13], consideraron casos particulares del producto (1.31) al tomar como  $\mu_0$  y  $\mu_1$  medidas absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue soportadas sobre un cierto intervalo de la recta real y definidas por pesos clásicos.

Después del trabajo de E. A. Cohen en el año 1.975, no se reportaron estudios sobre esta temática hasta finales de la década de los ochenta. Por tal motivo, podemos considerar los años comprendidos entre 1.962, en que aparece el trabajo de Althammer, y 1.975, como la primera etapa de desarrollo de la teoría de los polinomios de Sobolev. Una característica común a todos los trabajos de esta etapa, es el empleo de la integración por partes como herramienta fundamental de trabajo.

La segunda etapa en el estudio de los polinomios de Sobolev, que comenzó a finales de la década de los 80 y se prolonga hasta nuestros días, se ha enfocado desde puntos de vista formalmente diferentes, según el tipo de producto interno de Sobolev involucrado [52]:

- (a) El llamado *caso no diagonal* estudia polinomios ortogonales respecto a productos internos de la forma

$$\langle f, g \rangle_S = \int_{\mathbb{I}} F(x) A G^t(x) d\mu(x),$$

donde  $\mathbb{I}$  es un intervalo real (acotado o no),  $\mu$  es una medida de Borel absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en  $\mathbb{I}$ , los vectores  $F$  y  $G$  vienen dados por

$$F(x) = (f(x), f'(x), \dots, f^{(m)}(x)), \quad G(x) = (g(x), g'(x), \dots, g^{(m)}(x)),$$

y  $A$  es una matriz simétrica semidefinida positiva de orden  $(m+1) \times (m+1)$ , [46]. Este caso ha sido ampliamente estudiado cuando  $A$  es una matriz diagonal.

Asímismo se han estudiado polinomios ortogonales respecto a productos internos de la forma

$$\langle f, g \rangle_S = \int F(z) A \overline{G^t(z)} d\mu z,$$

donde  $\mu$  es una medida de Borel compleja, positiva y finita (i. e.  $z^n \in L^1(\mu)$  para todo  $n \geq 0$ ), cuyo soporte contiene una cantidad infinita de puntos, los vectores  $F$  y  $G$  vienen dados por

$$F(z) = (f(z), f'(z), \dots, f^{(m)}(z)), \quad G(z) = (g(z), g'(z), \dots, g^{(m)}(z)),$$

y  $A$  es una matriz hermitiana definida positiva de orden  $(m+1) \times (m+1)$ .

- (b) El *caso diagonal*<sup>§</sup> corresponde al estudio de polinomios ortogonales respecto al producto interno de Sobolev definido en (1.28).
- (c) El *caso discreto*, donde los soportes de cada una de las medidas  $\mu_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , de (1.28) poseen un número finito de puntos. Por ejemplo,

$$\langle p, q \rangle_S = \int f(x)g(x)d\mu_0(x) + \lambda f'(\xi)g'(\xi),$$

corresponde a (1.28) con  $m = 1$  y  $d\mu_1 = \lambda \delta_\xi$ , donde  $\delta_\xi$  es la delta de Dirac en  $\xi$ .

- (d) Por último, la forma introducida por K. H. Kwon considera productos de Sobolev donde la primera medida de ortogonalidad es discreta

$$\langle f, g \rangle_S = f(c)g(c) + \int_I f'(x)g'(x)d\mu(x),$$

ha demostrado tener utilidad para el estudio de polinomios ortogonales generalizados de Laguerre  $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n \geq 0}$  cuando  $\alpha = -1$  y  $c = 0$ .

La escuela española desarrollada alrededor de F. Marcellán, G. López Lagomasino y A. Martínez Finkelshtein ha estado particularmente activa en el desarrollo de la teoría de familias de polinomios ortogonales en cada uno de los primeros tres casos, [23], [46], [47], [48], [43], [51], [52], [54].

---

<sup>§</sup>Llamado también caso continuo, cuando las medidas involucradas satisfacen  $d\mu_k(x) = w_k(x)dx$ , con  $w_k$  algún peso clásico.

### 1.2.3 Comportamiento asintótico

El estudio de las propiedades asintóticas de sucesiones de polinomios ortogonales de Sobolev  $\{Q_n\}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , puede clasificarse según las siguientes direcciones:

- Asintótica del cociente.
- Asintótica fuerte.
- Asintótica de la raíz enésima.

El primer resultado correspondiente al caso discreto se obtuvo por F. Marcellán y W. Van Assche en [50]. En este trabajo se considera el producto interno

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{-1}^1 p(x)q(x)d\mu(x) + \lambda p'(c)q'(c), \quad (1.33)$$

donde  $\lambda > 0$ ,  $c \in \mathbb{R}$  y  $\mu \in M(0, 1)$ .  $M(0, 1)$  es la clase de Nevai constituida por todas las medidas  $\mu$  positivas de Borel para las que la sucesión de polinomios ortonormales correspondiente  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  satisface una relación de recurrencia a tres términos

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x)$$

cuyos coeficientes cumplen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

El objetivo, en este caso, fue comparar los polinomios de Sobolev asociados a (1.33) con los polinomios ortogonales estándar con respecto a  $\mu$ , y, de esta manera, investigar cómo influye en la sucesión  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  la adición de derivadas, esto es, cuán cercanos están los polinomios de Sobolev a los  $\{p_n\}_{n \geq 0}$ . Con esta finalidad, asumiendo que  $\mu$  es una medida para la que se conoce el comportamiento asintótico de los polinomios  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  y suponiendo que  $\mu \in M(0, 1)$ , se estudia el comportamiento asintótico relativo de los polinomios ortogonales de Sobolev con respecto a la sucesión  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  en los casos en que  $c \in \text{supp}(\mu)$  y  $c \in \mathbb{R} \setminus \text{supp}(\mu)$ . Este trabajo puso al descubierto la similitud existente entre el comportamiento asintótico de los polinomios de Sobolev

en el caso discreto y los polinomios ortogonales estándar con respecto a medidas modificadas por la adición de masas puntuales.

Con respecto al comportamiento asintótico fuerte de polinomios de Sobolev en el caso continuo, el primer resultado fue dado en [54] para los polinomios de Gegenbauer-Sobolev. En él se establece la asintótica relativa de estos polinomios con respecto a los de Gegenbauer. Dado que el comportamiento asintótico de estos últimos es conocido, se tiene entonces el comportamiento asintótico fuerte de los polinomios de Gegenbauer-Sobolev. También se obtiene el comportamiento asintótico de las normas y los ceros de dichos polinomios.

Otra noción introducida por diversos autores con el fin de estudiar el comportamiento asintótico de sucesiones de polinomios ortogonales de Sobolev en el caso no discreto fue la de *coherencia de medidas*. El primer resultado más o menos general sobre comportamiento asintótico de sucesiones de polinomios ortogonales de Sobolev para casos no discretos fue obtenido por medio de una técnica muy simple pero exitosa: establecer una relación algebraica (con un número finito de términos) entre la sucesión de polinomios ortogonales de Sobolev y una sucesión de polinomios ortogonales estándar, y luego estudiar el comportamiento asintótico de los parámetros involucrados en la relación algebraica para obtener una asintótica comparativa, [53].

Finalmente, en la línea de considerar productos internos de Sobolev con respecto a clases generales de medidas, se pueden ubicar también los trabajos caracterizados por el empleo de métodos de la teoría de potencial logarítmico, para estudiar el comportamiento asintótico de los ceros y puntos críticos de los polinomios de Sobolev, ver por ejemplo [47].

#### 1.2.4 Polinomios ortogonales matriciales

DEFINICION 1.5. Una matriz  $\mathbb{M}(x)$  de orden  $N \times N$  dada por la expresión

$$\mathbb{M}(x) = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & \cdots & p_{1N}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1}(x) & \cdots & p_{NN}(x) \end{pmatrix},$$

donde las entradas  $p_{ij}(x)$  son polinomios de grado a lo sumo  $n$ , se denomina **una matriz polinomial** de grado a lo sumo  $n$ .



Obsérvese que también podemos escribir  $\mathbb{M}(x) = C_n x^n + \cdots + C_0$ , donde  $C_k$  es una matriz numérica de orden  $N \times N$ , para cada  $k = 0, \dots, n$ .

El número  $x = x_0$  es un cero de  $\mathbb{M}$  si  $\mathbb{M}(x_0)$  es singular, y la *multiplicidad* de  $x_0$  es la multiplicidad de  $x_0$  como cero de  $\det \mathbb{M}(x)$ . Cuando el *coeficiente principal matricial*  $C_n$  es una matriz no-singular, la matriz polinomial  $\mathbb{M}$  tiene  $nN$  ceros, contando la multiplicidad. Denotaremos por  $I$  a la matriz identidad usual, y por  $0$  a la matriz nula (tanto la matriz numérica como la polinomial).

Llamaremos *peso matricial* a la matriz  $\mathbb{W}$  de orden  $N \times N$ , dada por

$$\mathbb{W}(x) = \begin{pmatrix} \mu_{11}(x) & \cdots & \mu_{1N}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{N1}(x) & \cdots & \mu_{NN}(x) \end{pmatrix},$$

donde las entradas  $\mu_{ij}(x)$  son medidas complejas definidas sobre la recta real, o algún subconjunto de la recta.

El peso matricial  $\mathbb{W}$  se dice definido positivo si para cualquier conjunto de Borel  $E$ , las matrices numéricas  $\mathbb{W}(x)$  son semidefinidas positivas, para cada  $x \in E$ . Supondremos que todos los momentos de  $\mathbb{W}$  son finitos, (i.e.  $m_{ij}^s = \int x^s d\mu_{ij}(x) < \infty, s \geq 0$ ).

A partir de esta definición, podemos definir un producto interno con valores matriciales sobre el espacio lineal de todas la matrices polinomiales de orden  $N \times N$  como sigue:

$$\langle \mathbb{M}, \mathbb{S} \rangle_{\mathbb{W}} = \int \mathbb{M}(x) d\mathbb{W}(x) \mathbb{S}^*(x), \quad (1.34)$$

donde  $\mathbb{S}^*(x)$  denota a la matriz traspuesta conjugada de  $\mathbb{S}(x)$ , para cada  $x$ .

Si  $\langle \mathbb{M}, \mathbb{M} \rangle$  es una matriz no singular para toda  $\mathbb{M}$  matriz polinomial con coeficiente principal matricial no singular, entonces al igual que en el caso escalar, podemos generar una sucesión de matrices polinomiales  $\{\mathbb{M}_n\}_{n \geq 0}$  de grado  $n$ , que es ortogonal con respecto al peso matricial  $\mathbb{W}$ , es decir:

$$\int \mathbb{M}_n(x) d\mathbb{W}(x) \mathbb{M}_m^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ I, & \text{si } n = m, \end{cases}$$

y  $\mathbb{M}_n$  tiene coeficiente principal matricial no singular. La sucesión  $\{\mathbb{M}_n\}_{n \geq 0}$  está determinada unívocamente, salvo multiplicación a izquierda

por matrices unitarias, es decir, si  $\mathbb{U}_n$  son matrices unitarias, entonces  $\{\mathbb{U}_n \mathbb{M}_n\}_{n \geq 0}$  es también un sistema de matrices polinomiales ortogonales con respecto a  $\mathbb{W}$ .

En los últimos 20 años las nociones fundamentales sobre matrices polinomiales ortogonales han sido principalmente desarrolladas por A. Durán, A. I. Aptekarev, E. M. Nikishin y A. Grünbaum. Aunque esta teoría muestra algunas similitudes con el caso escalar, constituye un novedoso campo de investigación que aún no ha sido totalmente explorado.

### 1.2.5 Ortogonalidad Múltiple: Tipo I y Tipo II

La ortogonalidad múltiple proviene de la teoría de aproximación simultánea de Padé. Es un campo relativamente nuevo, en el que las principales contribuciones se deben a E. M. Nikishin, V. N. Sorokin, A. I. Aptekarev, G. López Lagomasino y W. Van Assche, entre otros.

Sea  $(\mu_1, \dots, \mu_m)$  un vector de  $m$  medidas positivas de Borel soportadas en  $\mathbb{R}$  con  $m \in \mathbb{Z}_+$  fijo, tales que

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n d\mu_k(x) < \infty, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad k = 1, \dots, m,$$

y donde el soporte de  $\mu_k$  contiene una cantidad infinita de puntos para  $k = 1, \dots, m$ .

Consideremos los multi-índices  $\vec{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ , con tamaño  $|\vec{n}| = n_1 + \dots + n_m$ . Entonces existen dos tipos de *ortogonalidad múltiple* correspondientes a dos aproximaciones de tipo Hermite-Padé:

- En la ortogonalidad múltiple de tipo I, se considera la sucesión multi-indexada de polinomios  $\{Q_{\vec{n},k}\}_{\vec{n} \in \mathbb{Z}_+^m}$ , con  $\text{grad}(Q_{\vec{n},k}) = n_k - 1$ ,  $k = 1, \dots, m$ , definida a partir del sistema de ecuaciones

$$\sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}} x^j Q_{\vec{n},k}(x) d\mu_k(x) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, |\vec{n}| - 2. \quad (1.35)$$

Este es un sistema lineal homogéneo para los  $|\vec{n}|$  coeficientes de los  $m$  polinomios  $Q_{\vec{n},k}$ , por lo que tiene solución no trivial.

- En la ortogonalidad múltiple de tipo II, se considera un solo polinomio multi-indexado  $P_{\vec{n}}$ , con  $\text{grad}(P_{\vec{n}}) = |\vec{n}|$ , tal que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x^k P_{\vec{n}}(x) d\mu_1(x) &= 0, & k = 0, 1, \dots, n_1 - 1, \\ &\vdots \\ \int_{\mathbb{R}} x^k P_{\vec{n}}(x) d\mu_m(x) &= 0, & k = 0, 1, \dots, n_m - 1. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Este es un sistema lineal homogéneo para los  $|\vec{n}| + 1$  coeficientes de  $P_{\vec{n}}$ , y nuevamente tiene solución no trivial.

### 1.2.6 Ortogonalidad no hermitiana

Con respecto a la ortogonalidad no hermitiana, mencionaremos los casos siguientes:

- (a) La medida  $\mu$  es una medida real no necesariamente positiva (medida con signo) o con valores complejos, y consideramos el polinomio  $p_n$  dado a partir de

$$\int p_n(z) \bar{z}^k d\mu(z) = 0, \quad k = 0, \dots, n - 1. \quad (1.37)$$

- (b) La medida  $\mu$  es una medida con signo, o con valores complejos, o positiva y su soporte está contenido en una curva compleja o arco y la ortogonalidad es considerada sin conjugación compleja, y consideramos el polinomio  $p_n$  dado a partir de

$$\int p_n(z) z^k d\mu(z) = 0, \quad k = 0, \dots, n - 1. \quad (1.38)$$

Más generalmente, se pueden considerar productos internos no positivos, por ejemplo, si consideramos el aproximante de Padé diagonal a la transformada de Cauchy

$$f(z) = \int \frac{d\mu(t)}{z - t},$$

de una medida con signo o compleja  $\mu$ , es decir, consideramos polinomios  $p_n$  y  $q_n$  de grado a lo sumo  $n$ , tales que

$$f(z)p_n(z) - q_n(z) = O(z^{-n-1})$$

en el infinito. Entonces  $p_n$  satisface la relación de ortogonalidad no hermitiana

$$\int p_n(z)z^k d\mu(z) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (1.39)$$

En este caso, aunque el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt falla,  $p_n$  puede ser definido como la solución del sistema de ecuaciones (1.37), (resp. (1.38)). De manera que  $p_n$  puede ser un polinomio de grado menor que  $n$  y los resultados pueden ser más complicados con este tipo de ortogonalidad, por ejemplo en el caso

$$d\mu(x) = (x - \cos(\pi\alpha_1))(x - \cos(\pi\alpha_2))(1 - x^2)^{-1/2}, \quad x \in [-1, 1],$$

con  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$  números algebraicos racionalmente independientes, los ceros de  $p_n$  (tomado como solución de (1.38)) son densos en todo el plano complejo. En [62], H. Stahl demostró que es posible construir una medida compleja  $\mu$  sobre  $[-1, 1]$  tal que para un comportamiento asintótico predeterminado, alguna subsucesión de polinomios  $\{p_{n_k}\}$  tendrá dicho comportamiento.

### 1.3 Ejercicios

1. Dado el operador de Jacobi  $\mathbf{J} : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ , definido en (1.7).

- (a) Muestre que para toda sucesión  $\alpha = \{\alpha_j\}_{j \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ ,  $\mathbf{J}(\alpha) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ .
- (b) Considere sobre  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$  el producto interno usual

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z}_+)} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \beta_i.$$

Muestre que  $\mathbf{J}$  es un operador simétrico (autoadjunto) con respecto al producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z}_+)}$ .

2. Unicidad de polinomios multi-ortogonales de tipo I: Considere el sistema lineal de ecuaciones dado en (1.35). Muestre que si el rango del sistema (1.35) es  $|\vec{n}| - 1$ , entonces su solución es única, salvo un factor multiplicativo constante. En este caso el multi-índice  $\vec{n}$  de la sucesión  $\{Q_{\vec{n},k}\}_{\vec{n}}$  es llamado normal de tipo I.

Unicidad de polinomios multi-ortogonales de tipo II: Considere el sistema lineal de ecuaciones dado en (1.36). Muestre que si el polinomio  $P_{\vec{n}}$  tiene grado  $|\vec{n}| + 1$ , entonces el sistema (1.36) tiene solución única, salvo un factor multiplicativo constante. En este caso el multi-índice  $\vec{n}$  de la sucesión  $\{Q_{\vec{n},k}\}_{\vec{n}}$  es llamado normal de tipo II.

3. Pares coherentes de medidas: Sean  $(\mu_1, \mu_2)$  un vector de medidas positivas, y  $\{P_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  las respectivas sucesiones estándar de polinomios ortogonales mónicos. El vector  $(\mu_1, \mu_2)$  se dice par coherente de medidas si existe una sucesión de constantes no nulas  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ , tales que

$$T_n(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} - \sigma_n \frac{P'_n(x)}{n}, \quad n \geq 1.$$

Muestre que

- (a) El vector de medidas  $(\mu_1, \mu_2)$ , donde

$$d\mu_1(x) = d\mu_2(x) = x^\alpha e^{-x} dx,$$

para  $x \in (0, \infty)$  y  $\alpha > -1$ , es un par coherente de medidas.

*Sugerencia: utilice el hecho de que los polinomios ortogonales mónicos de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}$ , satisfacen la relación*

$$L_n^{(\alpha)}(x) = L_{n+1}^{(\alpha+1)}(x) + nL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

- (b) El vector de medidas  $(\mu_1, \mu_2)$ , donde

$$\begin{aligned} d\mu_1(x) &= |x - \xi|(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}, \\ d\mu_2(x) &= (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \end{aligned}$$

$x \in (-1, 1)$ ,  $|\xi| > 1$  y  $\alpha, \beta > 0$ , es un par coherente de medidas.

4. Dado  $\lambda \geq 0$ , considérese el producto interno de Laguerre-Sobolev

$$\langle p, q \rangle_S = \int_0^\infty p(x)q(x)d\mu_0(x) + \lambda \int_0^\infty p'(x)q'(x)d\mu_1(x),$$

donde  $d\mu_0(x) = d\mu_1(x) = x^\alpha e^{-x} dx$ ,  $\alpha > -1$ .

(a) Muestre que los polinomios mónicos  $\{Q_n^{(\alpha)}\}_{n \geq 0}$ , ortogonales con respecto al producto anterior, se pueden expresar mediante  $Q_0^{(\alpha)}(x) \equiv 1$ ,

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{1,0} & \cdots & c_{n,0} \\ c_{0,1} & c_{1,1} & \cdots & c_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0,n-1} & c_{1,n-1} & \cdots & c_{n,n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{1,0} & \cdots & c_{n-1,0} \\ c_{0,1} & c_{1,1} & \cdots & c_{n-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0,n-1} & c_{1,n-1} & \cdots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix}}, \quad n \geq 1,$$

donde  $c_{i,j} = \langle x^i, x^j \rangle_S = \langle x^i, x^j \rangle_{\mu_0} + ij\lambda \langle x^{i-1}, x^{j-1} \rangle_{\mu_1}$ . Observe que cada coeficiente (distinto del coeficiente líder) de  $Q_n^{(\alpha)}$  es una función racional en  $\lambda$  cuyo numerador y denominador tienen grado  $n-1$ . Esta propiedad nos permite pensar en el polinomio  $Q_n^{(\alpha)}(x)$  como una función en dos variables  $Q_n^{(\alpha)}(x, \lambda)$ .

(b) Defina

$$\begin{aligned} R_0^\infty(x) &= Q_0^{(\alpha)}(x) = L_0^{(\alpha)}(x) = 1, \\ R_1^\infty(x) &= Q_1^{(\alpha)}(x) = L_1^{(\alpha)}(x), \\ R_n^\infty(x) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} Q_n^{(\alpha)}(x, \lambda), \text{ para } n \geq 2. \end{aligned}$$

El polinomio mónico  $R_n^\infty$  se conoce como *polinomio límite asociado*, es un polinomio de grado exactamente  $n$  e independiente de  $\lambda$ . Demuestre que

$$(i) \int_0^\infty R_n^\infty(x) x^\alpha e^{-x} dx = 0, \text{ para todo } n \geq 1.$$

$$(ii) \int_0^\infty x^m (R_n^\infty(x))' x^\alpha e^{-x} dx = 0, \text{ para todo } n \geq 2, \\ 0 \leq m \leq n - 2. \text{ En consecuencia,}$$

$$(R_n^\infty(x))' = nL_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 2.$$

(c) Use la parte (b) y el ejercicio 3.(a) para deducir

$$R_n^\infty(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - \sigma_{n-1} \frac{n}{n-1} L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 2.$$

(d) Relación entre  $L_n^{(\alpha)}$  y  $Q_n^{(\alpha)}$ : demuestre que se verifica la siguiente relación:

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \sigma_n \frac{n+1}{n} L_n^{(\alpha)}(x) = Q_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \alpha_n(\lambda) Q_n^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1,$$

donde

$$\alpha_n(\lambda) = \sigma_n \frac{n+1}{n} \frac{\|L_n^{(\alpha)}\|_{\mu_0}^2}{\|Q_n^{(\alpha)}\|_S^2} \neq 0, \quad n \geq 1.$$

*Sugerencia: exprese  $R_{n+1}^\infty$  en términos de la base ortogonal  $\{Q_0^{(\alpha)}, Q_1^{(\alpha)}, \dots, Q_{n+1}^{(\alpha)}\}$  y utilice la parte (c) para determinar la constante  $\alpha_n(\lambda)$ .*

5. Dado  $\lambda \geq 0$ , considérese el producto interno de Sobolev

$$\langle p, q \rangle_S = \int_a^b p(x)q(x)d\mu_1(x) + \lambda \int_a^b p'(x)q'(x)d\mu_2(x).$$

Si las medidas  $\mu_k$ ,  $k = 1, 2$  son simétricas, la noción de pares coherentes de medidas no puede ser usada como en el ejercicio anterior. Sin embargo, se puede introducir una definición similar. Pares simétricamente coherentes de medidas: Dados  $(\mu_1, \mu_2)$  un vector de medidas positivas, y  $\{P_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  las respectivas sucesiones estándar de polinomios ortogonales mónicos. El vector  $(\mu_1, \mu_2)$  se dice par simétricamente coherente de medidas, si existe una sucesión de constantes no nulas  $A_1, A_n, \dots, B_1, B_n, \dots$ , tales que

$$T_n(x) = A_n P_{n+1}'(x) + B_n P_{n-1}'(x), \quad n \geq 1.$$

- (a) El vector de medidas  $(\mu_1, \mu_2)$ , donde

$$d\mu_1(x) = d\mu_2(x) = (1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx,$$

para  $x \in (-1, 1)$  y  $\alpha > -\frac{1}{2}$ , es un par simétricamente coherente de medidas. *Sugerencia: utilice el hecho de que los polinomios ortogonales de Gegenbauer  $G_n^{(\alpha)}$ , satisfacen la relación*

$$2(n + \alpha)G_n^{(\alpha)}(x) = \frac{d}{dx}G_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \frac{d}{dx}G_{n-1}^{(\alpha)}(x).$$

- (b) Dado  $\lambda \geq 0$ , considérese el producto interno de Gegenbauer-Sobolev

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{-1}^1 p(x)q(x)d\mu_0(x) + \lambda \int_{-1}^1 p'(x)q'(x)d\mu_1(x),$$

donde  $d\mu_0(x) = d\mu_1(x) = (1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx$ ,  $\alpha > -\frac{1}{2}$ .

Estudie la sucesión de polinomios ortogonales de Gegenbauer-Sobolev, según el esquema presentado en el ejercicio 4.



## CAPÍTULO 2

# POLINOMIOS ORTOGONALES SOBRE LA CIRCUNFERENCIA UNIDAD. TRANSFORMACIONES ESPECTRALES

El estudio de las transformaciones espectrales en la circunferencia unidad no ha tenido aún la atención que ha acaparado tanta atención como en el caso de la recta real. El inicio del siglo XXI está marcado con la aparición de los dos volúmenes de la monografía de B. Simon ([60], [61]) que constituyen la descripción más exhaustiva del estado del arte en la teoría de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad hasta la fecha. Uno de los resultados más importantes es el tratamiento de la representación matricial del operador de multiplicación respecto a bases ortonormales en el espacio de los polinomios de Laurent  $\Lambda = \text{span}\{z^k : k \in \mathbb{Z}\}$  construidas a partir del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt de las familias  $S = \{1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, \dots\}$  y  $T = \{1, z^{-1}, z, z^{-2}, z^2, \dots\}$ , respectivamente. La matriz resultante, conocida como matriz CMV, es pentadiagonal y admite una factorización en términos de dos matrices diagonales por bloques de dimensión  $2 \times 2$  la primera y de un único bloque de dimensión  $1 \times 1$  y los restantes de dimensión  $2 \times 2$  la segunda, cuyos elementos pueden ser expresados en términos de los coeficientes de Verblunsky.

Finalmente, es posible establecer una conexión entre medidas sopor-

tadas en el intervalo  $[-1, 1]$  de la recta real y medidas soportadas en la circunferencia unidad, conocida en la literatura como transformación de Szegő. En [63] se muestra no solamente cómo están relacionadas dichas medidas, sino también la relación existente entre las familias de polinomios ortogonales correspondientes, así como la relación entre las familias de parámetros de la relación de recurrencia de los polinomios ortogonales en la recta real y la familia de coeficientes de Verblunsky asociados a la medida soportada en la circunferencia unidad. Desde esta perspectiva, en el reciente trabajo [22] se abordan las transformaciones espectrales, centrándose en el estudio de la relación entre las funciones de Stieltjes correspondientes a medidas en la recta real y las funciones de Carathéodory correspondientes a medidas simétricas en la circunferencia unidad.

El interés de la transformación de Szegő no es solamente desde una perspectiva teórica, sino también desde el punto de vista computacional, pues ha sido usada de manera sistemática en el estudio de fórmulas de cuadratura de Szegő en la circunferencia unidad y su aplicación a fórmulas de cuadratura en intervalos de la recta real ([6], [18], [19]).

## 2.1 Funciones de Carathéodory y funciones de Schur

Empezaremos esta sección introduciendo alguna notación, definiciones y resultados clásicos útiles. El lector puede consultar [24] y [60] como referencias complementarias.

DEFINICION 2.1. *Dadas  $F, f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  funciones analíticas, diremos que*

- (a)  *$F$  es una función de Carathéodory\* (C-función) si y sólo si  $F(0) \in \mathbb{R}$  y  $\Re(F(z)) > 0$  sobre  $\mathbb{D}$ .*
- (b)  *$f$  es una función de Schur si y sólo si  $\sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| \leq 1$ .*

Al igual que en [60], diremos que una C-función  $F$  es trivial si  $F$  es una función racional con polos en  $\mathbb{T}$  y es imaginaria pura en cualquier punto regular de  $\mathbb{T}$ . Análogamente, diremos que una función de Schur

---

\*La definición dada en [60] usa la normalización  $F(0) = 1$ .

$f$  es trivial si  $f$  se puede representar mediante un producto de Blaschke finito:

$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^m \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z},$$

para  $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{D}$ .

Estas funciones juegan un papel importante en la teoría de polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad, pues están asociadas a la determinación explícita de familias de polinomios ortogonales.

Se puede mostrar que  $F$  admite un desarrollo de Taylor en  $z = 0$

$$F(z) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n, \quad (2.1)$$

donde la sucesión  $\{c_{-n}\}_{n \geq 0}$  es una sucesión de momentos para alguna medida no trivial  $\sigma$  sobre  $\mathbb{T}$ . También,  $F$  se puede representar mediante la transformación de Riesz-Herglotz de la medida  $\sigma$  (ver [26], [60])

$$F(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{w + z}{w - z} d\sigma(w).$$

Por extensión, si  $\mathcal{L}$  es un funcional lineal hermitiano en el espacio  $\Lambda$  de los polinomios de Laurent, es decir,  $c_n = \mathcal{L}(z^n) = \overline{\mathcal{L}(z^{-n})} = \bar{c}_{-n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , denominaremos función de Carathéodory asociada al funcional  $\mathcal{L}$  a la función analítica en el entorno del origen dada por (2.1).

### 2.1.1 El operador multiplicación y su representación matricial: matrices de Hessenberg

Si tenemos en cuenta que  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  es una base ortogonal en el espacio  $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ , de (1.17), (1.18) y la fórmula de Christoffel-Darboux, deducimos

$$z\Phi_n(z) = \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_{n,j} \Phi_j(z), \quad (2.2)$$

con

$$\lambda_{n,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n + 1, \\ -\frac{\kappa_n}{\kappa_j} \Phi_{n+1}(0) \overline{\Phi_j(0)} & \text{si } j \leq n, \\ 0 & \text{si } j > n + 1, \end{cases} \quad (2.3)$$

(ver [38], [60]). Entonces, la representación matricial del operador multiplicación por  $z$ ,  $M_z : \mathbb{P}(\mathbb{C}) \mapsto \mathbb{P}(\mathbb{C})$ , en términos de la base  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ , es

$$z\Phi(z) = \mathbf{H}_\Phi \Phi(z), \quad (2.4)$$

donde  $\Phi(z) = [\Phi_0(z), \Phi_1(z), \dots, \Phi_n(z), \dots]^t$  y  $\mathbf{H}_\Phi$  es una matriz de Hessenberg inferior

$$\mathbf{H}_\Phi = \begin{bmatrix} \lambda_{0,0} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_{1,0} & \lambda_{1,1} & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

En lo sucesivo, diremos que  $\mathbf{H}_\Phi$  es la *matriz de Hessenberg* asociada a la familia de polinomios ortogonales mónicos  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ .

En el caso definido positivo, si  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  es la base de  $\mathbb{P}(\mathbb{C})$  formada por los correspondientes polinomios ortonormales, entonces, la relación matricial es

$$z\varphi(z) = \mathbf{H}_\varphi \varphi(z), \quad (2.5)$$

donde  $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z), \dots]^t$  y  $\mathbf{H}_\varphi$  es una matriz de Hessenberg inferior con elementos

$$h_{n,j} = \begin{cases} \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} & \text{si } j = n + 1, \\ -\frac{\kappa_j}{\kappa_n} \overline{\Phi_{n+1}(0)\Phi_j(0)} & \text{si } j \leq n, \\ 0 & \text{si } j > n + 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

PROPOSICION 2.1.1. *Sea  $\mathcal{L}$  un funcional lineal definido positivo sobre la circunferencia unidad. Si  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  es la sucesión de polinomios ortonormales correspondiente a  $\mathcal{L}$  y  $\mathbf{H}_\varphi$  es la matriz Hessenberg inferior tal que*

$$z\varphi(z) = \mathbf{H}_\varphi \varphi(z),$$

donde  $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots]^t$ , entonces

$$(i) \quad \mathbf{H}_\varphi \mathbf{H}_\varphi^* = I,$$

$$(ii) \quad \mathbf{H}_\varphi^* \mathbf{H}_\varphi = I - \lambda_\infty(0) \varphi(0) \varphi(0)^*,$$

donde  $I$  es la matriz identidad.

**Demostración.** (i) El funcional lineal  $\mathcal{L}$  satisface

$$\langle zp, zq \rangle_{\mathcal{L}} = \langle p, q \rangle_{\mathcal{L}}, \quad \text{para todo } p, q \in \mathbb{P}(\mathbb{C}).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\varphi} \mathbf{H}_{\varphi}^* &= \mathbf{H}_{\varphi} \langle \varphi, \varphi^t \rangle_{\mathcal{L}} \mathbf{H}_{\varphi}^* \\ &= \langle \mathbf{H}_{\varphi} \varphi, \varphi^t \mathbf{H}_{\varphi}^* \rangle_{\mathcal{L}} \\ &= \langle z\varphi, z\varphi^t \rangle_{\mathcal{L}} = \langle \varphi, \varphi^t \rangle_{\mathcal{L}} = I. \end{aligned}$$

(ii) Para  $n \geq 0$ , tenemos

$$(\mathbf{H}_{\varphi}^*)_{(n)} (\mathbf{H}_{\varphi})^{(n)} =$$

$$\left( \frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n} \right)^2 + |\Phi_n(0)|^2 |\Phi_{n+1}(0)|^2 + \kappa_n^2 |\Phi_n(0)|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|\Phi_{j+1}(0)|^2}{\kappa_j^2},$$

donde  $\mathbf{H}_{(j)}$ ,  $\mathbf{H}^{(j)}$  denotan, respectivamente, la  $j$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna de la matriz  $\mathbf{H}$ . Usando en forma reiterada la relación (1.26), se deduce

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_{\varphi}^*)_{(n)} (\mathbf{H}_{\varphi})^{(n)} &= 1 - \left( \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} \right)^2 |\Phi_n(0)|^2 (1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2) \\ &\quad + \kappa_n^2 |\Phi_n(0)|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|\Phi_{j+1}(0)|^2}{\kappa_j^2} \\ &= 1 - \left( \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+2}} \right)^2 |\Phi_n(0)|^2 (1 - |\Phi_{n+2}(0)|^2) \\ &\quad + \kappa_n^2 |\Phi_n(0)|^2 \sum_{j=n+2}^{\infty} \frac{|\Phi_{j+1}(0)|^2}{\kappa_j^2} \\ &\quad \vdots \\ &= 1 - \kappa_n^2 |\Phi_n(0)|^2 \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa_j^2} = 1 - |\varphi_n(0)|^2 \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{K_j(0,0)} \\ &= 1 - |\varphi_n(0)|^2 \lambda_{\infty}(0). \end{aligned}$$

Por otra parte, para  $0 \leq j < n$ ,

$$(\mathbf{H}_{\varphi}^*)_{(n)} (\mathbf{H}_{\varphi})^{(j)} = \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \left( -\frac{1}{\kappa_n^2} + \sum_{l=n}^{\infty} \frac{|\Phi_{l+1}(0)|^2}{\kappa_l^2} \right).$$

Usando la relación (1.26),

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_\varphi^*)_{(n)} (\mathbf{H}_\varphi)^{(j)} &= \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \left( -\frac{1}{\kappa_{n+1}^2} + \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{|\Phi_{l+1}(0)|^2}{\kappa_l^2} \right) \\ &= \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \left( -\frac{1}{\kappa_{n+2}^2} + \sum_{l=n+2}^{\infty} \frac{|\Phi_{l+1}(0)|^2}{\kappa_l^2} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, si aplicamos reiteradamente (1.26), se obtiene

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_\varphi^*)_{(n)} (\mathbf{H}_\varphi)^{(j)} &= \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa_l^2} = \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{K_l(0, 0)} \\ &= \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \lambda_\infty(0). \end{aligned}$$

■

El análogo de la proposición 2.1.1 para  $H_\Phi$ , la matriz de Hessenberg asociada a la familia de polinomios ortogonales mónicos, es

PROPOSICION 2.1.2. *Sea  $\mathcal{L}$  un funcional lineal cuasi-definido sobre la circunferencia unidad. Si  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  es la sucesión de polinomios mónicos correspondiente a  $\mathcal{L}$  y  $\mathbf{H}_\Phi$  es la matriz Hessenberg inferior tal que*

$$z\Phi(z) = \mathbf{H}_\Phi \Phi(z),$$

donde  $\Phi(z) = [\Phi_0(z), \Phi_1(z), \dots]^t$ , entonces

- (i)  $\mathbf{H}_\Phi \mathbf{D}_\Phi \mathbf{H}_\Phi^* = \mathbf{D}_\Phi$ ,
- (ii)  $\mathbf{H}_\Phi^* \mathbf{D}_\Phi^{-1} \mathbf{H}_\Phi = \mathbf{D}_\Phi^{-1} - \lambda_\infty(0) \Phi(0) \Phi(0)^*$ ,

donde  $\mathbf{D}_\Phi$  es la matriz diagonal infinita  $\text{diag}(\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \dots)$ .

COROLARIO 2.1. *La matriz  $\mathbf{H}_\varphi$  es unitaria si y sólo si  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 = +\infty$ , lo que se traduce en términos de la medida  $\sigma$  en que  $\log \sigma' \notin L^1\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right)$ , esto es, la medida  $\sigma$  no pertenece a la clase de Szegő (ver [60]).*

Además, en este caso, los polinomios son densos en  $L^2(\mathbb{T}, \sigma)$ . Las filas de la matriz de Hessenberg son finitas, pero sus columnas pueden tener un número infinito de elementos distintos de cero. Esto, junto con la restricción de que la medida  $\sigma$  no pertenece a la clase de Szegő, representa un importante inconveniente en las aplicaciones.

### 2.1.2 Transformaciones espectrales en la circunferencia unidad

Sea  $\Theta : \mathbf{D}^\infty \rightarrow \mathbf{D}^\infty$  inyectiva, por el teorema de Verblunsky,  $\Theta$  induce una aplicación  $\Upsilon : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\Upsilon} & \mathcal{P} \\ s \downarrow & & \downarrow s \\ \mathbf{D}^\infty & \xrightarrow{\Theta} & \mathbf{D}^\infty \end{array} \quad (2.7)$$

es conmutativo, es decir,  $\Theta \circ \mathcal{P} = \mathcal{S} \circ \Upsilon$ . A la aplicación  $\Upsilon$  la llamaremos **transformación espectral**. Análogamente, cada aplicación  $\mathcal{F}$  sobre la familia de C-funciones  $F$ , tal que  $\mathcal{F}(F)$  es también C-función, induce una transformación espectral  $\Upsilon$  de manera que el diagrama (2.7) es conmutativo. A tales aplicaciones también las llamaremos transformaciones espectrales.

En lo que sigue mostraremos algunas transformaciones espectrales sobre  $\mathcal{P}$  a partir de ciertas aplicaciones (perturbaciones) sobre los coeficientes de Verblunsky  $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$  asociados a una medida de probabilidad  $\sigma$ , o a partir de transformaciones espectrales sobre una C-función.

#### Transformaciones espectrales lineales

Consideramos tres casos de transformaciones canónicas:

- (i) La perturbación  $d\tilde{\sigma} = |z - \alpha|^2 d\sigma$ ,  $|z| = 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , es la llamada transformación canónica de Christoffel.
- (ii) La perturbación  $d\tilde{\sigma} = d\sigma + M_c \delta(z - \alpha) + \overline{M}_c \delta(z - \bar{\alpha}^{-1})$ ,  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $M_c \in \mathbb{C}$ , es la llamada transformación de Uvarov (ver [44]).
- (iii) La perturbación  $d\tilde{\sigma} = \frac{d\sigma}{|z - \alpha|^2} + M_c \delta(z - \alpha) + \overline{M}_c \delta(z - \bar{\alpha}^{-1})$ ,  $|z| = 1$ ,  $M_c \in \mathbb{C}$  y  $|\alpha| \neq 1$ , es la llamada transformación de Geronimus (ver [28], [44]).

Estas tres transformaciones, denotadas por  $\mathcal{F}_C(\alpha)$ ,  $\mathcal{F}_U(\alpha, M_c)$  y  $\mathcal{F}_G(\alpha, M_c)$ , respectivamente, corresponden, de una manera análoga al caso de la recta real, a transformaciones espectrales lineales de la función de Carathéodory asociada. Este enfoque fue iniciado en [44].

### Polinomios asociados de segunda especie en la circunferencia unidad

Sea  $\mathcal{L}$  un funcional lineal Hermitiano cuasi-definido, normalizado de manera que  $c_0 = 1$  y sea  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios mónicos ortogonal respecto al funcional lineal  $\mathcal{L}$ . La sucesión de polinomios  $\{\Omega_n\}_{n \geq 0}$  definida por

$$\Omega_n(z) = \mathcal{L} \left( \frac{y+z}{y-z} (\Phi_n(y) - \Phi_n(z)) \right), \quad n \geq 1, \quad (2.8)$$

$$\Omega_0(z) = 1, \quad (2.9)$$

se denomina sucesión de polinomios de segunda especie asociados con el funcional  $\mathcal{L}$ . Nótese que el grado de  $\Omega_n$  es  $n$  y que  $\Omega_n(z)$  es mónico.

Estos polinomios también satisfacen la relación de recurrencia

$$\Omega_{n+1}(z) = z\Omega_n(z) - \Phi_{n+1}(0)\Omega_n^*(z), \quad n \geq 0,$$

y, por tanto,  $\{\Omega_n\}_{n \geq 0}$  es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a un funcional lineal Hermitiano cuasi-definido que denotaremos  $\mathcal{L}_\Omega$ .

PROPOSICION 2.1.3. [44] *Sea  $\Phi_n(z)$  el polinomio ortogonal mónico de grado  $n$  asociado con el funcional lineal  $\mathcal{L}$  y sea  $\Omega_n(z)$  tal y como se ha definido en (2.8). Entonces*

$$(a) \quad \Phi_n(z)F(z) + \Omega_n(z) = O(z^n), \quad |z| < 1,$$

$$(b) \quad \Phi_n^*(z)F(z) - \Omega_n^*(z) = O(z^{n+1}), \quad |z| < 1,$$

$$(c) \quad F_\Omega(z) = \frac{1}{F(z)},$$

donde  $F(z)$  y  $F_\Omega(z)$  son las funciones de Carathéodory asociadas a los funcionales lineales  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{L}_\Omega$ , respectivamente.

Así, este es un caso especial de transformación espectral racional propia de  $F(z)$ , que denotaremos mediante  $\mathcal{F}_\Omega$ .



### 2.1.3 Transformación de Aleksandrov

Consideremos la familia de parámetros de Verblunsky  $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$  y sea  $\lambda$  un número complejo con  $|\lambda| = 1$ . La transformación que resulta al considerar una nueva familia de parámetros de Verblunsky definidos por  $\{\Phi_n^\lambda(0)\}_{n \geq 1}$ , donde  $\Phi_n^\lambda(0) = \lambda\Phi_n(0)$ , se denomina transformación de Aleksandrov. En el caso especial  $\lambda = -1$ , los polinomios resultantes son los polinomios asociados de segunda especie definidos en el apartado anterior.

La correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos,  $\{\Phi_n^\lambda\}_{n \geq 0}$ , puede escribirse en términos de  $\Phi_n$  y  $\Omega_n$  como sigue

$$\begin{aligned}\Phi_n^\lambda(z) &= \frac{1}{2}(1 + \lambda)\Phi_n(z) + \frac{1}{2}(1 - \lambda)\Omega_n(z), \\ (\Phi_n^\lambda)^*(z) &= \frac{1}{2}(1 + \bar{\lambda})\Phi_n^*(z) + \frac{1}{2}(1 - \bar{\lambda})\Omega_n^*(z).\end{aligned}$$

Además, las correspondientes funciones de Carathéodory están relacionadas mediante

$$F^\lambda(z) = \frac{(\lambda + 1)F(z) + \lambda - 1}{(\lambda - 1)F(z) + \lambda + 1}. \quad (2.10)$$

Por otra parte, si denotamos por  $\mathbf{H}_\Phi^\lambda$  la matriz de Hessenberg correspondiente a la sucesión de polinomios ortogonales  $\{\Phi_n^\lambda\}_{n \geq 1}$ , estudiamos a continuación la relación entre  $\mathbf{H}_\Phi^\lambda$  y  $\mathbf{H}_\Phi$ .

Dado que  $\Phi_n^\lambda(0) = \lambda\Phi_n(0)$ , con  $|\lambda| = 1$ , deducimos de (1.26) que  $\frac{\kappa_{n+1}^\lambda}{\kappa_n^\lambda} = \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}$ ,  $n \geq 0$ , así como  $\kappa_0^\lambda = \frac{(\lambda+1)\kappa_0 + \lambda - 1}{(\lambda-1)\kappa_0 + \lambda + 1}$ . Es decir,  $\kappa_n^\lambda = \frac{\kappa_0^\lambda}{\kappa_0} \kappa_n$ .

Luego, de acuerdo con (2.3), los elementos de la matriz  $\mathbf{H}_\Phi^\lambda$  son los mismos de la matriz  $\mathbf{H}_\Phi$ , excepto los elementos de la primera columna, que están multiplicados por  $\lambda$ . Por tanto,

$$\mathbf{H}_\Phi^\lambda = \mathbf{H}_\Phi \text{diag}(\lambda, 1, 1, \dots).$$

### 2.1.4 Polinomios asociados de orden N en la circunferencia unidad

Sea  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a un funcional lineal cuasi-definido  $\mathcal{L}$ . Denotamos por  $\{\Phi_n^{(N)}\}_{n \geq 0}$  los

polinomios asociados de orden  $N$  de  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ , que están generados por la relación de recurrencia

$$\Phi_{n+1}^{(N)}(z) = z\Phi_n^{(N)}(z) + \Phi_{n+N+1}(0)(\Phi_n^{(N)})^*(z), \quad n \geq 0. \quad (2.11)$$

Obsérvese que  $\{\Phi_n^{(N)}\}_{n \geq 0}$  es también una sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a un funcional lineal cuasi-definido  $\mathcal{L}_N$ . Denotaremos esta transformación por  $\mathcal{F}^{(N)}$ , esto es,  $\mathcal{F}^{(N)}[F(z)] = F^{(N)}(z)$ , donde  $F(z)$  y  $F^{(N)}(z)$  son las funciones de Carathéodory asociadas a los funcionales respecto a los que son ortogonales  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{\Phi_n^{(N)}\}_{n \geq 0}$ , respectivamente.

La función de Carathéodory  $F^{(N)}(z)$  se puede expresar como una transformación espectral racional de  $F(z)$ , como sigue

$$F^{(N)}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{C(z)F(z) + D(z)}, \quad (2.12)$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= \Phi_N(z) + \Phi_N^*(z), \\ B(z) &= \Omega_N(z) - \Omega_N^*(z), \\ C(z) &= \Phi_N(z) - \Phi_N^*(z), \\ D(z) &= \Omega_N(z) + \Omega_N^*(z). \end{aligned}$$

Por otro lado, si denotamos por  $\mathbf{H}_N$  la matriz de Hessenberg correspondiente a  $\{\Phi_n^{(N)}\}_{n \geq 0}$ , consideremos ahora la relación entre  $\mathbf{H}_N$  y  $\mathbf{H}_\Phi$ . Observando que

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{K}_{n+1}^N}{\mathcal{K}_n^N} &= 1 - |\Phi_{n+1}^N(0)|^2 \\ &= 1 - |\Phi_{n+N+1}^N(0)|^2 \\ &= \frac{\mathcal{K}_{n+N+1}}{\mathcal{K}_{n+N}}, \end{aligned}$$

de (2.3), se sigue que las entradas de la matriz  $\mathbf{H}_N$  están dadas por

$$h_{k,j}^N = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k + 1, \\ -\frac{\mathcal{K}_k^N}{\mathcal{K}_j^N} \Phi_{n+1}^N(0) \overline{\Phi_j^N(0)} & \text{si } j \leq k, \\ 0 & \text{si } j > k + 1, \end{cases}$$

a excepción de las entradas de la primera columna, que satisfacen  $h_{k,0}^N = h_{k+N,0}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , las restantes entradas satisfacen

$$h_{k,j}^N = \begin{cases} h_{k+N,k+N+1} & \text{si } j = k + 1, \\ h_{k+N,j+N} & \text{si } 1 \leq j \leq k, \\ 0 & \text{si } j > k + 1. \end{cases}$$

Luego,

$$\mathbf{H}_N \text{diag}(\Phi_N(0), 1, 1, \dots) = (\mathbf{Z}^t)^N \mathbf{H}_\Phi \mathbf{Z}^N, \quad N \geq 1,$$

donde  $\mathbf{Z}$  es la matriz infinita con 1 en la subdiagonal principal inferior y las restantes entradas son nulas.

### 2.1.5 Los polinomios antiasociados de orden $N$ en la circunferencia unidad

Sea  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a un funcional lineal cuasi-definido  $\mathcal{L}$ . Sean  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N$  números complejos con  $|\nu_j| \neq 1$ ,  $1 \leq j \leq N$ . Denotamos los polinomios antiasociados de orden  $N$  de  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{\Phi_n^{(-N)}\}_{n \geq 0}$ , como los polinomios mónicos generados por los parámetros de Verblunsky

$$\{\hat{\Phi}_n(0)\}_{n \geq 1} = \{\nu_j\}_{j=1}^N \bigcup \{\Phi_j(0)\}_{j=1}^\infty.$$

Denotaremos esta transformación por  $\mathcal{F}^{(-N)}$ , esto es,

$$\mathcal{F}^{(-N)}[F(z)] = F^{(-N)}(z).$$

$F^{(-N)}(z)$  es la función de Carathéodory asociada con el funcional de ortogonalidad de  $\{\Phi_n^{(-N)}\}_{n \geq 0}$  que denotaremos mediante  $\mathcal{L}_{-N}$ .

$F^{(-N)}(z)$  se puede expresar como una transformación espectral racional de  $F(z)$  como sigue

$$F^{(-N)}(z) = \frac{\tilde{A}(z)F(z) + \tilde{B}(z)}{\tilde{C}(z)F(z) + \tilde{D}(z)}, \quad (2.13)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{A}(z) &= \tilde{\Omega}_N(z) + \tilde{\Omega}_N^*(z), \\ \tilde{B}(z) &= \tilde{\Omega}_N^*(z) - \tilde{\Omega}_N(z), \\ \tilde{C}(z) &= \tilde{\Phi}_N^*(z) - \tilde{\Phi}_N(z), \\ \tilde{D}(z) &= \tilde{\Phi}_N(z) + \tilde{\Phi}_N^*(z), \end{aligned}$$

y  $\tilde{\Phi}_N(z)$  (respectivamente  $\tilde{\Omega}_N(z)$ ) es el polinomio de grado  $N$  generado a partir de los números complejos  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N$  (respectivamente  $-\nu_1, -\nu_2, \dots, -\nu_N$ ), a través de la relación de recurrencia. Es decir,  $\tilde{\Omega}_N(z)$  es el polinomio de segunda especie asociado a  $\tilde{\Phi}_N(z)$  respecto al funcional  $\mathcal{L}_{-N}$ .

Finalmente, observemos que  $\mathcal{F}^{(N)} \circ \mathcal{F}^{(-N)}[F(z)] = F(z)$  (transformación identidad), mientras que el recíproco, en general, no se cumple, ya que depende de la elección de los parámetros libres en la transformación  $\mathcal{F}^{(-N)}$ .

### 2.1.6 Transformación de Christoffel

Consideremos la forma bilineal

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{L}_C} := \langle (z - \alpha)p, (z - \alpha)q \rangle_{\mathcal{L}}, \quad p, q \in \mathbb{P}(\mathbb{C}), \quad (2.14)$$

de tal manera que el funcional lineal asociado  $\mathcal{L}_C$  es hermitiano. Parece natural preguntarse qué condiciones se requieren para que  $\mathcal{L}_C$  sea cuasi-definido, supuesto que  $\mathcal{L}$  también lo sea. La respuesta a esta pregunta es

**TEOREMA 2.1.** [20] *El funcional lineal  $\mathcal{L}_C$ , cuya forma bilineal asociada es (2.14), es cuasi-definido si y sólo si  $K_n(\alpha, \alpha) \neq 0$ , para todo  $n \geq 0$ .*

$\mathcal{L}_C$  se denomina transformada canónica de Christoffel del funcional lineal  $\mathcal{L}$ . Si  $K_n(\alpha, \alpha) \neq 0$ , para todo  $n \geq 0$ , existe una sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociados a  $\mathcal{L}_C$ , que denotaremos  $\{R_n\}_{n \geq 0}$ . En estas condiciones es posible determinar la relación entre  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ , la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociados a  $\mathcal{L}$ , y  $\{R_n\}_{n \geq 0}$ .

**PROPOSICION 2.1.4.** *Sea  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios mónicos ortogonales respecto al funcional lineal  $\mathcal{L}$ . Entonces, la sucesión de polinomios mónicos  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  ortogonales respecto al funcional lineal  $\mathcal{L}_C$  está dada por*

$$R_n(z) = \frac{1}{z - \alpha} \left( \Phi_{n+1}(z) - \frac{\Phi_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)} K_n(z, \alpha) \right), \quad n \geq 0. \quad (2.15)$$

La representación matricial de (2.15) es

$$(z - \alpha)R(z) = \mathbf{N}\Phi(z), \quad (2.16)$$

donde  $R(z) = [R_0(z), R_1(z), \dots]^t$ ,  $\Phi(z) = [\Phi_0(z), \Phi_1(z), \dots]^t$  y  $\mathbf{N}$  es una matriz de Hessenberg inferior con entradas

$$n_{i,j} = \begin{cases} -\frac{\Phi_{i+1}(\alpha)\overline{\Phi_j(\alpha)}}{K_i(\alpha,\alpha)}, & \text{si } j \leq i, \\ 1 & \text{si } j = i + 1, \\ 0, & \text{si } j > i + 1. \end{cases} \quad (2.17)$$

Supongamos ahora que el funcional lineal  $\mathcal{L}$  es definido positivo y sea  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a  $\mathcal{L}$  dada por

$$\varphi_n(z) = \kappa_n \Phi_n(z).$$

Estudiaremos la perturbación  $\mathcal{L}_C$  del funcional lineal  $\mathcal{L}$  introducida en (2.14). Notemos que el nuevo funcional lineal  $\mathcal{L}_C$  es también hermitiano y definido positivo, y entonces podemos considerar la familia  $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$  de polinomios ortonormales asociada al funcional  $\mathcal{L}_C$ .

Procedamos ahora a mostrar la relación entre las matrices de Hessenberg  $\mathbf{H}_\varphi$  y  $\mathbf{H}_\psi$  asociadas al operador de multiplicación por  $z$  en términos de las bases  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ , respectivamente. En primer lugar, deduciremos una expresión que relaciona los polinomios ortonormales  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$  con respecto a  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{L}_C$ , respectivamente.

A partir de (2.15) mediante la correspondiente normalización obtenemos

$$(z - \alpha)\psi_n(z) = \sqrt{\frac{K_n(\alpha, \alpha)}{K_{n+1}(\alpha, \alpha)}} \varphi_{n+1}(z) - \sum_{j=0}^n \frac{\varphi_{n+1}(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{K_{n+1}(\alpha, \alpha)K_n(\alpha, \alpha)}} \varphi_j(z). \quad (2.18)$$

### Matrices de Hessenberg

Si consideramos

$$\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z), \dots]^t \quad y$$

$$\Psi(z) = [\psi_0(z), \psi_1(z), \dots, \psi_n(z), \dots]^t,$$

entonces, en forma matricial, la expresión (2.18) resulta ser

$$(z - \alpha)\Psi(z) = \mathbf{M}_C\varphi(z), \quad (2.19)$$

donde  $\mathbf{M}_C$  es una matriz Hessenberg inferior cuyas entradas  $m_{i,j}$  están dadas por

$$m_{i,j} = \begin{cases} -\frac{\varphi_{i+1}(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{K_{i+1}(\alpha,\alpha)K_i(\alpha,\alpha)}}, & \text{si } j \leq i, \\ \sqrt{\frac{K_i(\alpha,\alpha)}{K_{i+1}(\alpha,\alpha)}}, & \text{si } j = i + 1, \\ 0, & \text{si } j > i + 1. \end{cases} \quad (2.20)$$

PROPOSICION 2.1.5. *La matriz  $\mathbf{M}_C$  satisface*

$$(i) \quad \mathbf{M}_C\mathbf{M}_C^* = \mathbf{I}.$$

$$(ii) \quad \mathbf{M}_C^*\mathbf{M}_C = \mathbf{I} - \lambda_\infty(\alpha)\varphi(\alpha)\varphi(\alpha)^*.$$

**Demostración.** Debido al carácter ortonormal de  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$  respecto a  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{L}_C$ , respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \langle \Psi(z), \Psi(z)^t \rangle_{\mathcal{L}_C} = \langle (z - \alpha)\Psi(z), (z - \alpha)\Psi^t(z) \rangle_{\mathcal{L}} \\ &= \langle \mathbf{M}_C\varphi(z), \varphi(z)^t\mathbf{M}_C^t \rangle_{\mathcal{L}} = \mathbf{M}_C \langle \varphi(z), \varphi(z)^t \rangle_{\mathcal{L}} \mathbf{M}_C^* = \mathbf{M}_C\mathbf{M}_C^*. \end{aligned}$$

(ii) Para  $j = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{C(j)}^*\mathbf{M}_C^{(j)} &= \frac{K_{j-1}(\alpha,\alpha)}{K_j(\alpha,\alpha)} + |\varphi_j(\alpha)|^2 \sum_{l=j}^{\infty} \frac{|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha,\alpha)K_l(\alpha,\alpha)} \\ &= \frac{K_{j-1}(\alpha,\alpha)}{K_j(\alpha,\alpha)} + |\varphi_j(\alpha)|^2 \sum_{l=j}^{\infty} \left( \frac{1}{K_l(\alpha,\alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha,\alpha)} \right) \\ &= 1 - \frac{|\varphi_j(\alpha)|^2}{K_\infty(\alpha,\alpha)} \\ &= 1 - \lambda_\infty(\alpha)|\varphi_j(\alpha)|^2. \end{aligned}$$

Para  $k < j$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{C^{(k)}}^* \mathbf{M}_C^{(j)} &= -\frac{\varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_j(\alpha, \alpha)} + \varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)} \sum_{l=j}^{\infty} \frac{|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha, \alpha) K_l(\alpha, \alpha)} \\
 &= \varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)} \left( -\frac{1}{K_j(\alpha, \alpha)} + \sum_{l=j}^{\infty} \left( \frac{1}{K_l(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)} \right) \right) \\
 &= -\frac{\varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_{\infty}(\alpha, \alpha)} \\
 &= -\lambda_{\infty}(\alpha) \varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)}.
 \end{aligned}$$

■

OBSERVACION 2.1.1. De acuerdo con el teorema 1.4, la matriz  $\mathbf{M}_C$  es unitaria si  $|\alpha| > 1$ . Si  $|\alpha| = 1$  entonces  $\lambda_{\infty}(\alpha) = 0$  siempre y cuando  $\sigma(\{\alpha\}) = 0$ .

Si  $|\alpha| < 1$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 = \infty$ , esto es, si la medida  $\sigma$  no pertenece a la clase de Szegő, entonces  $\mathbf{M}_C$  es unitaria.

El resultado análogo a la proposición anterior para las submatrices principales es el siguiente:

PROPOSICION 2.1.6. Sea  $\mathbf{M}_{C_n}$  la submatriz principal de dimensión  $n \times n$  de  $\mathbf{M}_C$ .

(i) Consideremos el vector columna  $e_n = [0, \dots, 0, 1]^t \in \mathbb{C}^{(n,1)}$ , entonces

$$\mathbf{M}_{C_n} \mathbf{M}_{C_n}^* = \mathbf{I}_n - \frac{K_{n-1}(\alpha, \alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)} e_n e_n^*,$$

donde  $\mathbf{I}_n$  denota la matriz unidad de dimensión  $n \times n$ .

(ii) Sea  $\varphi^{(n)}(\alpha) = [\varphi_0(\alpha), \varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_{n-1}(\alpha)]^t$ , entonces

$$\mathbf{M}_{C_n}^* \mathbf{M}_{C_n} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{K_n(\alpha, \alpha)} \varphi^{(n)}(\alpha) \varphi^{(n)*}(\alpha).$$

**Demostración.** Para  $0 \leq k \leq n-2$ , deducimos

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_{C_n})_{(k)}(\mathbf{M}_{C_n}^*)_{(k)} &= \frac{|\varphi_{k+1}(\alpha)|^2}{K_{k+1}(\alpha, \alpha)K_k(\alpha, \alpha)} \sum_{l=0}^k |\varphi_l(\alpha)|^2 + \frac{K_k(\alpha, \alpha)}{K_{k+1}(\alpha, \alpha)} \\ &= \frac{|\varphi_{k+1}(\alpha)|^2}{K_{k+1}(\alpha, \alpha)K_k(\alpha, \alpha)} K_k(\alpha, \alpha) + \frac{K_k(\alpha, \alpha)}{K_{k+1}(\alpha, \alpha)} = 1. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_{C_n})_{(n-1)}(\mathbf{M}_{C_n}^*)_{(n-1)} &= \frac{|\varphi_n(\alpha)|^2}{K_n(\alpha, \alpha)K_{n-1}(\alpha, \alpha)} \sum_{l=0}^{n-1} |\varphi_l(\alpha)|^2 \\ &= \frac{|\varphi_n(\alpha)|^2}{K_n(\alpha, \alpha)} = 1 - \frac{K_{n-1}(\alpha, \alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)}. \end{aligned}$$

Finalmente, para  $k < j$ , obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_{C_n})_{(k)}(\mathbf{M}_{C_n}^*)_{(j)} &= \sum_{l=0}^k \frac{\varphi_{k+1}(\alpha)\overline{\varphi_{j+1}(\alpha)}|\varphi_l(\alpha)|^2}{\sqrt{K_{k+1}(\alpha, \alpha)K_k(\alpha, \alpha)}\sqrt{K_{j+1}(\alpha, \alpha)K_j(\alpha, \alpha)}} \\ &\quad - \frac{\varphi_{k+1}(\alpha)\overline{\varphi_{j+1}(\alpha)}}{\sqrt{K_{j+1}(\alpha, \alpha)K_j(\alpha, \alpha)}}\sqrt{\frac{K_k(\alpha, \alpha)}{K_{k+1}(\alpha, \alpha)}} \\ &= \frac{\varphi_{k+1}(\alpha)\overline{\varphi_{j+1}(\alpha)}\left(\sum_{l=0}^k |\varphi_l(\alpha)|^2 - K_i(\alpha, \alpha)\right)}{\sqrt{K_{k+1}(\alpha, \alpha)K_k(\alpha, \alpha)K_{j+1}(\alpha, \alpha)K_j(\alpha, \alpha)}} \\ &= 0. \end{aligned}$$



(ii) Para  $1 \leq k \leq n-1$ ,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{M}_{C_n^*})^{(k)}(\mathbf{M}_{C_n})^{(k)} &= \frac{K_{k-1}(\alpha, \alpha)}{K_k(\alpha, \alpha)} + \sum_{l=k}^{n-1} \frac{|\varphi_k(\alpha)|^2 |\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha, \alpha) K_l(\alpha, \alpha)} \\
 &= \frac{K_{k-1}(\alpha, \alpha)}{K_k(\alpha, \alpha)} + |\varphi_k(\alpha)|^2 \sum_{l=k}^{n-1} \left( \frac{1}{K_l(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)} \right) \\
 &= \frac{K_{k-1}(\alpha, \alpha)}{K_k(\alpha, \alpha)} + |\varphi_k(\alpha)|^2 \left( \frac{1}{K_k(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_n(\alpha, \alpha)} \right) \\
 &= 1 - \frac{|\varphi_k(\alpha)|^2}{K_n(\alpha, \alpha)},
 \end{aligned}$$

así como

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{M}_{C_n^*})^{(0)}(\mathbf{M}_{C_n})^{(0)} &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{|\varphi_0(\alpha)|^2 |\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha, \alpha) K_l(\alpha, \alpha)} \\
 &= |\varphi_0(\alpha)|^2 \sum_{l=0}^{n-1} \left( \frac{1}{K_l(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)} \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{K_n(\alpha, \alpha)}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, para  $k < j$ ,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{M}_{C_n^*})^{(k)}(\mathbf{M}_{C_n})^{(j)} &= -\frac{\varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{K_j(\alpha, \alpha) K_{j-1}(\alpha, \alpha)}} \sqrt{\frac{K_{j-1}(\alpha, \alpha)}{K_j(\alpha, \alpha)}} \\
 &\quad + \sum_{l=k}^{n-1} \frac{|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2 \varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_{l+1}(\alpha, \alpha) K_l(\alpha, \alpha)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_j(\alpha, \alpha)} + \varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)} \sum_{l=j}^{n-1} \frac{|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)K_l(\alpha, \alpha)} \\
&= -\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)} \left( \frac{1}{K_j(\alpha, \alpha)} - \sum_{l=j}^{n-1} \left( \frac{1}{K_l(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)} \right) \right) \\
&= -\frac{\varphi_k(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_n(\alpha, \alpha)}.
\end{aligned}$$

■

En la literatura, la matriz  $\mathbf{M}_{C_n}$  se denomina *casi-unitaria* (ver [60]) en el sentido de que las primeras  $n - 1$  filas constituyen un conjunto ortonormal y la última fila es ortogonal con respecto a ese conjunto, pero no está normalizada.

Para obtener una relación entre las matrices de Hessenberg  $\mathbf{H}_\varphi$  y  $\mathbf{H}_\psi$ , introducimos la matriz de cambio de base  $\mathbf{L}_{\varphi\psi}$  tal que  $\varphi(z) = \mathbf{L}_{\varphi\psi}\Psi(z)$ . Esta matriz puede expresarse en términos de las matrices  $\mathbf{H}_\varphi$  y  $\mathbf{M}_C$  de la siguiente manera

PROPOSICION 2.1.7.

$$\mathbf{L}_{\varphi\psi} = (\mathbf{H}_\varphi - \alpha\mathbf{I})\mathbf{M}_C^*. \quad (2.21)$$

**Demostración.** Sea  $\mathbf{L}_{\varphi\psi}$  la matriz de cambio de base tal que  $\varphi(z) = \mathbf{L}_{\varphi\psi}\Psi(z)$ . Entonces

$$(z - \alpha)\Psi(z) = (z - \alpha)\mathbf{L}_{\varphi\psi}^{-1}\varphi(z).$$

De la relación (2.19) obtenemos

$$\mathbf{M}_C\varphi(z) = \mathbf{L}_{\varphi\psi}^{-1}(\mathbf{H}_\varphi - \alpha\mathbf{I})\varphi(z).$$

De esta forma,

$$\mathbf{L}_{\varphi\psi}\mathbf{M}_C = \mathbf{H}_\varphi - \alpha\mathbf{I},$$

y dado que  $\mathbf{M}_C\mathbf{M}_C^* = \mathbf{I}$  (Proposición 2.1.5), se sigue el enunciado.

■

De la proposición anterior se sigue que

PROPOSICION 2.1.8.

$$\mathbf{H}_\psi - \alpha \mathbf{I} = \mathbf{M}_C \mathbf{L}_{\varphi\psi}.$$

**Demostración.** De la expresión (2.19),

$$(z - \alpha)\Psi(z) = \mathbf{M}_C \varphi(z).$$

Por tanto,

$$(\mathbf{H}_\psi - \alpha \mathbf{I})\Psi(z) = \mathbf{M}_C \mathbf{L}_{\varphi\psi} \Psi(z),$$

y, en consecuencia, deducimos el enunciado. ■

Para calcular  $\mathbf{H}_\psi$  partiendo de  $\mathbf{H}_\varphi$ , primero necesitamos encontrar la matriz triangular inferior  $\mathbf{L}_{\varphi\psi}$ . De las expresiones (2.20) y (2.21), mediante cálculos sencillos deducimos

PROPOSICION 2.1.9. *Las entradas  $l_{n,j}$  de la matriz  $\mathbf{L}_{\varphi\psi}$  son*

$$l_{n,j} = \begin{cases} \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} \sqrt{\frac{K_{n+1}(\alpha, \alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)}}, & \text{para } j = n, \\ \frac{\overline{\varphi_n(\alpha)} \left( \frac{\Phi_{n+1}(0)}{\kappa_n} \kappa_{n-1} \varphi_{n-1}^*(\alpha) \right)}{\sqrt{K_n(\alpha, \alpha) K_{n-1}(\alpha, \alpha)}} - \left( \Phi_{n+1}(0) \overline{\Phi_n(0)} + \alpha \right) \sqrt{\frac{K_{n-1}(\alpha, \alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)}}, & \\ \text{para } j = n - 1, \\ \frac{\Phi_{n+1}(0)}{\kappa_n \sqrt{K_j(\alpha, \alpha) K_{j+1}(\alpha, \alpha)}} \left( \kappa_j \overline{\varphi_{j+1}(\alpha)} \varphi_j^*(\alpha) - \overline{\varphi_{j+1}(0)} K_j(\alpha, \alpha) \right), & \\ \text{para } j \leq n - 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Obsérvese que, para sucesiones de polinomios ortogonales mónicos, teniendo en cuenta que  $\varphi_n(z) = \kappa_n \Phi_n(z)$ , la matriz de cambio de base  $\mathbf{L}_{\Phi R}$ , tal que  $\Phi(z) = \mathbf{L}_{\Phi R} R(z)$ , puede expresarse en términos de  $\mathbf{L}_{\varphi\psi}$  como

$$\mathbf{L}_{\Phi R} = \mathbf{D}_\Phi^{-1} \mathbf{L}_{\varphi\psi} \mathbf{D}_R, \quad (2.22)$$

donde  $\mathbf{D}_\Phi = \text{diag}(\kappa_0, \kappa_1, \dots)$ ,  $\mathbf{D}_R = \text{diag}(r_0, r_1, \dots)$  y  $r_j$  es el coeficiente principal de  $\psi_j(z)$ .

### Ejemplo

Consideremos ahora los funcionales bilineales

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{L}} = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) \overline{q(e^{i\theta})} \frac{1}{|e^{i\theta} - \beta|^2} \frac{d\theta}{2\pi},$$

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{L}_C} = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) \overline{q(e^{i\theta})} \frac{|e^{i\theta} - \alpha|^2}{|e^{i\theta} - \beta|^2} \frac{d\theta}{2\pi},$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $|\beta| < 1$  y  $|\alpha| = 1$  (ver [28]). En este caso, es bien conocido que la sucesión  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  está dada por

$$\varphi_0(z) = (1 - |\beta|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi_n(z) = z^{n-1}(z - \beta), \quad \text{para } n \geq 1.$$

De esta manera,

$$\mathbf{H}_\varphi - \alpha \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \beta - \alpha & (1 - |\beta|^2)^{\frac{1}{2}} & 0 & \cdots \\ 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

y el  $n$ -ésimo núcleo reproductor  $K_n(z, \alpha)$  correspondiente a  $\mathcal{L}$  es

$$K_n(z, \alpha) = 1 - |\beta|^2 + \sum_{j=1}^n (z - \beta) \overline{(\alpha - \beta)} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{j-1}.$$

En consecuencia, tenemos

$$K_n(\alpha, \alpha) = 1 - |\beta|^2 + n|\alpha - \beta|^2.$$

Las entradas  $m_{l,j}$  de  $\mathbf{M}_C$  son

$$m_{l,j} = \begin{cases} -\frac{\alpha^l(\alpha - \beta)(1 - |\beta|^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{K_l(\alpha, \alpha)K_{l+1}(\alpha, \alpha)}}, & \text{si } j = 0, \\ -\frac{|\alpha - \beta|^2 \alpha^{l-j+1}}{\sqrt{K_l(\alpha, \alpha)K_{l+1}(\alpha, \alpha)}}, & \text{si } 1 \leq j \leq l, \\ \sqrt{\frac{K_l(\alpha, \alpha)}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)}}, & \text{si } j = l + 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.23)$$

De (2.21), deducimos que  $\mathbf{L}_{\varphi\psi} = (\mathbf{H}_\varphi - \alpha\mathbf{I})\mathbf{M}_C^*$ . De ahí, obtenemos las entradas  $l_{r,j}$  de la matriz  $\mathbf{L}_{\varphi\psi}$

$$l_{r,j} = \begin{cases} \sqrt{K_1(\alpha, \alpha)}, & j = r = 0, \\ -\alpha \sqrt{\frac{K_{r-1}(\alpha, \alpha)}{K_r(\alpha, \alpha)}}, & j = r - 1, \\ \sqrt{\frac{K_{r+1}(\alpha, \alpha)}{K_r(\alpha, \alpha)}}, & j = r, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.24)$$

De acuerdo con la proposición 2.1.8 las entradas  $\tilde{h}_{r,j}$  de la matriz  $\mathbf{H}_\psi - \alpha\mathbf{I}$  son

$$\tilde{h}_{r,j} = \begin{cases} -\left(\alpha - \beta + \alpha \frac{K_0(\alpha, \alpha)}{K_1(\alpha, \alpha)}\right), & \text{si } r = j = 0, \\ -\frac{\alpha^{r-1}(1 - |\beta|^2)^{\frac{1}{2}}(\alpha - \beta)^2}{\sqrt{K_1(\alpha, \alpha)K_r(\alpha, \alpha)K_{r+1}(\alpha, \alpha)}}, & \text{si } j = 0, r \geq 1, \\ \frac{\sqrt{K_r(\alpha, \alpha)K_{r+2}(\alpha, \alpha)}}{K_{r+1}(\alpha, \alpha)}, & \text{si } j = r + 1, \\ -\alpha \left(\frac{|\alpha - \beta|^2}{K_r(\alpha, \alpha)} - \frac{K_r(\alpha, \alpha)}{K_{r+1}(\alpha, \alpha)}\right), & \text{si } 1 \leq j = r, \\ -\frac{|\alpha - \beta|^4 \alpha^{r-j+1}}{\sqrt{K_r(\alpha, \alpha)K_{r+1}(\alpha, \alpha)K_j(\alpha, \alpha)K_{j+1}(\alpha, \alpha)}}, & \text{si } 1 \leq j < r, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

### Funciones de Carathéodory

Sea  $\mathcal{L}$  un funcional lineal definido positivo en  $\Lambda$  y sea  $F(z)$  la correspondiente función de Carathéodory. Consideremos ahora una transformación espectral racional lineal  $\tilde{F}$  de  $F$ , de la siguiente manera

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)}, \quad (2.25)$$

donde  $A(z)$ ,  $B(z)$  y  $D(z)$  son polinomios en  $z$ . La función  $\tilde{F}$  es analítica en un entorno de  $z = 0$ , es decir,

$$\tilde{F}(z) = \tilde{c}_0 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_{-n} z^n,$$

donde  $\tilde{c}_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{c}_{-k} \in \mathbb{C}$  para  $k \in \mathbb{N}$ , y  $\overline{\lim} |\tilde{c}_k|^{\frac{1}{k}} < \infty$ , y puede ser asociada con el funcional lineal  $\tilde{\mathcal{L}}$  en  $\Lambda$  dado por

$$\langle \tilde{\mathcal{L}}, z^n \rangle = \tilde{c}_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

con el convenio  $\tilde{c}_n = \bar{\tilde{c}}_{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Sea  $\tilde{\mathcal{L}}$  un funcional lineal tal que el funcional bilineal asociado satisface

$$\langle p, q \rangle_{\tilde{\mathcal{L}}} = \langle (z - \alpha)p, (z - \alpha)q \rangle_{\mathcal{L}}, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (2.26)$$

Es decir,  $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_C$ , la transformación canónica de Christoffel de  $\mathcal{L}$  definida en (2.14).

Si

$$F_C(z) = \tilde{c}_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_{-n} z^n,$$

con  $\tilde{c}_{-k} = \langle 1, z^k \rangle_{\mathcal{L}_C}$ , probaremos que es una transformación espectral lineal de  $F$ . Dado que

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{-k} &= \langle 1, z^k \rangle_{\mathcal{L}_C} \\ &= \langle (z - \alpha, (z - \alpha)z^k \rangle_{\mathcal{L}} \\ &= \langle z - \alpha, z^{k+1} - \alpha z^k \rangle_{\mathcal{L}} \\ &= c_{-k} - \alpha c_{-(k+1)} - \bar{\alpha} c_{-(k-1)} + |\alpha|^2 c_{-k} \\ &= (1 + |\alpha|^2) c_{-k} - \alpha c_{-(k+1)} - \bar{\alpha} c_{-(k-1)}, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
F_C(z) &= \tilde{c}_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_{-n} z^n \\
&= (1 + |\alpha|^2) c_0 - \alpha c_{-1} - \bar{\alpha} c_1 - 2\bar{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-(n-1)} z^n \\
&\quad - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} c_{-(n+1)} z^n + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\alpha|^2) c_k z^k \\
&= (1 + |\alpha|^2) F(z) - \bar{\alpha} \left( c_1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_{-k} z^{k+1} \right) \\
&\quad - \alpha \left( c_{-1} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} c_{-k} z^{k-1} \right).
\end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned}
F_C(z) &= (1 + |\alpha|^2) F(z) - \bar{\alpha} (c_1 + z(F(z) + c_0)) \\
&\quad - \alpha \left( c_{-1} + \frac{1}{z} (F(z) - c_0 - 2c_{-1}z) \right) \\
&= \frac{-\bar{\alpha}z^2 + (1 + |\alpha|^2)z - \alpha}{z} F(z) + \frac{-\bar{\alpha}c_0z^2 + (\alpha c_{-1} - \bar{\alpha}c_1)z + \alpha c_0}{z}.
\end{aligned}$$

Así pues,

PROPOSICION 2.1.10.

$$F_C(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)}, \quad (2.27)$$

donde

$$\begin{aligned}
A(z) &= (1 - \bar{\alpha}z)(z - \alpha), \\
B(z) &= -\bar{\alpha}c_0z^2 + (\alpha c_{-1} - \bar{\alpha}c_1)z + \alpha c_0, \\
D(z) &= z.
\end{aligned}$$

### Coefficientes de Verblunsky

Ahora encontraremos la relación entre  $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$ , la familia de coeficientes de Verblunsky asociados a la sucesión de polinomios ortogonales mónicos  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ , respecto al funcional lineal  $\mathcal{L}$ , y la familia de coeficientes de Verblunsky  $\{R_n(0)\}_{n \geq 1}$  correspondientes a  $\{R_n\}_{n \geq 0}$ , la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a  $\mathcal{L}_C$ .

PROPOSICION 2.1.11. *Sea  $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$  la familia de coeficientes de Verblunsky correspondientes a  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ , la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al funcional lineal  $\mathcal{L}$ . Entonces, la familia de coeficientes de Verblunsky correspondientes a  $\{R_n\}_{n \geq 0}$ , resulta ser*

$$R_n(0) = \frac{\Phi_{n+1}(\alpha)\overline{\Phi_n^*(\alpha)}}{\alpha\mathcal{K}_n K_n(\alpha, \alpha)} - \frac{\Phi_{n+1}(0)}{\alpha}, \quad n \geq 1. \quad (2.28)$$

**Demostración.** Usando (2.15) y evaluando en  $z = 0$ , obtenemos

$$R_n(0) = -\alpha^{-1} \left( \Phi_{n+1}(0) - \frac{\Phi_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)} K_n(0, \alpha) \right).$$

Aplicando la fórmula de Christoffel-Darboux,

$$R_n(0) = -\alpha^{-1} \left( \Phi_{n+1}(0) - \frac{\Phi_{n+1}(\alpha)}{\mathcal{K}_n K_n(\alpha, \alpha)} \Phi_n^*(0) \overline{\Phi_n^*(\alpha)} \right) \quad (2.29)$$

$$= \frac{\Phi_{n+1}(\alpha)\overline{\Phi_n^*(\alpha)}}{\alpha\mathcal{K}_n K_n(\alpha, \alpha)} - \frac{\Phi_{n+1}(0)}{\alpha}, \quad (2.30)$$

dado que  $\Phi_n^*(0) = 1$ .

Otra manera de expresar (2.30) es

$$\begin{aligned} R_n(0) &= \frac{[\alpha\Phi_n(\alpha) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(\alpha)]\overline{\Phi_n^*(\alpha)}}{\alpha\mathcal{K}_n K_n(\alpha, \alpha)} - \frac{\Phi_{n+1}(0)}{\alpha} \\ &= \left[ \frac{|\Phi_n^*(\alpha)|^2}{\mathcal{K}_n K_n(\alpha, \alpha)} - 1 \right] \frac{\Phi_{n+1}(0)}{\alpha} + \frac{\Phi_n(\alpha)\Phi_n^*(\alpha)}{\mathcal{K}_n K_n(\alpha, \alpha)}, \end{aligned}$$

es decir, existe una dependencia lineal entre ambas familias de coeficientes de Verblunsky.



Notemos que, si  $|\alpha| \neq 1$ , la expresión para los coeficientes de Verblunsky  $\{R_n(0)\}_{n \geq 1}$  en términos de  $\Phi_n(\alpha)$  y  $\Phi_n^*(\alpha)$  es

$$\begin{aligned}
 R_n(0) &= \frac{\Phi_{n+1}(\alpha)\overline{\Phi_n^*(\alpha)}(1-|\alpha|^2)}{\alpha[|\Phi_n^*(\alpha)|^2-|\alpha|^2|\Phi_n(\alpha)|^2]} - \frac{\Phi_{n+1}(0)}{\alpha} \\
 &= \frac{[\alpha\Phi_n(\alpha) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(\alpha)]\overline{\Phi_n^*(\alpha)}(1-|\alpha|^2)}{\alpha[|\Phi_n^*(\alpha)|^2-|\alpha|^2|\Phi_n(\alpha)|^2]} - \frac{\Phi_{n+1}(0)}{\alpha} \\
 &= \frac{1}{\alpha} \frac{(\alpha\Phi_n(\alpha)\overline{\Phi_n^*(\alpha)} + \Phi_{n+1}(0)|\Phi_n^*(\alpha)|^2)(1-|\alpha|^2)}{|\Phi_n^*(\alpha)|^2-|\alpha|^2|\Phi_n(\alpha)|^2} \\
 &\quad - \frac{1}{\alpha} \frac{\Phi_{n+1}(0)|\Phi_n^*(\alpha)|^2 + |\alpha|^2\Phi_{n+1}(0)|\Phi_n(\alpha)|^2}{|\Phi_n^*(\alpha)|^2-|\alpha|^2|\Phi_n(\alpha)|^2}.
 \end{aligned}$$

Así pues,

$$R_n(0) = \frac{\Phi_n(\alpha)\overline{\Phi_n^*(\alpha)}(1-|\alpha|^2) + \bar{\alpha}\Phi_{n+1}(0)[|\Phi_n(\alpha)|^2 - |\Phi_n^*(\alpha)|^2]}{|\Phi_n^*(\alpha)|^2 - |\alpha|^2|\Phi_n(\alpha)|^2},$$

Es decir,  $R_n(0)$  se puede expresar mediante

$$R_n(0) = A(\alpha; n)\Phi_{n+1}(0) + B(\alpha; n),$$

con

$$A(\alpha; n) = \frac{\bar{\alpha}[|\Phi_n(\alpha)|^2 - |\Phi_n^*(\alpha)|^2]}{|\Phi_n^*(\alpha)|^2 - |\alpha|^2|\Phi_n(\alpha)|^2},$$

$$B(\alpha; n) = \frac{\Phi_n(\alpha)\overline{\Phi_n^*(\alpha)}(1-|\alpha|^2)}{|\Phi_n^*(\alpha)|^2 - |\alpha|^2|\Phi_n(\alpha)|^2}.$$

Por otra parte, si  $|\alpha| = 1$ ,

$$\begin{aligned}
 K_n(z, \alpha) &= \frac{\overline{\Phi_{n+1}^*(\alpha)}\Phi_{n+1}^*(z) - \overline{\Phi_{n+1}(\alpha)}\Phi_{n+1}(z)}{\mathcal{K}_{n+1}(1 - \bar{\alpha}z)} \\
 &= \frac{\overline{\alpha\Phi_{n+1}(\alpha)}\Phi_{n+1}(z) - \bar{\alpha}^n\Phi_{n+1}(\alpha)\Phi_{n+1}^*(z)}{\mathcal{K}_{n+1}(z - \alpha)},
 \end{aligned}$$

y aplicando la regla de L'Hôpital, obtenemos

$$\begin{aligned} K_n(\alpha, \alpha) &= \lim_{z \rightarrow \alpha} K_n(z, \alpha) = \frac{\overline{\alpha \Phi_{n+1}(\alpha)} \Phi'_{n+1}(z) - \bar{\alpha}^n \Phi_{n+1}(\alpha) \Phi_{n+1}'(z)}{\mathcal{K}_{n+1}} \\ &= \frac{\overline{\alpha \Phi_{n+1}(\alpha)} \Phi'_{n+1}(\alpha) - \bar{\alpha}^n \Phi_{n+1}(\alpha) \Phi_{n+1}'(\alpha)}{\mathcal{K}_{n+1}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} R_n(0) &= \frac{\mathcal{K}_{n+1} \Phi_{n+1}(\alpha) \overline{\Phi_n^*(\alpha)}}{\alpha \mathcal{K}_n [\overline{\alpha \Phi_{n+1}(\alpha)} \Phi'_{n+1}(\alpha) - \bar{\alpha}^n \Phi_{n+1}(\alpha) \Phi_{n+1}'(\alpha)]} - \frac{\Phi_{n+1}(0)}{\alpha} \\ &= \frac{\Phi_{n+1}(\alpha) \overline{\Phi_n^*(\alpha)} (1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2)}{\alpha [\overline{\alpha \Phi_{n+1}(\alpha)} \Phi'_{n+1}(\alpha) - \bar{\alpha}^n \Phi_{n+1}(\alpha) \Phi_{n+1}'(\alpha)]} - \frac{\Phi_{n+1}(0)}{\alpha}. \end{aligned}$$

■

**TEOREMA 2.2.** *Supongamos que  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 < \infty$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_{n+1}(0) - \Phi_n(0)| < \infty$ . Entonces, para todo  $\delta > 0$ ,*

$$\sup_{n; \delta < \arg(z) < 2\pi - \delta} |\Phi_n^*(z)| < \infty.$$

*Además, fuera de  $z = 1$ , tenemos que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^*(z)$ , es continuo e igual a  $D(0)D(z)^{-1}$ , donde  $D(z)$  es la función de Szegő definida en (1.22). Por otra parte,  $d\sigma_s = 0$  ó si no, es a lo más una medida discreta consistente en un punto con masa en  $|z| = 1$ .*

**PROPOSICION 2.1.12.** *Supongamos que  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 < \infty$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_{n+1}(0) - \Phi_n(0)| < \infty$ . Entonces, para  $|\alpha| \leq 1$ ,  $\alpha \neq 1$ ,*

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} |R_n(0)|^2 < \infty$ .
- (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} |R_{n+1}(0) - R_n(0)| < \infty$ .

**Demostración.**

(a) Llamamos

$$t_{n+1} = \frac{\Phi_{n+1}(\alpha)\overline{\Phi_n^*(\alpha)}}{\alpha\mathcal{K}_nK_n(\alpha, \alpha)}.$$

Sea  $|\alpha| = 1$ . Obsérvese que  $\overline{\Phi_{n+1}(\alpha)} = \overline{\alpha^{n+1}\Phi_{n+1}^*(\alpha)}$  y, por el teorema 2.2, sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^*(\alpha) = D(0)D(\alpha)^{-1}$ , donde  $D$  es la función de Szegő. Esto también implica que

$$1/K_n(\alpha, \alpha) = O(1/n).$$

Para  $|\alpha| < 1$ , obsérvese que  $\Phi_n(\alpha)$  y  $\Phi_n^*(\alpha)$  son  $O(\alpha^n)$  y  $1/K_\infty(\alpha, \alpha) = \lambda_\infty(\alpha) > 0$ , donde  $\lambda_n$  es la función de Christoffel asociada a  $\sigma$ .

Entonces  $t_{n+1}$  es  $O(1/n)$ . Dado que  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 < \infty$  y  $t_{n+1}$  es  $O(1/n)$ , entonces  $\sum_{n=0}^{\infty} |R_n(0)|^2 < \infty$ .

(b) Dado que  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_{n+1}(0) - \Phi_n(0)| < \infty$ , sólo necesitamos probar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |t_{n+1} - t_n| < \infty.$$

Nótese que, de la relación de recurrencia se tiene

$$\Phi_{n+1}^*(\alpha) - \Phi_n^*(\alpha) = \overline{\Phi_{n+1}(0)}\alpha\Phi_n(\alpha).$$

Entonces  $|\Phi_{n+1}^*(\alpha) - \Phi_n^*(\alpha)| = O(|\Phi_{n+1}(0)|)$  y, por tanto,

$$\left| \frac{(\Phi_{n+1}^*(\alpha) - \Phi_n^*(\alpha))\Phi_{n+1}^*(\alpha)}{\mathcal{K}_nK_n(\alpha, \alpha)} \right| = O\left(\frac{|\Phi_{n+1}(0)|}{n}\right). \quad (2.31)$$

Por otro lado,

$$\left| \left( \frac{1}{K_{n+1}(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_n(\alpha, \alpha)} \right) \frac{\Phi_n(\alpha)\overline{\Phi_{n-1}^*(\alpha)}}{\mathcal{K}_n} \right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (2.32)$$

Entonces, usando (2.31) y (2.32) tenemos

$$|t_{n+1} - t_n| = O\left(\frac{|\Phi_{n+1}(0)|}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

y, por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |t_{n+1} - t_n| < \infty.$$

■

Por último, consideremos el ejemplo mostrado en la sección 2.1.6. Para este caso, tenemos

$$\begin{aligned} K_n(z, \alpha) &= \frac{\overline{\Phi_{n+1}^*(\alpha)}\Phi_{n+1}^*(z) - \overline{\Phi_{n+1}(\alpha)}\Phi_{n+1}(z)}{(1 - \bar{\alpha}z)\mathcal{K}_{n+1}}, \\ &= \frac{(1 - \beta\bar{\alpha})(1 - \bar{\beta}z) - (\bar{\alpha}z)^n(\bar{\alpha} - \bar{\beta})(z - \beta)}{1 - \bar{\alpha}z}, \end{aligned}$$

dado que  $\mathcal{K}_n = 1$ ,  $n \geq 1$ , y  $\mathcal{K}_0 = \frac{1}{1 - |\beta|^2}$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} K_n(\alpha, \alpha) &= \sum_{m=0}^n \frac{\overline{\Phi_m(\alpha)}\Phi_m(\alpha)}{\mathcal{K}_m}, \\ &= 1 - |\beta|^2 + \sum_{m=1}^n \bar{\alpha}^{m-1}(\bar{\alpha} - \bar{\beta})\alpha^{m-1}(\alpha - \beta), \\ &= 1 - |\beta|^2 + n|\alpha - \beta|^2, \end{aligned}$$

y por tanto, la familia de polinomios ortogonales mónicos  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  está dada por (ver (2.15))

$$R_n(z) = \frac{1}{z - \alpha} \left[ z^n(z - \beta) - \frac{\alpha^n(\alpha - \beta)(1 - \beta\bar{\alpha})(1 - \bar{\beta}z) - z^n|\alpha - \beta|^2(z - \beta)}{[1 - |\beta|^2 + n|\alpha - \beta|^2](1 - \bar{\alpha}z)} \right].$$

Por tanto, los coeficientes de Verblunsky son

$$\begin{aligned} R_1(0) &= \frac{(\alpha - \beta)(1 - \beta\bar{\alpha}) - \alpha^{-1}\beta|\alpha - \beta|^2}{1 - |\beta|^2 + |\alpha - \beta|^2}, \\ R_n(0) &= \frac{\alpha^{n-1}(\alpha - \beta)(1 - \beta\bar{\alpha})}{1 - |\beta|^2 + n|\alpha - \beta|^2}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Por otra parte, la existencia de  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  está garantizada dado que  $K_n(\alpha, \alpha) > 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

### 2.1.7 Transformación de Uvarov

Dado  $\mathcal{L}_F$  un funcional lineal sobre  $\Lambda$ , con función de Carathéodory asociada  $F$ . Consideremos la forma bilineal

$$\langle p, q \rangle_{U(a,M)(\mathcal{L}_F)} := \langle p, q \rangle_{\mathcal{L}_F} + Mp(a)\bar{q}(a^{-1}) + \overline{Mp}(\bar{a}^{-1})\overline{q(a)}, \quad (2.33)$$

$p, q \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$ ,  $a \neq 0$ . La perturbación  $U(a, M)(\mathcal{L}_F)$  del funcional lineal  $\mathcal{L}_F$  es la llamada transformación canónica de Uvarov de  $\mathcal{L}_F$ .

PROPOSICION 2.1.13. *El funcional lineal  $U(a, M)(\mathcal{L}_F)$  es cuasi-definido si y sólo si para todo  $n \geq 1$ ,*

$$\det \Delta_n = \begin{vmatrix} K_{n-1}(a, a) & \frac{1}{M} + K_{n-1}(a, \bar{a}^{-1}) \\ \frac{1}{\overline{M}} + K_{n-1}(\bar{a}^{-1}, a) & K_{n-1}(\bar{a}^{-1}, \bar{a}^{-1}) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.34)$$

**Demostración.** Supongamos que  $U(a, M)(\mathcal{L}_F)$  es cuasi-definido y sea  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada. Entonces, para  $n \geq 1$

$$V_n(z) = \Phi_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{n,j} \Phi_j(z),$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_{n,j} &= \frac{\langle V_n \Phi_j \rangle_{U(a,M)(\mathcal{L}_F)}}{d_j} \\ &= -\frac{MV_n(a)\overline{\Phi_j}(a^{-1}) + \overline{MV_n}(\bar{a}^{-1})\overline{\Phi_j(a)}}{d_j}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$V_n(z) = \Phi_n(z) - MV_n(a)K_{n-1}(z, \bar{a}^{-1}) - \overline{MV_n}(\bar{a}^{-1})K_{n-1}(z, a). \quad (2.35)$$

Evaluando la igualdad anterior en  $z = a$  y  $z = \bar{a}^{-1}$ , respectivamente,

$$\begin{aligned} \Phi_n(a) &= V_n(a)(1 + MK_{n-1}(a, \bar{a}^{-1})) + \overline{MV_n}(\bar{a}^{-1})K_{n-1}(a, a) \\ \Phi_n(\bar{a}^{-1}) &= MV_n(a)K_{n-1}(\bar{a}^{-1}, \bar{a}^{-1}) + V_n(\bar{a}^{-1})(1 + \overline{MK_{n-1}}(\bar{a}^{-1}, a)) \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} V_n(z) &= \Phi_n(z) - \begin{bmatrix} \overline{M}K_{n-1}(z, a) \\ MK_{n-1}(z, \overline{a}^{-1}) \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} V_n(\overline{a}^{-1}) \\ V_n(a) \end{bmatrix}, \\ V_n(a) &= \Phi_n(z) - \begin{bmatrix} K_{n-1}(z, a) \\ K_{n-1}(z, \overline{a}^{-1}) \end{bmatrix}^t \Lambda_n^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_n(a) \\ \Phi_n(\overline{a}^{-1}) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} K_{n-1}(a, a) & \frac{1}{M} + K_{n-1}(a, \overline{a}^{-1}) \\ \frac{1}{M} + K_{n-1}(\overline{a}^{-1}, a) & K_{n-1}(\overline{a}^{-1}, \overline{a}^{-1}) \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

es una matriz no singular dado que  $\langle V_n, V_n \rangle_{U(a, M)(\mathcal{L}_F)} = \frac{\det \Lambda_n}{\det \Lambda_{n-1}} d_n \neq 0$ . El recíproco es inmediato sin más que probar que el polinomio mónico  $V_n$ , dado por (2.36) verifica

$$\begin{aligned} \langle V_n(z), z^k \rangle_{U(a, M)(\mathcal{L}_F)} &= 0, \quad 0 \leq k \leq n-1, \\ \langle V_n(z), z^n \rangle_{U(a, M)(\mathcal{L}_F)} &\neq 0 \end{aligned}$$

■

PROPOSICION 2.1.14. *Sea  $\mathcal{L}_F$  un funcional lineal sobre  $\Lambda$ , con función de Carathéodory asociada  $F$ . La transformación lineal espectral inducida por  $U(a, M)(\mathcal{L}_F)$  es*

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)},$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= D(z) = (z - a)(\overline{a}z - 1), \\ B(z) &= (a - \overline{a}z^2)(M + \overline{M}) + (1 - |a|^2)(M - \overline{M})z. \end{aligned}$$

**Demostración.** Veamos que  $\tilde{F}(z) = v_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k$ , donde  $v_{-k} = U(a, M)(\mathcal{L}_F)(z^k)$  es una transformación racional de  $F$ .

$$v_{-k} = \langle z^k, 1 \rangle_{U(a, M)(\mathcal{L}_F)} + M a^k + \overline{M} \bar{a}^{-k}.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z) &= c_0 + M + \overline{M} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + \overline{M} \bar{a}^k + M a^k) z^k \\ &= F(z) + \overline{M} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}^k z^k \right) + M \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k z^k \right) \\ &= F(z) + \overline{M} \frac{1 + \bar{a}z}{1 - \bar{a}z} + M \frac{a + z}{a - z} \\ &= F(z) + \frac{a(M + \overline{M}) + (1 - |a|^2)(M - \overline{M})z - \bar{a}(M + \overline{M})z^2}{(z - a)(\bar{a}z - 1)}, \end{aligned}$$

de esta última igualdad se sigue el enunciado de la proposición. ■

### 2.1.8 Transformación de Geronimus

Sea  $\mathcal{L}_F$  un funcional lineal sobre  $\Lambda$ , con función analítica asociada  $F$ . Consideremos la forma bilineal  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{G(a, M)(\mathcal{L}_F)}$  tal que

$$\langle (z - a)p, (z - a)q \rangle_{G(a, M)(\mathcal{L}_F)} = \langle p, q \rangle_{\mathcal{L}_F}, \quad p, q \in \mathbb{P}(\mathbb{C}), \quad (2.38)$$

con  $a \neq 0$ . La perturbación  $G(a, M)(\mathcal{L}_F)$  del funcional lineal  $\mathcal{L}_F$  es la llamada transformación canónica de Geronimus de  $\mathcal{L}_F$ .

**PROPOSICION 2.1.15.** *Sea  $\mathcal{L}_F$  un funcional lineal sobre  $\Lambda$ , con función de Carathéodory asociada  $F$ . La transformación lineal espectral inducida por  $G(a, M)(\mathcal{L}_F)$  es*

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)},$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= z, \\ B(z) &= \bar{a}v_0 z^2 - 2i\Im(q_0)z - av_0, \\ D(z) &= -\bar{a}z^2 + (1 + |a|^2)z - a. \end{aligned}$$

**Demostración.**

De la definición se desprende que

$$c_k = \langle 1, z^k \rangle_{G(a,M)(\mathcal{L}_F)} = v_k(1 + |a|^2) - av_{k+1} - \bar{a}v_{k-1}, \quad k \geq 0. \quad (2.39)$$

Haciendo  $s_k = \frac{c_k}{a^k}$  y  $t_k = \frac{v_k}{a^k}$ , la expresión (2.39) resulta ser

$$s_k = (1 + |a|^2)t_k - |a|^2 t_{k+1} - t_{k-1}, \quad k \geq 0,$$

de modo que

$$s_k = t_k - t_{k-1} - |a|^2(t_{k+1} - t_k), \quad k \geq 0.$$

Si hacemos

$$q_k = t_k - t_{k-1} \quad k \geq 0,$$

entonces

$$s_k = q_k - |a|^2 q_k, \quad k \geq 0,$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{q_0 - s_0 - |a|^2 s_1 - \dots - |a|^{2k-2} s_{k-1}}{|a|^{2k}}, \\ &= \frac{q_0 - c_0 - ac_1 - \dots - a^{k-1} c_{k-1}}{|a|^{2k}}, \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (2.40)$$

así como

$$\begin{aligned} q_0 &= t_0 - t_{-1} = v_0 - \bar{a}v_1, \\ q_1 &= \frac{q_0 - c_0}{|a|^2} = t_1 - t_0 = \frac{v_1}{a} - v_0, \end{aligned}$$

$q_0$  aparece como parámetro libre. De esta forma

$$v_0 - av_1 = \bar{q}_0 \quad (2.41)$$

$$v_0 - \frac{v_1}{a} = \frac{c_0 - q_0}{|a|^2},$$



y, por tanto,

$$(1 - |a|^2)v_0 = 2\Re(q_0) - c_0,$$

esto es,  $v_0 \in \mathbb{R}$ . Si asumimos  $|a| \neq 1$ ,  $v_0$  queda unívocamente determinado y de (2.41) deducimos  $v_1$ . Reiterando (2.40) se sigue que

$$\frac{v_k}{a^k} = v_0 + \sum_{j=1}^k q_j, \quad k \geq 2$$

Por tanto, disponemos de un grado de libertad que es la elección de  $q_0$ . Por otra parte, multiplicando en (2.39) por  $z^k$ ,  $k \geq 1$ , se tiene

$$\begin{aligned} F(z) &= v_0(1 + |a|^2) - av_1 - \overline{av_1} + 2(1 + |a|^2) \sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k \\ &\quad - 2a \sum_{j=1}^{\infty} v_{k+1} z^k - 2\overline{a} \sum_{j=1}^{\infty} v_{k-1} z^k \\ &= (1 + |a|^2) \tilde{F}(z) - a \left( v_1 + \frac{2}{z} \sum_{k=2}^{\infty} v_k z^k \right) - \overline{a} \left( \overline{v_1} + 2z \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k \right) \\ &= (1 + |a|^2) \tilde{F}(z) - a \left( v_1 + \frac{1}{z} \left( \tilde{F}(z) - v_0 - 2v_1 z \right) \right) \\ &\quad - \overline{a} \left( \overline{v_1} + z \left( v_0 + \tilde{F}(z) \right) \right) \\ &= (1 + |a|^2) \tilde{F}(z) + a \left( v_1 + \frac{v_0}{z} \right) - \frac{a}{z} \tilde{F}(z) - \overline{a}(\overline{v_1} + v_0 z) - \overline{a}z \tilde{F}(z) \\ &= \left( 1 + |a|^2 - \frac{a}{z} - \overline{a}z \right) \tilde{F}(z) + av_1 - \overline{av_1} + v_0 \left( \frac{a}{z} - \overline{a}z \right) \\ &= \left( 1 + |a|^2 - \frac{a}{z} - \overline{a}z \right) \tilde{F}(z) + v_0 - \overline{q_0} - \overline{q_0} + q_0 + v_0 \left( \frac{a}{z} - \overline{a}z \right), \end{aligned}$$

de esta última igualdad se deduce la proposición.  $\blacksquare$

PROPOSICION 2.1.16. (*Relación entre las transformaciones de Christoffel, Uvarov y Geronimus*).

Dado  $\mathcal{L}_F$  un funcional lineal sobre  $\Lambda$ , con función de Carathéodory asociada  $F$ . Entonces

a)  $G(a, M) \circ C_a(\mathcal{L}_F) = U(a, \tilde{M})(\mathcal{L}_F)$ , para algún  $\tilde{M} \neq 0$ .

b)  $C_a \circ G(a, M)(\mathcal{L}_F) = \mathcal{L}_F$ .

## 2.2 Transformaciones $\mathcal{L}_R = \Re[P_n(z)]\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_I = \Im[P_n(z)]\mathcal{L}$

Consideremos las siguientes transformaciones de un funcional lineal hermitiano  $\mathcal{L}$ .

DEFINICION 2.2. Dado un funcional lineal hermitiano  $\mathcal{L}$  y un polinomio mónico  $P_n(z) = \sum_{i=0}^n \alpha_i z^i$ ,  $\alpha_n = 1$ , denotaremos por  $\mathcal{L}_R$  y  $\mathcal{L}_I$  los funcionales lineales tales que

$$(a) \quad \langle \mathcal{L}_R, q \rangle = \langle \mathcal{L}, \frac{1}{2}(P_n(z) + \bar{P}_n(z^{-1}))q \rangle,$$

$$(b) \quad \langle \mathcal{L}_I, q \rangle = \langle \mathcal{L}, \frac{1}{2i}(P_n(z) - \bar{P}_n(z^{-1}))q \rangle.$$

Obsérvese que  $\mathcal{L}_R$  y  $\mathcal{L}_I$  son también hermitianos. Si  $\mathcal{L}$  es cuasi-definido, las condiciones necesarias y suficientes para que  $\mathcal{L}_R$  y  $\mathcal{L}_I$  sean también cuasi-definidos han sido estudiadas, principalmente en el caso en que  $P_1(z) = z - \alpha$ , es decir, un polinomio mónico de grado 1. Adicionalmente, se muestran expresiones explícitas para las sucesiones de polinomios mónicos ortogonales con respecto a  $\mathcal{L}_R$  y  $\mathcal{L}_I$ , respectivamente, en términos de  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ . En particular,

PROPOSICION 2.2.1.

- (i) Si  $|\Re \alpha| \neq 1$  y  $b_1, b_2$  son los ceros del polinomio  $z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + 1$ , entonces  $\mathcal{L}_R$  es cuasi-definido si y sólo si  $K_n^*(b_1, b_2) \neq 0$ ,  $n \geq 0$ . Además, si denotamos por  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto a  $\mathcal{L}_R$ , entonces

$$Y_{n-1}(z) = \frac{\Phi_n(z)K_{n-1}^*(b_1, b_2) - K_{n-1}^*(z, b_2)\Phi_n(b_1)}{K_{n-1}^*(b_1, b_2)(z - b_1)}, \quad n \geq 1, \quad (2.42)$$

e

$$Y_{n-1}(0) = \frac{\Phi_n(b_1)\Phi_{n-1}(b_2) - \Phi_n(b_2)\Phi_{n-1}(b_1)}{K_{n-1}^*(b_1, b_2)(b_1 - b_2)K_{n-1}}, \quad n \geq 1. \quad (2.43)$$

- (ii) Si  $|\Re\alpha| = 1$  y  $b$  es el cero doble del polinomio  $z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + 1$ , entonces  $\mathcal{L}_R$  es cuasi-definido si y sólo si  $K_n^*(b, b) \neq 0$ ,  $n \geq 0$ . Además,

$$Y_{n-1}(z) = \frac{\Phi_n(z)K_{n-1}^*(b, b) - K_{n-1}^*(z, b)\Phi_n(b)}{K_{n-1}^*(b, b)(z - b)}, \quad n \geq 1, \quad (2.44)$$

y

$$Y_{n-1}(0) = -b \frac{\Phi_n(0)K_{n-1}^*(b, b)\mathcal{K}_{n-1} - \Phi_{n-1}(b)\Phi_n(b)}{K_{n-1}^*(b, b)\mathcal{K}_{n-1}}, \quad n \geq 1. \quad (2.45)$$

PROPOSICION 2.2.2.

- (i) Si  $|\Im\alpha| \neq 1$  y  $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$  son los ceros del polinomio  $z^2 + (\bar{\alpha} - \alpha)z - 1$ , entonces  $\mathcal{L}_I$  es cuasi-definido si y sólo si  $K_n^*(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) \neq 0$ ,  $n \geq 0$ . Además, si denotamos por  $\{y_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto a  $\mathcal{L}_I$ , entonces

$$y_{n-1}(z) = \frac{\Phi_n(z)K_{n-1}^*(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) - K_{n-1}^*(z, \tilde{b}_2)\Phi_n(\tilde{b}_1)}{K_{n-1}^*(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)(z - \tilde{b}_1)}, \quad n \geq 1, \quad (2.46)$$

e

$$y_{n-1}(0) = \frac{\Phi_n(\tilde{b}_1)\Phi_{n-1}(\tilde{b}_2) - \Phi_n(\tilde{b}_2)\Phi_{n-1}(\tilde{b}_1)}{K_{n-1}^*(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2)\mathcal{K}_{n-1}}, \quad n \geq 1. \quad (2.47)$$

- (ii) Si  $|\Im\alpha| = 1$  y  $\tilde{b}$  es el cero doble del polinomio  $z^2 + (\bar{\alpha} - \alpha)z - 1$ ,  $\mathcal{L}_I$  es cuasi-definido si y sólo si  $K_n^*(\tilde{b}, \tilde{b}) \neq 0$ ,  $n \geq 0$ . Además,

$$y_{n-1}(z) = \frac{\Phi_n(z)K_{n-1}^*(\tilde{b}, \tilde{b}) - K_{n-1}^*(z, \tilde{b})\Phi_n(\tilde{b})}{K_{n-1}^*(\tilde{b}, \tilde{b})(z - \tilde{b})}, \quad n \geq 1, \quad (2.48)$$

e

$$y_{n-1}(0) = \tilde{b} \frac{\Phi_n(0)K_{n-1}^*(\tilde{b}, \tilde{b})\mathcal{K}_{n-1} - \Phi_{n-1}(\tilde{b})\Phi_n(\tilde{b})}{K_{n-1}^*(\tilde{b}, \tilde{b})\mathcal{K}_{n-1}}, \quad n \geq 1. \quad (2.49)$$

Obsérvese que, si  $\alpha = a + ci$ , entonces  $b_1 = a + \sqrt{a^2 - 1}$  y  $b_2 = b_1^{-1} = a - \sqrt{a^2 - 1}$ , así como  $\tilde{b}_1 = \sqrt{1 - c^2} + ci$  y  $\tilde{b}_2 = -\tilde{b}_1^{-1}$ . Existe otra condición equivalente para que  $\mathcal{L}_R$  y  $\mathcal{L}_I$  sean cuasi-definidos, así como una expresión adicional para las familias de parámetros de Verblunsky asociados con ellos, como se muestra a continuación.

PROPOSICION 2.2.3. *Los funcionales lineales  $\mathcal{L}_R$  y  $\mathcal{L}_I$  son cuasi-definidos si y sólo si  $\Pi_n(b_1) \neq 0$ ,  $\Pi_n(\tilde{b}_1) \neq 0$ ,  $n \geq 0$ , respectivamente, donde*

$$\Pi_n(x) = \begin{vmatrix} x\Phi_n(x) & \Phi_n^*(x) \\ x^{-1}\Phi_n(x^{-1}) & \Phi_n^*(x^{-1}) \end{vmatrix}.$$

Además, las familias de los parámetros de Verblunsky  $\{Y_n(0)\}_{n \geq 1}$ ,  $\{y_n(0)\}_{n \geq 1}$ , asociadas a  $\mathcal{L}_R$  y  $\mathcal{L}_I$ , respectivamente, están dadas por

$$Y_n(0) = (b_1 - b_1^{-1}) \frac{\Phi_n(b_1)\Phi_n(b_1^{-1})}{\Pi_n(b_1)}, \quad n \geq 1, \quad (2.50)$$

$$y_n(0) = (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_1^{-1}) \frac{\Phi_n(\tilde{b}_1)\Phi_n(-\tilde{b}_1^{-1})}{\Pi_n(\tilde{b}_1)}, \quad n \geq 1. \quad (2.51)$$

OBSERVACION 2.2.1. *Si  $|\Re(\alpha)| \geq 1$ , la transformación resultante es de tipo Christoffel (ver sección anterior).*

### Matrices de Hessenberg

Ahora procedemos a estudiar la matriz de Hessenberg asociada al funcional  $\mathcal{L}_R$ . Asumimos que  $|\alpha| \neq 1$ . De (2.42),

$$\begin{aligned} (z - b_1)Y_n(z) &= \Phi_{n+1}(z) - \frac{\Phi_{n+1}(b_1)}{K_n^*(b_1, b_2)} K_n^*(z, b_2) \\ &= \Phi_{n+1}(z) - \frac{\Phi_{n+1}(b_1)}{K_n^*(b_1, b_2)} \left[ \frac{1}{\mathcal{K}_n} \frac{z\Phi_n(z)\Phi_n^*(b_2) - b_2\Phi_n^*(z)\Phi_n(b_2)}{z - b_2} \right] \\ &= \Phi_{n+1}(z) - \frac{\Phi_{n+1}(b_1)}{\mathcal{K}_n K_n^*(b_1, b_2)} \left[ \frac{\Phi_{n+1}(z)\Phi_n^*(b_2) - \Phi_{n+1}(b_2)\Phi_n^*(z)}{z - b_2} \right]. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} (z - b_1)(z - b_2)Y_n(z) &= (z - b_2)\Phi_{n+1}(z) - \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n^*(b_2)}{\mathcal{K}_n K_n^*(b_1, b_2)} \Phi_{n+1}(z) \\ &\quad + \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_{n+1}(b_2)}{K_n^*(b_1, b_2)} \sum_{j=0}^n \frac{\overline{\Phi_j(0)}\Phi_j(z)}{\mathcal{K}_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= z\Phi_{n+1}(z) - b_2\Phi_{n+1}(z) - \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n^*(b_2)}{\mathcal{K}_n K_n^*(b_1, b_2)}\Phi_{n+1}(z) \\
 &\quad + \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_{n+1}(b_2)}{K_n^*(b_1, b_2)} \sum_{j=0}^n \frac{\overline{\Phi_j(0)}\Phi_j(z)}{\mathcal{K}_j} \\
 &= \Phi_{n+2}(z) - \Phi_{n+2}(0)\Phi_{n+1}^*(z) - b_2\Phi_{n+1}(z) \\
 &\quad - \frac{\Phi_{n+1}(b_1)}{\mathcal{K}_n K_n^*(b_1, b_2)} \left( \Phi_n^*(b_2)\Phi_{n+1}(z) - \Phi_{n+1}(b_2) \sum_{j=0}^n \frac{\overline{\Phi_j(0)}\Phi_j(z)}{\mathcal{K}_j} \right) \\
 &= \Phi_{n+2}(z) - \left( b_2 + \Phi_{n+2}(0)\overline{\Phi_{n+1}(0)} + \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n^*(b_2)}{\mathcal{K}_n K_n^*(b_1, b_2)} \right) \Phi_{n+1}(z) \\
 &\quad + \left( \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_{n+1}(b_2)}{K_n^*(b_1, b_2)} - \Phi_{n+2}(0)\mathcal{K}_{n+1} \right) \sum_{j=0}^n \frac{\overline{\Phi_j(0)}\Phi_j(z)}{\mathcal{K}_j}.
 \end{aligned}$$

En forma matricial, la expresión anterior se convierte en

$$(z - b_1)(z - b_2)Y(z) = \mathbf{M}_R\Phi(z), \quad (2.52)$$

donde  $\mathbf{M}_R$  es una matriz cuyas entradas son

$$\tilde{m}_{n,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n + 2, \\ b_2 + \Phi_{n+2}(0)\overline{\Phi_{n+1}(0)} + \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n^*(b_2)}{\mathcal{K}_n K_n^*(b_1, b_2)} & \text{si } j = n + 1, \\ \left( \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_{n+1}(b_2)}{K_n^*(b_1, b_2)} - \Phi_{n+2}(0)\mathcal{K}_{n+1} \right) \overline{\Phi_j(0)} & \text{si } j \leq n, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.53)$$

y  $Y(z) = [Y_0(z), Y_1(z), \dots]^t$ ,  $\Phi(z) = [\Phi_0(z), \Phi_1(z), \dots]^t$ . Obsérvese que (2.52) también puede escribirse como

$$z[\Re\{P_1(z)\}Y(z)] = \mathbf{M}_R\Phi(z). \quad (2.54)$$

Por otro lado, si denotamos por  $\mathbf{H}_Y$  la matriz de Hessenberg asociada a  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$ , es decir, la matriz que satisface  $zY(z) = \mathbf{H}_Y Y(z)$ , entonces de (2.52) obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_Y - b_1 \mathbf{I})(\mathbf{H}_Y - b_2 \mathbf{I})Y(z) &= \mathbf{M}_R \Phi(z) \\ &= \mathbf{M}_R \mathbf{L}_Y \Phi Y(z), \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{L}_Y \Phi$  es una matriz triangular inferior que satisface  $\Phi(z) = \mathbf{L}_Y \Phi Y(z)$ , esto es, una matriz de cambio de base. Por lo tanto,

$$(\mathbf{H}_Y - b_1 \mathbf{I})(\mathbf{H}_Y - b_2 \mathbf{I}) = \mathbf{M}_R \mathbf{L}_Y \Phi.$$

No es muy difícil mostrar que las entradas de  $\mathbf{L}_Y \Phi$  son

$$l_{n,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n, \\ -\frac{\kappa_n}{\tilde{\kappa}_{n-1}}(\Phi_{n+1}(0)\overline{Y_j(0)} - 1) & \text{si } j = n-1, \\ -\frac{\kappa_n}{\tilde{\kappa}_j}\Phi_{n+1}(0)\overline{Y_j(0)} & \text{si } j \leq n-2, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.55)$$

donde  $Y_k(0)$  puede calcularse utilizando (2.50) y  $\tilde{\kappa}_{n-1} = -\frac{\kappa_n K_n^*(b_1, b_2)}{2K_{n-1}^*(b_1, b_2)}$ .

### 2.2.1 Funciones de Carathéodory.

Sea  $\sigma$  una medida de probabilidad no trivial, soportada en la circunferencia unidad, y consideremos la transformación  $d\tilde{\sigma} = \Re e(P_n)d\sigma$ , donde  $P_n$  es un polinomio en  $z$  de grado  $n$ . Si  $F(z)$  es la función de Carathéodory asociada a  $\sigma$ , queremos encontrar  $F_R(z)$ , la función de Carathéodory asociada a  $\tilde{\sigma}$ .

Empecemos con  $n = 1$ , es decir,  $P_1(z) = z - \alpha$ . De la representación integral de Riesz-Herglotz para  $F_R(z)$ , tenemos

$$\begin{aligned} F_R(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\tilde{\sigma} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \frac{P_1(e^{i\theta}) + \overline{P_1(e^{i\theta})}}{2} d\sigma. \end{aligned}$$

Llamamos

$$\begin{aligned}
 F_{R_1}(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} P_1(e^{i\theta}) d\sigma \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} (e^{i\theta} - \alpha) d\sigma \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} (e^{i\theta} - z + z - \alpha) d\sigma \\
 &= (z - \alpha) \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\sigma + \int_0^{2\pi} (e^{i\theta} + z) d\sigma.
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$F_{R_1}(z) = (z - \alpha)F(z) + z c_0 + c_1.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 F_{R_2}(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \overline{P_1(e^{i\theta})} d\sigma \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} (e^{-i\theta} - \bar{\alpha}) d\sigma \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{z^{-1} + e^{-i\theta}}{z^{-1} - e^{-i\theta}} (e^{-i\theta} - z^{-1} + z^{-1} - \bar{\alpha}) d\sigma \\
 &= (z^{-1} - \bar{\alpha})F(z) - \int_0^{2\pi} (z^{-1} + e^{-i\theta}) d\sigma \\
 &= (z^{-1} - \bar{\alpha})F(z) - z^{-1}c_0 - \bar{c}_1.
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 F_R(z) &= \frac{F_{R_1}(z) + F_{R_2}(z)}{2} \\
 &= \frac{[z - \alpha - \bar{\alpha} + z^{-1}]F(z) + c_0 z + c_1 - c_{-1} - c_0 z^{-1}}{2}.
 \end{aligned}$$

Esto es,  $F_R(z)$  puede expresarse como una transformación espectral lineal de  $F(z)$  de la siguiente manera

$$F_R(z) = M(z)F(z) + N(z),$$

donde

$$\begin{aligned} M(z) &= \Re[P_1(z)], \\ N(z) &= \frac{c_0}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2}(c_1 - \bar{c}_1). \end{aligned}$$

Obsérvese que si  $c_0 = 1$ , entonces  $N(z) = \frac{1}{2}[\Omega_1(z) - z^{-1}\Omega_1^*(z)]$ , donde  $\Omega_1(z)$  es el polinomio de segunda especie de grado 1 asociado a  $\sigma$ .

Generalizando el resultado anterior para un polinomio mónico  $P_n$  de grado  $n$ , obtenemos

**PROPOSICION 2.2.4.** *Sea  $\sigma$  una medida de probabilidad no trivial soportada en la circunferencia unidad. Consideremos una perturbación de  $\sigma$  definida mediante  $d\tilde{\sigma} = (\Re P_n)d\sigma$ , donde  $P_n \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$  es mónico de grado  $n$ . Sea  $F(z)$  la función de Carathéodory asociada a  $\sigma$ . Entonces,  $F_R(z)$ , la función de Carathéodory asociada a  $\tilde{\sigma}$ , es una transformación espectral lineal de  $F(z)$  dada por*

$$F_R(z) = \frac{[P_n(z) + \bar{P}_n(1/z)]F(z) + Q_n(z) - \bar{Q}_n(1/z)}{2},$$

donde  $Q_n(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} [P_n(e^{i\theta}) - P_n(z)] d\sigma$ .

**Demostración.** Tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} P_n(e^{i\theta}) d\sigma &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} [P_n(e^{i\theta}) - P_n(z)] d\sigma + P_n(z)F(z) \\ &= P_n(z)F(z) + Q_n(z), \end{aligned}$$

donde

$$Q_n(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} [P_n(e^{i\theta}) - P_n(z)] d\sigma.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \overline{P_n(e^{i\theta})} d\sigma &= \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{z} + e^{-i\theta}}{\frac{1}{z} - e^{-i\theta}} [\bar{P}_n(e^{-i\theta}) - \bar{P}_n(1/z)] d\sigma \\ &+ \bar{P}_n(1/z)F(z) \\ &= \bar{P}_n(1/z)F(z) - \bar{Q}_n(1/z). \end{aligned}$$



Por lo tanto,

$$F_R(z) = \frac{[P_n(z) + \bar{P}_n(1/z)]F(z) + Q_n(z) - \bar{Q}_n(1/z)}{2}.$$

■

### Coefficientes de Verblunsky

En el resto del capítulo, supondremos que  $\sigma$  pertenece a la clase de Szegő, es decir, satisface (1.21) y, además, es una medida de variación acotada. Asumiremos también que  $\mathcal{L}_R$  es cuasi-definido.

PROPOSICION 2.2.5. *La familia de parámetros de Verblunsky  $\{Y_n(0)\}_{n \geq 1}$  puede expresarse en términos de la familia  $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$  mediante*

$$Y_n(0) = A_n(b_1)\Phi_{n+1}(0) + B_n(b_1), \quad (2.56)$$

con

$$A_n(b_1) = \frac{\Phi_n(b_1^{-1})\Phi_n^*(b_1) - \Phi_n(b_1)\Phi_n^*(b_1^{-1})}{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n^*(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(b_1^{-1})\Phi_n^*(b_1)}, \quad (2.57)$$

$$B_n(b_1) = \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(b_1^{-1})\Phi_n(b_1)}{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n^*(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(b_1^{-1})\Phi_n^*(b_1)}. \quad (2.58)$$

**Demostración.** De la relación de recurrencia y (2.50), tenemos

$$Y_n(0) =$$

$$\frac{[\Phi_{n+1}(b_1) - \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(b_1)]\Phi_n(b_1^{-1}) - [\Phi_{n+1}(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(b_1^{-1})]\Phi_n(b_1)}{[\Phi_{n+1}(b_1) - \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(b_1)]\Phi_n^*(b_1^{-1}) - [\Phi_{n+1}(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(b_1^{-1})]\Phi_n^*(b_1)},$$

y el resultado se obtiene mediante una reordenación de los términos.

■

Ahora, estudiamos el comportamiento de  $A_n(b_1)$  y  $B_n(b_1)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Para  $|b_1| < 1$ , dividiendo por  $\Phi_{n+1}(b_1^{-1})$  en el numerador y denominador de  $A_n(b_1)$ , tenemos

$$A_n(b_1) = \frac{[\Phi_n(b_1^{-1})\Phi_n^*(b_1) - \Phi_n(b_1)\Phi_n^*(b_1^{-1})]\frac{1}{\Phi_{n+1}(b_1^{-1})}}{[\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n^*(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(b_1^{-1})\Phi_n^*(b_1)]\frac{1}{\Phi_{n+1}(b_1^{-1})}}.$$

Por otra parte, tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(b_1) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1 \Phi_n^*(b_1)}{\Phi_n^*(b_1)} = -b_1,$$

ya que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{n+1}(z)}{\Phi_n(z)} = z$ , para  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ , y si  $|b_1| < 1$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_n(b_1)\Phi_n^*(b_1^{-1})}{\Phi_{n+1}(b_1^{-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_n(b_1)b_1^{-n}\overline{\Phi_n(\overline{b_1})}}{\Phi_{n+1}(b_1^{-1})} = 0.$$

De manera similar, para  $|b_1| > 1$ , dividiendo por  $\Phi_{n+1}(b_1)$  en el numerador y denominador de  $A_n(b_1)$ , se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(b_1) = -b_1^{-1}$ .

Por otro lado, para  $B_n(b_1)$ , cuando  $|b_1| < 1$ ,

$$B_n(b_1) = \frac{[\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(b_1^{-1})\Phi_n(b_1)]/\Phi_n(b_1^{-1})}{[\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n^*(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(b_1^{-1})\Phi_n^*(b_1)]/\Phi_n(b_1^{-1})}.$$

Obsérvese que  $\Phi_n(b_1^{-1})$  nunca se anula si  $|b_1| < 1$  y, por tanto, el denominador solamente se anula en  $b_1 = \pm 1$ . Tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  en el numerador de  $B_n(b_1)$ , obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(b_1^{-1})\Phi_n(b_1)}{\Phi_n(b_1^{-1})} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(b_1) \left[ \frac{\Phi_{n+1}(b_1)}{\Phi_n(b_1)} - \frac{\Phi_{n+1}(b_1^{-1})}{\Phi_n(b_1^{-1})} \right] = (b_1 - b_1^{-1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(b_1) = 0,$$

Para el denominador, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n^*(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(b_1^{-1})\Phi_n^*(b_1)}{\Phi_n(b_1^{-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} [-b_1^{-1}\Phi_n^*(b_1)] = -b_1^{-1}.$$

De manera similar, cuando  $|b_1| > 1$ , dividiendo el numerador y denominador de  $B_n(b_1)$  por  $\Phi_n(b_1)$  y calculando el límite, obtenemos el mismo resultado.

Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(b_1) = 0$  para todo  $b_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , salvo si  $b_1 = \pm 1$ . En consecuencia,

PROPOSICION 2.2.6. *Supongamos que  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 < \infty$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_{n+1}(0) - \Phi_n(0)| < \infty$ . Entonces, para  $\alpha \in \mathbb{C}$  con  $|\alpha| \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}$ ,*

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} |Y_n(0)|^2 < \infty.$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} |Y_{n+1}(0) - Y_n(0)| < \infty.$$

OBSERVACION 2.2.2. *Si  $b_1 = \pm 1$ , obtenemos el resultado probado en la sección (2.1.6).*

### 2.2.2 Ejemplos

#### El caso Bernstein-Szegő

Estudiamos una transformación de la medida de Bernstein-Szegő definida mediante  $d\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}(z - \alpha + z^{-1} - \bar{\alpha}) \frac{1 - |\beta|^2}{|z - \beta|^2} \frac{d\theta}{2\pi}$ , con  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha| \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}$  y  $|\beta| < 1$ . Es bien conocido que, en este caso,

$$\Phi_n(z) = z^n - \beta z^{n-1} \quad \text{y} \quad \Phi_n^*(z) = 1 - \bar{\beta}z, \quad n \geq 1.$$

La condición para la existencia de la sucesión de polinomios ortogonales mónicos  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$  es

$$\begin{aligned} 0 &\neq b_1 \Phi_n(b_1) \Phi_n^*(b_1^{-1}) - b_1^{-1} \Phi_n(b_1^{-1}) \Phi_n^*(b_1) \\ &= b_1^n (b_1 - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1^{-1}) - b_1^{-n} (b_1^{-1} - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1). \end{aligned}$$

En otras palabras

$$\begin{aligned} b_1^{2n} &\neq \frac{(b_1^{-1} - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1)}{(b_1 - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1^{-1})} \\ &= \frac{\Phi_1(b_1^{-1}) \Phi_1^*(b_1)}{\Phi_1(b_1) \Phi_1^*(b_1^{-1})}. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos un caso cuasi-definido si y sólo si

$$\frac{\ln \frac{\Phi_1(b_1^{-1})\Phi_1^*(b_1)}{\Phi_1(b_1)\Phi_1^*(b_1^{-1})}}{2 \ln b_1} \notin \mathbb{N}.$$

Si  $\beta = 0$ , es decir, una transformación de la medida de Lebesgue, entonces la condición se convierte en

$$b_1^{2n} \neq \frac{1}{b_1^2},$$

es decir,

$$b_1 \neq e^{\frac{k\pi i}{n+1}}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

A continuación, obtenemos una expresión para la nueva familia de parámetros de Verblunsky. De (2.57),

$$\begin{aligned} A_n(b_1) &= \frac{b_1^{-n+1}(b_1^{-1} - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1) - b_1^{n-1}(b_1 - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1^{-1})}{b_1^n(b_1 - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1^{-1}) - b_1^{-n}(b_1^{-1} - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1)} \\ &= \frac{b_1^{-n+1}\Phi_1(b_1^{-1})\Phi_1^*(b_1) - b_1^{n-1}\Phi_1(b_1)\Phi_1^*(b_1^{-1})}{b_1^n\Phi_1(b_1)\Phi_1^*(b_1^{-1}) - b_1^{-n}\Phi_1(b_1^{-1})\Phi_1^*(b_1)} \\ &= \frac{b_1\Phi_1(b_1^{-1})\Phi_1^*(b_1) - b_1^{2n-1}\Phi_1(b_1)\Phi_1^*(b_1^{-1})}{b_1^{2n}\Phi_1(b_1)\Phi_1^*(b_1^{-1}) - \Phi_1(b_1^{-1})\Phi_1^*(b_1)}. \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(b_1) = -b_1, \quad |b_1| < 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(b_1) = -b_1^{-1}, \quad |b_1| > 1.$$

Por otra parte, de (2.58),

$$\begin{aligned}
 B_n(b_1) &= \frac{b_1^n(b_1 - \beta)b_1^{-n+1}(b_1^{-1} - \beta) - b_1^{-n}(b_1^{-1} - \beta)b_1^{n-1}(b_1 - \beta)}{b_1^n(b_1 - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1^{-1}) - b_1^{-n}(b_1^{-1} - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1)} \\
 &= \frac{b_1\Phi_1(b_1)\Phi_1(b_1^{-1}) - b_1^{-1}\Phi_1(b_1)\Phi_1(b_1^{-1})}{b_1^n\Phi_1(b_1)\Phi_1^*(b_1^{-1}) - b_1^{-n}\Phi_1(b_1^{-1})\Phi_1^*(b_1)} \\
 &= \frac{b_1^n(b_1 - b_1^{-1})\Phi_1(b_1)\Phi_1(b_1^{-1})}{b_1^{2n}\Phi_1(b_1)\Phi_1^*(b_1^{-1}) - \Phi_1(b_1^{-1})\Phi_1^*(b_1)}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para  $n$  suficientemente grande, si  $|b_1| < 1$ , entonces

$$\begin{aligned}
 Y_n(0) &= A_n(b_1)\Phi_{n+1}(0) + B_n(b_1) \\
 &\sim N_1(b_1)b_1^n,
 \end{aligned}$$

$$\text{con } N_1(b_1) = -\frac{(b_1 - b_1^{-1})\Phi_1(b_1)\Phi_1(b_1^{-1})}{\Phi_1(b_1^{-1})\Phi_1^*(b_1)}.$$

Si  $|b_1| > 1$ , entonces

$$Y_n(0) \sim N_2(b_1)b_1^{-n},$$

$$\text{con } N_2(b_1) = \frac{(b_1 - b_1^{-1})\Phi_1(b_1)\Phi_1(b_1^{-1})}{\Phi_1(b_1)\Phi_1^*(b_1)}.$$

Finalmente, para  $\beta = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 A_n(b_1) &= \frac{1 - b_1^{2n}}{b_1^{2n+1} - b_1^{-1}}, \\
 B_n(b_1) &= \frac{b_1^n(b_1 - b_1^{-1})}{b_1^{2n+1} - b_1^{-1}}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, en este caso obtenemos el siguiente comportamiento asintótico para los parámetros de Verblunsky

$$\begin{aligned}
 Y_n(0) &\sim b_1^n, \quad |b_1| < 1, \\
 Y_n(0) &\sim b_1^{-n}, \quad |b_1| > 1.
 \end{aligned}$$

**El caso**  $\frac{1}{2}d\bar{\sigma} = (z - \alpha + z^{-1} - \bar{\alpha})|z - 1|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$ .

Ahora estudiamos una transformación de  $d\sigma = |z - 1|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$ , la transformación de Christoffel de la medida de Lebesgue con parámetro 1. Es bien conocido que si denotamos por  $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto a  $\sigma$ , entonces

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{z - 1} \left( z^{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n z^j \right), \quad n \geq 1, \quad (2.59)$$

$$\Phi_n^*(z) = \frac{1}{1 - z} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n z^{j+1} \right), \quad n \geq 1, \quad (2.60)$$

así como

$$\Phi_n(0) = \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 1. \quad (2.61)$$

Entonces, la condición para la existencia de la sucesión de polinomios ortogonales mónicos  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$  es

$$\begin{aligned} & b_1 \frac{1}{b_1 - 1} \left( b_1^{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^j \right) \frac{1}{1 - b_1^{-1}} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j-1} \right) \\ & - b_1^{-1} \frac{1}{b_1^{-1} - 1} \left( b_1^{-n-1} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j} \right) \frac{1}{1 - b_1} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{j+1} \right) \neq 0, \\ & b_1^{n+2} - b_1^{-n-2} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{j+1} - \frac{b_1^{n+2}}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j-1} \\ & + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j-1} + \frac{b_1^{-n-2}}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{j+1} \neq 0, \\ & b_1^{n+2} - b_1^{-n-2} - \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{j+1} + \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j-1} \neq 0. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$b_1^{2n+4} - 1 - \frac{2b_1^{n+2} - 2}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{j+1} \neq 0,$$

$$b_1^{n+2} + 1 - \frac{2b_1}{n+1} \frac{b_1^{n+1} - 1}{b_1 - 1} \neq 0,$$

$$(n+1)(b_1 - 1)(b_1^{n+2} + 1) - 2b_1(b_1^{n+1} - 1) \neq 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, para los parámetros de Verblunsky, de (2.50) tenemos

$$\begin{aligned} Y_n(0) &= \frac{(b_1 - b_1^{-1}) \frac{1}{b_1 - 1} \left( b_1^{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^j \right) \frac{1}{b_1^{-1} - 1} \left( b_1^{-n-1} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j} \right)}{\frac{1}{(b_1 - 1)(1 - b_1^{-1})} \left( b_1^{n+2} - b_1^{-n-2} - \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{j+1} + \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j-1} \right)} \\ &= \frac{(b_1^{-1} - b_1) \left( 1 - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{j+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j-1} + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=0}^n b_1^j \sum_{j=0}^n b_1^{-j} \right)}{b_1^{n+2} - b_1^{-n-2} - \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{j+1} + \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j-1}} \\ &= \frac{(b_1^{-1} - b_1) \left[ b_1^{n+2} - \frac{b_1(b_1^{n+2} + 1)}{n+1} \frac{b_1^{n+1} - 1}{b_1 - 1} + \frac{b_1^2}{(n+1)^2} \left( \frac{b_1^{n+1} - 1}{b_1 - 1} \right)^2 \right]}{b_1^{2n+4} - 1 - \frac{2b_1(b_1^{n+2} - 1)}{n+1} \frac{b_1^{n+1} - 1}{b_1 - 1}}. \end{aligned}$$

Por tanto, para  $n$  suficientemente grande, si  $|b_1| < 1$ ,

$$\begin{aligned} Y_n(0) &\sim \frac{(b_1^{-1} - b_1) \left[ \frac{b_1}{(n+1)(b_1 - 1)} + \frac{b_1^2}{(n+1)^2(b_1 - 1)^2} \right]}{-1 - \frac{2b_1}{(n+1)(b_1 - 1)}} \\ &\sim (b_1 - b_1^{-1}) \frac{b_1}{(n+1)(b_1 - 1)} \\ &\sim \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Por otra parte, si  $|b_1| > 1$ ,

$$\begin{aligned} Y_n(0) &= \frac{(b_1^{-1} - b_1) \left[ -\frac{1}{(n+1)(b_1-1)} + \frac{1}{(n+1)^2(b_1-1)^2} \right]}{1 - \frac{2}{(n+1)(b_1-1)}} \\ &\sim (b_1 - b_1^{-1}) \frac{1}{(n+1)(b_1-1)} \\ &\sim \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

### 2.3 La teoría CMV

Existe otro enfoque que solventa la dependencia del carácter unitario de la matriz que representa el operador de multiplicación de la no pertenencia de la medida de ortogonalidad a la clase de Szegő, desarrollada por Cantero, Moral y Velázquez ([60]). Se denomina *representación CMV*, y se define de la siguiente manera.

Sea  $\Lambda_{(k,l)}$  el subespacio de los polinomios de Laurent generado por  $\{z^j\}_{j=k}^l$ ,  $k \leq l$ , y  $P_{(k,l)}$  la proyección ortogonal sobre  $\Lambda_{(k,l)}$  respecto a la forma bilineal hermitiana (1.14). Definimos

$$\Lambda^{(n)} = \begin{cases} \Lambda_{(-k,k)} & n = 2k, \\ \Lambda_{(-k,k+1)} & n = 2k + 1, \end{cases}$$

y  $P^{(n)}$  es la proyección ortogonal sobre  $\Lambda^{(n)}$ . Además, definimos

$$\chi_n^{(0)} = \begin{cases} z^{-k} & n = 2k, \\ z^{k+1} & n = 2k + 1, \end{cases}$$

y aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, obtenemos la base CMV mediante

$$\chi_n = (1 - P^{(n-1)})\chi_n^{(0)}.$$

En lugar de considerar la sucesión  $\{1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, \dots\}$ , podríamos de igual manera considerar la sucesión  $\{1, z^{-1}, z, z^{-2}, z^2, \dots\}$ . En estas condiciones, sean

$$\tilde{\Lambda}^{(n)} = \begin{cases} \Lambda_{(-k,k)} & n = 2k, \\ \Lambda_{(-k-1,k)} & n = 2k + 1, \end{cases}$$



y  $\tilde{P}^{(n)}$  la proyección ortogonal sobre  $\tilde{\Lambda}^{(n)}$ . Además, definimos

$$x_n^{(0)} = \begin{cases} z^{-k} & n = 2k, \\ z^{-k-1} & n = 2k + 1, \end{cases}$$

y la base CMV alternativa mediante

$$x_n = (1 - \tilde{P}^{(n-1)})x_n^{(0)}.$$

También definimos

$$\begin{aligned} \eta_n(z) &= \chi_{2n}(z), & n \geq 0, \\ \tau_n(z) &= \chi_{2n-1}(z), & n \geq 1, \\ s_n(z) &= x_{2n}(z), & n \geq 0, \\ t_n(z) &= x_{2n-1}(z), & n \geq 1. \end{aligned}$$

$\eta_n, \tau_n, s_n$  y  $t_n$  se pueden expresar en términos de los polinomios ortogonales mónicos con respecto a  $\mathcal{L}, \Phi_n$ , de la siguiente manera.

PROPOSICION 2.3.1. *Se cumple*

$$\begin{aligned} \eta_n(z) &= z^{-n}\Phi_{2n}^*(z), \\ \tau_n(z) &= z^{-n+1}\Phi_{2n-1}(z), \\ s_n(z) &= z^{-n}\Phi_{2n}(z), \\ t_n(z) &= z^{-n}\Phi_{2n-1}^*(z). \end{aligned}$$

Además,

$$x_n(z) = \overline{\chi_n(1/\bar{z})}.$$

PROPOSICION 2.3.2. *Las sucesiones  $\{\chi_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  satisfacen las*

siguientes relaciones de recurrencia

$$z\chi_0 = -\Phi_1(0)\chi_0 + \rho_0\chi_1,$$

$$z \begin{pmatrix} \chi_{2n-1} \\ \chi_{2n} \end{pmatrix} = \widehat{\Xi}_{2n-1}^T \begin{pmatrix} \chi_{2n-2} \\ \chi_{2n-1} \end{pmatrix} + \Xi_{2n} \begin{pmatrix} \chi_{2n} \\ \chi_{2n+1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1,$$

$$z \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Phi_1(0) \\ \hat{\rho}_0 \end{pmatrix} x_0 + \Xi_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$z \begin{pmatrix} x_{2n} \\ x_{2n+1} \end{pmatrix} = \widehat{\Xi}_{2n}^T \begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{pmatrix} + \Xi_{2n+1} \begin{pmatrix} x_{2n+1} \\ x_{2n+2} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1,$$

con

$$\Xi_n := \begin{pmatrix} -\rho_{n-1}\Phi_{n+1}(0) & \rho_{n-1}\rho_n \\ -\Phi_n(0)\Phi_{n+1}(0) & \Phi_n(0)\rho_n \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\Xi}_n := \begin{pmatrix} -\hat{\rho}_{n-1}\Phi_{n+1}(0) & \hat{\rho}_{n-1}\hat{\rho}_n \\ -\Phi_n(0)\Phi_{n+1}(0) & \Phi_n(0)\hat{\rho}_n \end{pmatrix},$$

donde  $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$  son los parámetros de Verblunsky asociados al funcional  $\mathcal{L}$ ,  $\rho_n = |1 - |\Phi_{n+1}(0)||^{1/2}$  y  $\hat{\rho}_n = \varsigma_n \rho_n$ , con  $\varsigma_n = \text{sign}(1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2)$ .

Las anteriores relaciones de recurrencia proporcionan una representación matricial que juega un rol similar al de la matriz de Jacobi en la recta real. En este caso, la matriz pentadiagonal  $\mathcal{C}$  asociada a la representación CMV resulta ser

$$\mathcal{C}_{i,j} = \langle \chi_i, z\chi_j \rangle_{\mathcal{L}},$$

donde  $\{\chi_n\}_{n \geq 0}$  es la base CMV. Por otro lado, utilizando la base CMV alternativa,  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ , obtenemos la matriz  $\tilde{\mathcal{C}}$  de la representación CMV alternativa,

$$\tilde{\mathcal{C}}_{i,j} = \langle x_i, zx_j \rangle_{\mathcal{L}}.$$

Además,  $\tilde{\mathcal{C}}$  es la transpuesta de  $\mathcal{C}$ . Los elementos de  $\mathcal{C}$  se pueden expresar en términos de los coeficientes de Verblunsky  $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$  asociados al funcional  $\mathcal{L}$ .

PROPOSICION 2.3.3. *Los elementos de la matriz  $\mathcal{C}$  están dados por*

$$\begin{aligned}
 \langle \eta_{j-1}, z\eta_j \rangle_{\mathcal{L}} &= \hat{\rho}_{2j-1}\hat{\rho}_{2j-2}, \\
 \langle \tau_j, z\eta_j \rangle_{\mathcal{L}} &= \overline{\Phi_{2j-1}(0)}\hat{\rho}_{2j-1}, \\
 \langle \eta_{j-1}, z\tau_j \rangle_{\mathcal{L}} &= -\Phi_{2j}(0)\hat{\rho}_{2j-2}, \\
 \langle \tau_j, z\tau_j \rangle_{\mathcal{L}} &= -\Phi_{2j}(0)\overline{\Phi_{2j-1}(0)}, \\
 \langle \eta_j, z\eta_j \rangle_{\mathcal{L}} &= -\overline{\Phi_{2j}(0)}\Phi_{2j+1}(0), \\
 \langle \tau_{j+1}, z\eta_j \rangle_{\mathcal{L}} &= \overline{\Phi_{2j}(0)}\rho_{2j}, \\
 \langle \eta_j, z\tau_j \rangle_{\mathcal{L}} &= -\overline{\Phi_{2j+1}(0)}\rho_{2j-1}, \\
 \langle \tau_{j+1}, z\tau_j \rangle_{\mathcal{L}} &= \rho_{2j}\rho_{2j-1}.
 \end{aligned}$$

*Los restantes elementos de la matriz son nulos.*

En otras palabras,  $\mathcal{C}$  es una matriz pentadiagonal de la forma

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix}
 -\Phi_1(0) & -\Phi_2(0)\hat{\rho}_0 & \hat{\rho}_1\hat{\rho}_0 & 0 & 0 & \dots \\
 \rho_0 & -\Phi_2(0)\overline{\Phi_1(0)} & \overline{\Phi_1(0)}\hat{\rho}_1 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & -\Phi_3(0)\rho_1 & -\Phi_3(0)\overline{\Phi_2(0)} & -\Phi_4(0)\hat{\rho}_2 & \hat{\rho}_3\hat{\rho}_2 & \dots \\
 0 & \rho_2\rho_1 & \overline{\Phi_2(0)}\rho_2 & -\Phi_4(0)\overline{\Phi_3(0)} & \overline{\Phi_3(0)}\hat{\rho}_3 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & -\Phi_5(0)\rho_3 & -\Phi_5(0)\overline{\Phi_4(0)} & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{pmatrix}.$$

Se puede factorizar  $\mathcal{C}$  mediante dos matrices tridiagonales  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{W}$  de la siguiente manera

PROPOSICION 2.3.4. *Si*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{i,j} &= \langle x_i, \chi_j \rangle_{\mathcal{L}}, \\
 \mathcal{W}_{i,j} &= \langle \chi_i, zx_j \rangle_{\mathcal{L}},
 \end{aligned}$$

*entonces*

(i)  $\mathcal{C} = \mathcal{W}\mathcal{M}$ .

(ii)  $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{M}\mathcal{W}$ .

(iii)  $\mathcal{M}$  es una matriz diagonal por bloques, con un bloque de tamaño  $1 \times 1$  seguido de bloques de tamaño  $2 \times 2$ .

(iv)  $\mathcal{W}$  es una matriz diagonal por bloques, con bloques de tamaño  $2 \times 2$ .

Además,  $\mathcal{C}$  admite la siguiente factorización.

PROPOSICION 2.3.5. *Sea*

$$\Theta_j = \begin{pmatrix} -\Phi_{j+1}(0) & \rho_j \\ \hat{\rho}_j & \Phi_{j+1}(0) \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \Theta_1 & & \\ & & \Theta_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \Theta_0 & & & \\ & \Theta_2 & & \\ & & \Theta_4 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo.**

Si  $d\sigma = \frac{1-|\beta|^2}{|z-\beta|^2} \frac{d\theta}{2\pi}$ ,  $|\beta| < 1$ , tenemos  $\Phi_1(0) = -\beta$  y  $\Phi_k(0) = 0$ ,  $k = 2, 3, \dots$   
Luego,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & (1-|\beta|^2)^{\frac{1}{2}} \\ (1-|\beta|^2)^{\frac{1}{2}} & -\bar{\beta} \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \end{pmatrix},$$



1. (b) Use la parte (a) y el Lema de Schwarz (ver Apéndice) para mostrar que

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq |F(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

3. Desigualdad de Carathéodory: Dada una función analítica sobre  $\overline{B(0, R)}$ . Considere  $M = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ ,  $A(r) = \max\{\Re(f(z)) : |z| = r\}$ , para  $0 < r < R$ . Muestre que si  $A(r) \geq 0$  entonces

$$M(r) \leq \frac{R+r}{R-r}(A(R) + |f(0)|).$$

*Sugerencia:* Considere primero el caso en que  $f(0) = 0$  y estudie la función

$$g(z) = \frac{f(Rz)}{2A(R) + f(Rz)}, \text{ para } |z| < 1.$$

4. Dada  $f$  una función analítica en  $\mathbb{D}$ , suponga que  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .

- (a) Si  $z_k = 0$  para  $1 \leq k \leq n$ , muestre que

$$|f(z)| \leq M \prod_{k=1}^n \frac{|z - z_k|}{|1 - \bar{z}_k z|},$$

para  $z \in \mathbb{D}$ .

- (b) Si  $z_k = 0$  para  $1 \leq k \leq n$ , con  $z_k \neq 0$  y  $f(0) = M(z_1 \cdots z_n)$ . Encuentre una fórmula para  $f$ .

5. Suponga que  $f$  es analítica en alguna región contenida en  $\overline{\mathbb{D}}$  y que  $|f(z)| = 1$  cuando  $|z| = 1$ . Encuentre una fórmula para  $f$ . *Sugerencia:* Considere primero el caso en que  $f$  no tiene ceros en  $\mathbb{D}$ .

6. Suponga que  $f$  es analítica en una región contenida en  $\overline{\mathbb{D}}$  y que  $|f(z)| = 1$  cuando  $|z| = 1$ . Si  $f$  tiene un cero simple en  $z_1 = \frac{1}{4}(1+i)$  y un cero doble en  $z_2 = \frac{1}{2}$ . ¿Puede suceder que  $f(0) = \frac{1}{2}$ ?

7. Existe una función analítica sobre  $\mathbb{D}$  tal que  $|f(z)| < 1$ , para  $|z| < 1$ ,  $f(0) = \frac{1}{2}$  y  $f'(0) = \frac{3}{4}$ ? Si la respuesta es afirmativa, encuentre tal función. Es única dicha función?
8. Demostrar el enunciado de la proposición 2.1.3.
9. Hallar la matriz CMV correspondiente a la transformación de Christoffel de la medida normalizada de Lebesgue.
10. Hallar la matriz CMV correspondiente a la transformación de Uvarov de la medida normalizada de Lebesgue para una masa situada en  $z = 1$ .
11. Determinar la matriz CMV correspondiente a la transformación de Aleksandrov.
12. Determinar la matriz CMV correspondiente a las transformaciones espectrales racionales analizadas en las subsecciones 2.14 y 2.1.5.





## CAPÍTULO 3

# POLINOMIOS ORTOGONALES Y ESPACIOS DE SOBOLEV CON PESO

En términos generales, en este capítulo retomaremos las nociones de ortogonalidad Sobolev (en el sentido clásico o distribucional) introducidas brevemente en el capítulo 1. Centraremos nuestra atención en vectores de medidas  $(\mu_0, \dots, \mu_m)$  en los que cada componente satisface la relación  $d\mu_k(x) = w_k(x)dx$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ , donde  $w_k$  es una función peso definida sobre un intervalo  $\mathbb{I}_k \subseteq \mathbb{R}$  (acotado o no). En la literatura estos casos de ortogonalidad se denominan

1. Ortogonalidad Sobolev asociada a medidas vectoriales soportadas en intervalos acotados.
2. Ortogonalidad Sobolev asociada a medidas vectoriales soportadas en intervalos no acotados.

### 3.1 Medidas vectoriales soportadas en intervalos acotados

Como ya se ha mencionado, cuando consideramos un producto interno sobre  $\mathbb{P}$

$$\langle p, q \rangle_S = \sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{I}_k} p^{(k)}(x) q^{(k)}(x) d\mu_k(x), \quad (3.1)$$

donde  $\mathbb{I}_k \subseteq \mathbb{R}$ , dos propiedades básicas de los polinomios ortogonales estándar ( $m = 0$ ) se pierden, ya que si  $m > 0$ , los polinomios ortogonales con respecto a (3.1) no satisfacen una relación de recurrencia a tres términos y los ceros de tales polinomios, no son, en general reales y simples y pueden estar localizados fuera de la cápsula convexa del soporte de la medida  $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_m)$  de ortogonalidad.

Cuando  $\text{supp}(\mu_k) = \mathbb{I}_k$  e  $\mathbb{I}_k$  es acotado ( $k = 0, \dots, m$ ) el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales con respecto a (3.1) ha sido extensamente estudiado por A. Martínez Finkelshtein, G. López-Lagomasino, W. Gautschi y A. B. J. Kuijlaars, entre otros. En particular, la asintótica relativa, la asintótica de la raíz  $n$ -ésima y la asintótica fuerte han sido analizadas con detalle ([51], [52], [53], [54]).

### 3.1.1 Propiedades algebraicas y estudio de asintóticas de polinomios ortogonales

El primer resultado conocido acerca del comportamiento asintótico de polinomios ortogonales de Sobolev (en el caso acotado) es atribuido a Schäfer [59], quien mostró que las derivadas de los polinomios ortogonales de Legendre-Sobolev verificaban

$$Q'_n(x) = nP_{n-1}(x) + \kappa_n^{1/2}O(n^{-3/2}), \quad (3.2)$$

donde  $Q_n$  es el  $n$ -ésimo polinomio ortogonal mónico de Legendre-Sobolev con norma Sobolev  $\kappa_n^{1/2}$  y  $P_n$  es el  $n$ -ésimo polinomio ortogonal mónico de Legendre. Sin embargo, este estudio no continuó, y aproximadamente en 1988 empieza una línea de investigación diferente como ya mencionamos en la sección 1.2.3.

### Ortogonalidad Sobolev sobre curvas cerradas de Jordan

En esta sección centraremos nuestra atención en la sucesión de polinomios ortogonales mónicos correspondiente a productos internos de Sobolev sobre  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  de la forma:

$$\langle p, q \rangle_S = \int p(z)\overline{q(z)}d\mu_0(z) + \int p'(z)\overline{q'(z)}d\mu_1(z) \quad (3.3)$$

donde el vector de medidas  $(\mu_0, \mu_1)$  está formado por medidas positivas de Borel soportadas en  $\mathbb{C}$  tales que

$$\int_{\mathbb{C}} |z|^{2n} d\mu_k(z) < \infty, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad k = 0, 1.$$

Supondremos, adicionalmente, que el soporte de  $\mu_0$  contiene, al menos, un número infinito de puntos, y que  $\mu_1$  no es la medida nula. Seguiremos el esquema presentado en [51] para extender el método de Bernstein-Szegő para la obtención de la asintótica exterior de los polinomios ortogonales mónicos correspondientes a (3.3). A grandes rasgos, tal esquema consiste en:

1. Introducir los polinomios ortogonales mónicos asociados a (3.3), imponiendo que  $\text{supp}(\mu_k) \subset \Gamma$ , con  $k = 0, 1$  y  $\Gamma$  una curva o arco de Jordan que satisface apropiadas condiciones de regularidad.
2. Hacer uso de la teoría de espacios de Hardy para definir un espacio de Hilbert conveniente, que permita solucionar cierto problema extremal.
3. Utilizar la solución del problema extremal mencionado en el apartado anterior para estudiar el comportamiento asintótico de la sucesión  $\left\{ \frac{\|Q_n\|_S^2}{\|P_n\|_{\mu_1}^2} \right\}$ , donde  $\mu_1$  satisface una condición tipo Szegő sobre  $\Gamma$ .
4. Establecer el comportamiento asintótico relativo exterior de la sucesión  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ .

En la práctica, la situación más natural sucede cuando el vector de medidas  $(\mu_0, \mu_1)$  tiene componentes cuyos soportes están contenidos en la misma curva  $\Gamma$  o en un arco de Jordan sobre  $\mathbb{C}$  (no reducido a un punto).

DEFINICION 3.1. *Dados  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{C}$ , diremos que  $f \in C^{2+}$  si  $f$  es de clase  $C^2$  y  $f''$  satisface una condición de Lipschitz*

$$|f''(x) - f''(y)| \leq M|x - y|^\alpha,$$

para algún par de constantes fijadas  $M, \alpha > 0$ , y para todo  $x, y \in \mathbb{I}$ .

DEFINICION 3.2. (Condición de suavidad sobre  $\Gamma$ , [51]). Si  $\Gamma$  es una curva de Jordan o un arco rectificable sobre  $\mathbb{C}$  y  $z = z(s)$  su parametrización por longitud de arco, diremos que  $\Gamma \in C^{2+}$  si  $z \in C^{2+}$ .

Denotaremos por  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ,  $\Omega$  el mayor abierto conexo de  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$  que contiene el punto  $z = \infty$ , donde  $\Gamma$  es una curva de Jordan o un arco rectificable y por  $\Phi : \Omega \rightarrow \{z : |z| > R\}$  la aplicación conforme\* normalizada por la condición:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{z} = 1,$$

donde  $R$  es la capacidad logarítmica,  $\text{Cap}(\Gamma)$ , de  $\Gamma$  (ver [43], capítulo 6, págs. 95-96).

DEFINICION 3.3. Si  $\Gamma$  es una curva o un arco de Jordan rectificable y  $\mu$  una medida positiva sobre  $\mathbb{C}$ , diremos que  $\mu$  pertenece a la clase de Szegő sobre  $\Gamma$  ( $\mu \in \mathbf{S}$ ) si:

- a)  $\text{supp}(\mu) \subset \Gamma$ .
- b)  $\int_{\Gamma} (\log \mu'(z)) |\Phi'(z)| |dz| > -\infty$ .

Para una medida positiva de Borel finita cuyo soporte,  $\text{supp}(\mu)$ , contiene un número infinito de puntos, sabemos que está garantizada la existencia de una única sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a  $\mu$ ,  $\{P_n(\mu; z)\}_{n \geq 0}$ . Denotaremos el cuadrado de la norma de tales polinomios por

$$\tau_n(\mu) = \int |P_n(\mu; z)|^2 d\mu(z).$$

Cuando  $\mu$  es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue (parametrizada por la longitud de arco) y denotamos la derivada de Radon-Nikodym mediante  $\mu' = \rho$ , usaremos  $\rho$  en vez de  $\mu$  en la notación anterior.

Para dar un enfoque unificado a los casos de curva cerrada o arco, en [51] se considera cualquier arco rectificable de Jordan como un “corte” sobre el plano, con dos lados. Si  $F$  es una función analítica en  $\Omega$  con

---

\*Recuerde el teorema de Riemann: recintos simplemente conexos son conformemente equivalentes.

valores frontera integrables  $F_+$  y  $F_-$  sobre  $\Omega$ , definimos la integral de contorno

$$\oint_{\Gamma} F(t)\rho(t)|dt| = \int_{\Gamma} F_+(t)\rho(t)|dt| + \int_{\Gamma} F_-(t)\rho(t)|dt|. \quad (3.4)$$

Entonces sustituyendo  $\rho$  por  $\frac{\rho}{2}$  en (3.4), tenemos que si  $\{p_n(\rho, \cdot)\}_{n \geq 0}$  es la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a  $\rho$ , y también lo será con respecto a  $\frac{\rho}{2}$ . Además, cuando  $\Gamma$  es una curva cerrada, tenemos

$$\oint_{\Gamma} F(t)\rho(t)|dt| = \int_{\Gamma} F(t)\rho(t)|dt|.$$

Para  $r > R$ , denotaremos mediante  $\Gamma_r = \Phi^{-1}(\{w : |w| = r\})$  las curvas de nivel asociadas a la aplicación  $\Phi$ . Se puede mostrar que bajo las hipótesis impuestas sobre  $\Gamma$ ,  $\Phi$  y  $\Phi^{-1}$  tienen extensiones continuas e inyectivas sobre la frontera de cada uno de sus dominios de definición.

Por otro lado, como  $\rho_1 \in \mathbf{S}$ , existe una única función  $\mathcal{R}$  holomorfa en  $\Omega$ , tal que:

- a)  $\mathcal{R}(z) \neq 0$  para  $z \in \Omega$ ;
- b)  $\mathcal{R}(\infty) > 0$ ;
- c) para casi todo  $\zeta \in \Gamma$  existe valor frontera no tangencial  $\mathcal{R}(\zeta)$  con

$$|\mathcal{R}(\zeta)| = \rho_1(\zeta).$$

De hecho,  $\ln|\mathcal{R}|$  es la solución del problema de Dirichlet en  $\Omega$  con condición de frontera  $\ln \rho_1$  sobre  $\Gamma$ .

Si  $g(z, \infty) = \ln|\Psi(z)| - \ln \text{Cap}(\Gamma)$  es la función de Green de  $\Omega$  y  $\frac{\partial}{\partial n}$  denota la derivada normal, entonces

$$\mathcal{R}(\infty) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \ln \rho_1 \frac{\partial g(\zeta, \infty)}{\partial n_{\zeta}} |d\zeta| \right\}. \quad (3.5)$$

DEFINICION 3.4. Sea  $f$  una función analítica en  $\Omega$ . Diremos que  $f$  pertenece a la clase  $E^1(\Omega)$  si

$$\sup_{r > R} \oint_{\Gamma_r} |f^2(z)||dz| < +\infty.$$

Diremos que  $f$  pertenece a la clase  $E^2(\Omega, \rho_1)$  si  $|f^2(z)\mathcal{R}(z)| \in E^1(\Omega)$ .

La clase  $E^2(\Omega, \rho_1)$  tiene estructura de espacio de Hilbert, con producto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \oint f(x) \overline{g(x)} \rho_1(x) |dx|. \quad (3.6)$$

Si  $\|\cdot\|$  denota la norma inducida por (3.6), entonces tiene sentido el siguiente problema extremal

$$\nu(\rho_1) = \inf\{\|F\|^2 : F \in E^2(\Omega, \rho_1), F(\infty) = 1\}. \quad (3.7)$$

Además, existe una única **función extremal**  $\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(\rho; z)$  solución de (3.7) y se satisface

$$\mathcal{F}^2(z) = \Phi'(z) \frac{\mathcal{R}(\infty)}{\mathcal{R}(z)}, \quad z \in \Omega, \quad (3.8)$$

$$\nu(\rho_1) = 2\pi \mathcal{R}(\infty) \text{Cap}(\Gamma). \quad (3.9)$$

Para cada  $f \in E^2(\Omega, \rho_1)$ , el núcleo reproductor  $K(t, z)$  correspondiente a (3.6) satisface

$$f(z) = \langle f, K(\cdot, z) \rangle, \quad z \in \Omega. \quad (3.10)$$

Además,

$$K(z, \infty) = \nu(\rho_1)^{-1} \mathcal{F}(z). \quad (3.11)$$

La función extremal  $\mathcal{F}$  y la constante  $\nu(\rho_1)$  están relacionadas con el comportamiento asintótico de la SPOM  $\{P_n(\rho_1; \cdot)\}$  mediante

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_n(\rho_1)}{[\text{Cap}(\Gamma)]^{2n}} = \nu(\rho_1), \quad (3.12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(\rho_1; z)}{\Phi^n(z)} = \mathcal{F}(z), \quad (3.13)$$

local y uniformemente en  $\Omega$ .

**TEOREMA 3.1.** (*Comportamiento asintótico relativo de las normas Sobolev, [51]*).

Si  $\Gamma \in C^{+2}$  es una curva cerrada o arco de Jordan, entonces para  $\rho_1 \in \mathbf{S}$  y para cualquier medida positiva y finita de Borel  $\mu_0$  sobre  $\Gamma$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|Q_n\|_S^2}{n^2 \tau_{n-1}(\rho_1)} = 1. \quad (3.14)$$

Por otro lado, usando la propiedad extremal de  $\tau_n(\mu_0)$ ,  $\tau_n(\rho_1)$ , tenemos que

$$\begin{aligned}\tau_n(\mu_0) &\leq \|Q_n\|_{\mu_0}^2, \\ \tau_n(\rho_1) &\leq \left\| \frac{Q'_n}{n} \right\|_{\rho_1}^2.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|Q_n\|_S^2 \geq \tau_n(\mu_0) + n^2\tau_n(\rho_1). \quad (3.15)$$

Así pues,

$$\liminf_n \frac{\langle Q_n, Q_n \rangle_S}{n^2\tau_{n-1}(\rho_1)} \geq 1. \quad (3.16)$$

Fijado  $z_0 \in \Gamma$ , consideremos la sucesión de polinomios mónicos

$$V_n(z) = n \int_{z_0}^z P_{n-1}(\rho_1; t) dt.$$

Por la propiedad extremal de  $\|Q_n\|_S^2$  se tiene que

$$\|Q_n\|_S^2 \leq \langle V_n, V_n \rangle_S = \|V_n\|_{\mu_0}^2 + n^2\tau_n(\rho_1). \quad (3.17)$$

Con esta última observación, en [51] el problema se reduce al estudio del comportamiento asintótico de las normas  $\|V_n\|_{\mu_0}^2$ .

PROPOSICION 3.1.1. *Si  $\frac{1}{\rho_1} \in L^1(\Gamma)$ , entonces el promedio integral de la sucesión de polinomios ortonormales  $\{p_n(\rho_1; \cdot)\}$  sobre cualquier sub-arco  $\gamma \subset \Gamma$  tiende a cero, es decir,*

$$\lim_n \int_{\gamma} p_n(\rho_1; x) dx = 0.$$

Consecuentemente, para cualquier medida finita  $\mu_0$ , sobre  $\Gamma$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|V_n\|_{\mu_0}^2}{n^2\tau_{n-1}(\rho_1)} = 0. \quad (3.18)$$

Usando los siguientes hechos (cfr. [51]):

- a) Para cualquier peso  $\rho_1 \in \mathbf{S}$  y  $\delta > 0$ , el peso  $\tilde{\rho}_1(x) = \rho_1(x) + \delta$ , es tal que  $\frac{1}{\tilde{\rho}_1} \in L^1(\Gamma)$ .

b)  $\text{dist}(\tilde{\rho}_1, \rho_1) \rightarrow 0$  cuando  $\delta \downarrow 0$ , para la métrica sobre  $\mathbf{S}$  dada por

$$\text{dist}(\rho, \sigma) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} |\ln \rho - \ln \sigma|(t) \frac{\partial g(t, \infty)}{\partial n_t} |dt|,$$

donde  $g(x, z) = \chi_{\gamma(x)}(z) \frac{z'(s)}{\tilde{\rho}_1(z)}$ ,  $z = z(s)$ ,  $s \in [0, l]$ ,  $z(0) = z(l) = z_0$ ,  $\gamma(z)$  la imagen por la parametrización de longitud de arco del intervalo  $[0, s] \subset [0, l]$  y  $\chi_{\gamma(x)}$  la función característica de  $\gamma(x)$ .

Se puede mostrar que, para  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\limsup_n \frac{\|Q_n\|_{\mathbf{S}}^2}{n^2 \tau_{n-1}(\rho_1)} \leq 1 + \epsilon,$$

está última desigualdad permite demostrar el teorema 3.1.

**TEOREMA 3.2.** (*Comportamiento asintótico relativo exterior de los polinomios ortogonales de Sobolev, [51]*).

Si  $\Gamma \in C^{+2}$  es una curva cerrada o arco de Jordan, entonces para  $\rho_1 \in \mathbf{S}$  y para cualquier medida positiva y finita de Borel  $\mu_0$  sobre  $\Gamma$  se tiene

$$Q'_n(z) = n\mathcal{F}(z)\Phi^{n-1}(z)(1 + o(1)), \quad (3.19)$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q'_n(z)}{nP_{n-1}(\rho_1; z)} = 1, \quad (3.20)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\Omega$ . Además, si  $\rho_0 \in \mathbf{S}$ , entonces

$$Q_n(z) = \frac{\mathcal{F}}{\Phi'}(z)\Phi^n(z)(1 + o(1)), \quad (3.21)$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(z)}{P_n(\rho_1; z)} = \frac{1}{\Phi'(z)}, \quad (3.22)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\Omega$ .

Finalmente, si consideramos el producto interno de Sobolev

$$\langle p, q \rangle_{\mathbf{S}} = \sum_{k=0}^m \int p^{(k)}(z) \overline{q^{(k)}(z)} d\mu_k(z) \quad (3.23)$$



donde el vector de medidas  $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)$  está formado por medidas positivas de Borel, tales que  $\mu_k \in \mathbf{S}$ , para todo  $k = 0, \dots, m$ , entonces tenemos el siguiente resultado

**TEOREMA 3.3.** *(Martínez-Finkelshtein y Pijeira, [51]). La asintótica relativa exterior de los polinomios ortogonales mónicos de Sobolev  $Q_n$  con respecto al producto interno (3.23) es*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n^{(k)}(z)}{n^k P_{n-k}(z; \mu_m)} = \frac{1}{(\Phi')^{m-k}}, \quad k = 0, \dots, m, \quad (3.24)$$

uniformemente sobre conjuntos compactos de  $\Omega$ .

### Distribución de ceros

Los teoremas (3.1) y (3.2) nos permiten establecer el siguiente resultado:

**COROLARIO 3.1.** *([51]) Con la hipótesis del teorema (3.1), los ceros de la derivadas  $Q'_n$  de los polinomios ortogonales mónicos de Sobolev con respecto al producto interno (3.3) se acumulan en  $\Gamma \cup (\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega})$ . Si, además,  $\rho_0 \in \mathbf{S}$ , entonces los ceros de  $Q_n$  también se acumulan en  $\Gamma \cup (\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega})$ , es decir,*

$$\begin{aligned} \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x : Q'_k(x) = 0\}} &\subseteq \Gamma \cup (\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}), \\ \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x : Q_k(x) = 0\}} &\subseteq \Gamma \cup (\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}), \quad \text{si } \rho_0 \in \mathbf{S}. \end{aligned}$$

### 3.1.2 Noción de coherencia y asintótica relativa exterior

Consideremos el producto interno de Sobolev

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{\mathbb{I}_0} p(x)q(x)d\mu_0(x) + \lambda \int_{\mathbb{I}_1} p'(x)q'(x)d\mu_1(x),$$

donde  $\lambda \geq 0$ . Seguiremos principalmente el enfoque presentado en [52] y las referencias allí indicadas.

Usando argumentos similares a los planteados en los ejercicios 4. y 5. del capítulo 1 (expresando el polinomio mónico  $Q_n$  como el cociente de

dos determinantes), podemos hallar una representación de  $Q_n$  en la cual sus coeficientes son funciones racionales en  $\lambda$ , cuyos numerador y denominador tienen el mismo grado que es, a lo más  $n-1$ . De manera que para  $\lambda \rightarrow \infty$  existe un polinomio límite asociado  $R_n^\infty$ . Este polinomio se utiliza habitualmente para conectar las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos estándar  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  asociadas a las medidas  $\mu_0$  y  $\mu_1$ , respectivamente, con la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Sobolev  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ . Por ejemplo, se puede mostrar que

$$\frac{d}{dx} R_{n+1}^\infty(x) = (n+1)T_n(x) \text{ y } \langle R_n^\infty, 1 \rangle_{\mu_0} = \int_{\mathbb{I}_0} R_n^\infty(x) d\mu_0(x) = 0, \quad n \geq 1. \quad (3.25)$$

Si expresamos el polinomio límite  $R_{n+1}^\infty$  en términos de las bases  $\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$  y  $\{Q_0, \dots, Q_{n+1}\}$  de  $\mathbb{P}_{n+1}$ , obtenemos

$$R_{n+1}^\infty = \sum_{j=1}^{n+1} b_{n,j} P_j(x) = \sum_{j=0}^{n+1} d_{n+1,j} Q_j(x), \quad (3.26)$$

donde  $d_{n+1,j} = \frac{\langle R_{n+1}^\infty, Q_j \rangle_S}{\|Q_j\|_S^2}$ . Por supuesto, cada expresión en (3.26) tiene un número finito de términos no nulos. Si asumimos que

$$R_{n+1}^\infty = \sum_{j=n-k}^{n+1} b_{n,j} P_j(x), \quad k \geq -1, n \geq k+1, \quad (3.27)$$

donde  $k$  es un entero fijado, entonces

$$T_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=n-k}^{n+1} b_{n,j} P_j'(x), \quad k \geq -1, n \geq k+1. \quad (3.28)$$

De (3.25) y (3.27) obtenemos que  $d_{n+1,j} = 0$  para  $0 \leq j \leq n-k-1$ . Luego (3.26) puede expresarse como

$$\sum_{j=n-k}^{n+1} b_{n,j} P_j(x) = \sum_{j=n-k}^{n+1} d_{n+1,j} Q_j(x), \quad k \geq -1, n \geq k+1. \quad (3.29)$$

Teniendo presente este esquema podemos introducir la siguiente definición:

DEFINICION 3.5. Sean un vector de medidas positivas de Borel  $(\mu_0, \mu_1)$ , y  $\{P_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  las correspondientes sucesiones estándar de polinomios ortogonales mónicos. Para  $k \geq -1$ , diremos que  $(\mu_0, \mu_1)$  es un par  $k$ -coherente de medidas, si

$$T_{n+1}(x) = \sum_{j=n-k}^{n+1} \frac{b_{n,j}}{j} P'_j(x), \quad n \geq k+1, \quad (3.30)$$

con  $b_{n,n+1} = 1$  y  $b_{n,n-k} \neq 0$ .

Históricamente, la noción de coherencia fue una de las primeras herramientas utilizada en el estudio del comportamiento asintótico de polinomios ortogonales mónicos asociados a productos internos de Sobolev [52].

Obsérvese que esta definición es independiente de la acotación o no de los soportes. De hecho para  $k = -1$  la relación (3.30) se satisface para las sucesiones de polinomios ortogonales clásicos (Laguerre, Jacobi, Hermite). Para  $k = 0$ , la definición se corresponde con la de pares coherentes de medidas dada en el ejercicio 3. del capítulo 1 y para  $k = 1$ , se corresponde con la de pares simétricamente coherentes de medidas dada en el ejercicio 5. del mismo capítulo. Además,

PROPOSICION 3.1.2. Si  $(\mu_0, \mu_1)$  es un par coherente de medidas, entonces para  $n \geq 1$

$$P_{n+1}(x) - \sigma_n \frac{n+1}{n} P_n(x) = Q_{n+1}(x) - \alpha_n Q_n(x), \quad (3.31)$$

donde  $\alpha_n = \sigma_n \frac{n+1}{n} \frac{\|P_n\|_{\mu_0}^2}{\|Q_n\|_S^2} \neq 0$ ,  $n \geq 1$ .

A partir de la relación (3.31), la estrategia de trabajo es la siguiente:

1. Describir todos los pares coherentes de medidas.
2. Establecer el comportamiento asintótico de la sucesión  $\{P_n\}_{n \geq 0}$ .
3. Determinar los límites de las sucesiones  $\{\sigma_n\}$  y  $\{\alpha_n\}$ .
4. Establecer el comportamiento asintótico de la sucesión  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ .

Mostraremos algunos resultados correspondientes al comportamiento asintótico de polinomios ortogonales de Sobolev asociados a pares coherentes de medidas con soportes  $\mathbb{I}_0 = \mathbb{I}_1 = [-1, 1]$ . En este caso, H. G. Meijer [55] dió una clasificación completa de todos los pares coherentes de medidas y probó que, necesariamente, una de las medidas debe ser clásica. La clasificación de Meijer es la siguiente

Caso	$\mu_0$	$\mu_1$
(1)	$(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}dx$	$\frac{1}{ x-\xi_2 }(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + M\delta_{\xi_2}$
(2)	$ x-\xi_1 (1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}dx$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$
(3)	$(1+x)^{\beta-1}dx + M\delta_1$	$(1-x)^\beta dx$
(4)	$(1-x)^{\alpha-1}dx + M\delta_{-1}$	$(1-x)^\alpha dx$

Figura 3.1: Clasificación de Meijer de los pares coherentes de medidas soportadas en  $[-1, 1]$ .

donde  $\alpha, \beta > 0$ ,  $|\xi_1| > 1$ ,  $|\xi_2| \geq 1$ ,  $M \geq 0$  y  $\delta_a$  es la delta de Dirac soportada en  $a \in \mathbb{R}$ . Obsérvese que, en todos los casos,  $\mu_0$  es la suma de una modificación racional de  $\mu_1$  y una posible masa puntual sobre  $\mathbb{R}$ . Así pues, la asintótica relativa exterior  $\frac{T_n}{P_n}$  puede establecerse en términos del cociente de las funciones de Szegő asociadas a cada uno de los pesos.

Por otro lado, despejando  $\sigma_n$  de (3.31) obtenemos

$$\sigma_n = \frac{\frac{1}{n+1} \frac{P'_{n+1}(x)}{P_{n+1}(x)} \frac{P'_{n+1}(x)}{P_n(x)} - \frac{T_n(x)}{P_n(x)}}{\frac{1}{n} \frac{P'_n(x)}{P_n(x)}}, \quad n \geq 1, \quad (3.32)$$

usando la tabla de Meijer y la última observación se puede deducir la convergencia de la sucesión  $\{\sigma_n\}$  y determinar explícitamente su límite en todos los casos.

Por la proposición 3.1.2,  $\alpha_n = \sigma_n \frac{n+1}{n} \frac{\|P_n\|_{\mu_0}^2}{\|Q_n\|_S^2} \neq 0$ ,  $n \leq 1$ . Por lo que para el cálculo del límite de la sucesión  $\{\alpha_n\}$  se tiene

LEMA 3.1. *Para  $n \geq 2$ , se verifica*

$$\|P_n\|_{\mu_0}^2 + \lambda n^2 \|T_{n-1}\|_{\mu_1}^2 \leq \|Q_n\|_S^2,$$

y

$$\|Q_n\|_S^2 \leq \|P_n\|_{\mu_0}^2 + \sigma_{n-1}^2 \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \|P_{n-1}\|_{\mu_0}^2 + \lambda n^2 \|T_{n-1}\|_{\mu_1}^2.$$

Una consecuencia directa de este lema es que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|P_n\|_{\mu_0}^2}{\|Q_n\|_S^2} = 0$  y, por lo tanto,

PROPOSICION 3.1.3. *La sucesión  $\{\alpha_n\}$  satisface*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0. \tag{3.33}$$

### 3.1.3 Distribución de ceros

Los resultados de la sección anterior nos permiten establecer el siguiente teorema, correspondiente a la **asintótica relativa exterior** de sucesiones de polinomios ortogonales mónicos de Sobolev:

TEOREMA 3.4. *(Martínez-Finkelshtein et al. [53]). Dado  $(\mu_0, \mu_1)$  un par coherente de medidas con  $\text{supp}(\mu_0) = [-1, 1]$ . Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(x)}{T_n(x)} = \frac{2}{\Phi'(x)}, \tag{3.34}$$

*uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ , donde  $\Phi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ .*

Una de las consecuencias de este teorema es la localización y distribución de los ceros de  $Q_n$ .

COROLARIO 3.2. *(Martínez-Finkelshtein et al. [53]). Los ceros de la sucesión de polinomios ortogonales mónicos  $\{Q_n\}_{n \geq 1}$  son densos en  $\text{supp}(\mu_0) = [-1, 1]$ , es decir,*

$$\bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x : Q_k(x) = 0\}} = \text{supp}(\mu_0) = [-1, 1]. \tag{3.35}$$

### 3.2 Medidas vectoriales soportadas en intervalos no acotados

Cuando en el producto interno

$$\langle p, q \rangle_S = \sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{I}_k} p^{(k)}(x) q^{(k)}(x) d\mu_k(x), \quad (3.36)$$

los intervalos  $\mathbb{I}_k$  son no acotados, salvo en el caso de los pesos de Laguerre (pares coherentes de medidas) o los pesos de Hermite (pares simétricamente coherentes de medidas), se desconoce el comportamiento asintótico de los correspondientes polinomios ortogonales y el establecimiento de una teoría general sobre propiedades asintóticas constituye un importante reto.

Para  $m = 1$  y en un contexto general, en [23] J. S. Geronimo, D. S. Lubinsky, y F. Marcellán analizan diferentes tipos de comportamiento asintótico de polinomios ortogonales de Sobolev para pesos exponenciales en términos de las normas  $L^2$  y  $L^\infty$ , así como también se estudia la asintótica fuerte de tales polinomios. En cada caso, la medida  $\mu_1$  juega un papel clave. Para completar las ideas presentadas en esta sección pueden consultarse [23] y [46].

Más precisamente, si se considera el producto interno de Sobolev

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{\mathbb{R}} p(x) q(x) (\psi(x)W(x))^2 d\mu_0(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} p'(x) q'(x) W^2(x) d\mu_1(x), \quad (3.37)$$

donde  $\lambda > 0$ ,  $W(x) = \exp(|x|^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  y  $\psi \in L^\infty$  es positiva sobre un conjunto de medida positiva, utilizando técnicas novedosas los autores establecen la asintótica fuerte de los polinomios ortonormales  $\{q_n\}_{n \geq 0}$  con respecto a (3.37) en términos de los polinomios ortonormales  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  con respecto al peso  $W^2$  dentro y fuera de la recta real. Más generalmente, encuentran una relación asintótica entre las sucesiones  $\{q_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  cuando  $W$  es un peso exponencial sobre un intervalo  $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ .

#### Pesos de Freud y pesos exponenciales

**DEFINICION 3.6.** *Dado un peso  $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , diremos que  $W$  es un peso de Freud si  $W = \exp(-Q)$ , donde  $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es par, existe  $Q'$  y es*

positiva en  $(0, \infty)$ . Además, supongamos que  $xQ'(x)$  es estrictamente creciente y satisface

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} xQ'(x) = 0$ .

b) Existen constantes  $\gamma, A, B > 1, C > 0$  tales que

$$A \leq \frac{Q'(\gamma x)}{Q'(x)} \leq B, \quad x \geq C. \tag{3.38}$$

Denotaremos a la clase de pesos de Freud por  $\mathcal{F}$ .

Obsérvese que el peso  $W(x) = \exp(-P(x))$ ,  $x \in \mathbb{R}$  donde  $P$  un polinomio mónico de grado  $2n$ , es un peso de la clase de Freud  $\mathcal{F}$ .

DEFINICION 3.7. Dada  $Q$  una función par y convexa sobre  $\mathbb{R}$ , para  $n \geq 1$  un valor  $a_n$  será llamado número de Mhaskar-Rakhmanov-Saff si es la raíz positiva de la ecuación

$$n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 a_n t Q'(a_n t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

EJEMPLO 3.2.1. Si  $Q(x) = |x|^\alpha$ , entonces

$$a_n = Cn^{1/\alpha}, \quad n \geq 1,$$

donde la constante  $C$  puede expresarse en términos de funciones gamma.

La importancia del número de Mhaskar-Rakhmanov-Saff radica en los siguientes hechos:

1. El valor  $a_n$  está unívocamente determinado.
2. Los polinomios ortonormales  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  con respecto al peso  $W^2$ , con  $W = e^{-Q}$  se comportan sobre el intervalo  $[-a_n, a_n]$  como los polinomios ortonormales para un peso de Szegő en  $[-1, 1]$ . La analogía se manifiesta a través de la transformación lineal  $L_n(x) = \frac{x+a_n}{a_n} - 1$ ,  $x \in [-a_n, a_n]$ .
3. Los ceros del polinomio ortonormal  $p_n$  pertenecen, o se encuentran muy próximos al intervalo  $[-a_n, a_n]$  y poseen una distribución asintótica dada.

4. La identidad fundamental establecida por Mhaskar y Saff:

$$\|PW\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|PW\|_{L^\infty[-a_n, a_n]}, \quad (3.39)$$

para todo  $P \in \mathbb{P}_n$ . Además, Mhaskar y Saff mostraron que  $a_n$  es asintóticamente el menor número para el que se satisface la identidad (3.39).

5. Mhaskar, Saff y Rakhmanov también establecieron la asintótica de la raíz  $n$ -ésima para la sucesión de polinomios ortonormales  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  con respecto al peso  $W^2$ , con  $W = e^{-Q}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p_n(W^2, a_n z))^{1/n}}{g_n(z)} = 1, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \quad (3.40)$$

donde  $g_n$  es una función explícitamente dada.

DEFINICION 3.8. *Dados  $\mathbb{I} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo (acotado o no), y  $Q : \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty)$  una función convexa. Diremos que  $W$  es un peso exponencial si  $W = \exp(-Q)$ , y se satisface*

a)  $\lim_{x \rightarrow c^+} Q(x) = \infty$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow d^-} Q(x) = \infty$ .

Denotaremos mediante  $Exp$  la clase de pesos exponenciales.

Observe que el peso  $W(x) = \exp(|x|^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  es un peso exponencial. Para  $\alpha = 2$ ,  $W$  es el peso de Hermite.

Cuando la función  $Q$  es convexa en el intervalo  $\mathbb{I} = (c, d)$  (no necesariamente simétrico),  $0 \in \mathbb{I}$ , tenemos la siguiente

DEFINICION 3.9. *Para  $n \geq 1$  los valores  $a_{\pm n}$  se denominan números de Mhaskar-Rakhmanov-Saff si satisfacen*

$$c < a_{-n} < 0 < a_n < d,$$

y son soluciones de las ecuaciones

$$n = \frac{1}{\pi} \int_{a_{-n}}^1 a_n \frac{tQ'(t)}{\sqrt{(t-a_{-n})(a_n-t)}} dt; \quad (3.41)$$

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_{a_{-n}}^1 a_n \frac{Q'(t)}{\sqrt{(t-a_{-n})(a_n-t)}} dt. \quad (3.42)$$



Nuevamente, los números  $a_{\pm n}$  están unívocamente determinados y entre las propiedades de  $a_{\pm n}$  se encuentra la denominada identidad de Mhaskar-Saff (ver [23]):

$$\|PW\|_{L^\infty(\mathbb{I})} = \|PW\|_{L^\infty[a_{-n}, a_n]}, \quad (3.43)$$

para todo  $P \in \mathbb{P}_n$ .

### 3.2.1 Propiedades asintóticas

**TEOREMA 3.5.** ([23]). *Sea  $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función par y continua en  $\mathbb{R}$ . Supongamos que  $Q''$  es continua en  $(0, \infty)$ , y  $Q' > 0$  en  $(0, \infty)$  así como que existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que*

$$\alpha \leq \frac{xQ''(x)}{Q'(x)} \leq \beta, \quad x \in (0, \infty). \quad (3.44)$$

Sea  $W = e^{-Q}$ , y sea  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortonormales respecto a  $W^2$ . Dados  $\lambda > 0$  y  $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$  positiva sobre un conjunto de medida positiva, sea  $\{q_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortonormales respecto al producto interno de Sobolev (3.37). Si  $n \rightarrow \infty$ , se tiene

$$(I) \quad \left| \left( q'_n - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} p_{n-1} \right) W \right|_{L^2(\mathbb{R})} = O\left(\frac{a_n}{n}\right) = o(1), \quad (3.45)$$

y

$$\left| (1 + |Q'|) \left( q_n - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x p_{n-1} \right) W \right|_{L^2(\mathbb{R})} = O\left(\sqrt{\frac{a_n}{n}}\right), \quad (3.46)$$

(II)

$$\left| \left( q'_n - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} p_{n-1} \right) W \right|_{L^\infty(\mathbb{R})} = O\left(\sqrt{\frac{a_n}{n}}\right), \quad (3.47)$$

y

$$\left| (1 + |Q'|) \left( q_n - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x p_{n-1} \right) W \right|_{L^2(\mathbb{R})} = O\left(\sqrt{\frac{a_n}{n}}\right). \quad (3.48)$$

(III) Sea

$$W_n(\theta) = W(a_n \cos \theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi]. \quad (3.49)$$

Entonces

$$\left| \frac{\left( q'_n - \frac{1}{\sqrt{\lambda} p_{n-1}} \right) (a_n z)}{\phi^{n-1}(z)} D^{-2} \left( W_n; \frac{1}{\phi(z)} \right) \right| = O \left( \frac{\sqrt{a_n}}{n} \right), \quad (3.50)$$

uniformemente sobre subconjuntos cerrados de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

$$\left| \frac{\left( q_n(a_n z) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{a_n z} p_{n-1} \right)}{\phi^n(z)} D^{-2} \left( W_n; \frac{1}{\phi(z)} \right) \right| = O \left( \frac{a_n^{3/2}}{n^2} \right), \quad (3.51)$$

uniformemente sobre subconjuntos cerrados de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

OBSERVACION 3.2.1.

a) La condición (3.44) permite

$$Q(x) = |x|^\alpha, \quad \text{si } \alpha > 1.$$

b) Es sorprendente el grado de cercanía de  $q'_n$  a  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} p_{n-1}$ . El comportamiento asintótico en norma  $L^2$  es suficientemente fuerte para implicar la cota uniforme dada en (II) con la ayuda de una desigualdad de Nikolskii.

c) Los resultados siguen siendo válidos asumiendo menos suavidad sobre  $Q$ , por ejemplo para pesos de Freud en la clase  $\mathcal{F}(\text{Dini})^\dagger$ . También existe un resultado similar para pesos no pertenecientes a la clase de Freud  $\mathcal{F}$  siempre y cuando, para cada  $\epsilon > 0$ ,

$$\frac{xQ'(x)}{Q(x)} = O(Q(x)^\epsilon)$$

cuando  $x$  se aproxima a los puntos extremos del intervalo de ortogonalidad.

Sin embargo, las formulaciones se pueden plantear más técnicas.

---

<sup>†</sup>ver [23] y referencias allí sugeridas.

d) En (3.46) puede reemplazar  $\int_0^x p_{n-1}$  por  $\frac{p_n \gamma_{n-1}(W^2)}{(n\gamma_n(W^2))}$ , donde  $\gamma_n$  es el coeficiente principal de  $p_n$ , pero el término de error es malo.

COROLARIO 3.3. (a) Cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\kappa_n = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left(\frac{a_n}{2}\right)^{-n+\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{Q(as)}{\sqrt{1-s^2}} ds\right) (1 + o(1)). \quad (3.52)$$

(b) Cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 |\sqrt{\lambda a_n} q'(a_n x) W(a_n x) \\ & - \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{(1-x^2)^{1/4}} \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \arccos x + 2\Gamma(W_n; \arccos x) - \frac{\pi}{4}\right]|^2 dx = o(1). \end{aligned} \quad (3.53)$$

(c) Cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{\sqrt{\lambda a_n} q'(a_n z)}{\phi^{n-1}(z) D^{-2}\left(W_n; \frac{1}{\phi(z)}\right) (1 - \phi^{-2}(z))^{-1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 + o(1)), \quad (3.54)$$

uniformemente sobre subconjuntos cerrados de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

(d) Existe  $\eta > 0$  tal que cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda a_n} q'(a_n x) W(a_n x) (1-x^2)^{1/4} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) \theta + 2\Gamma(W_n; \theta) - \frac{\pi}{4}\right) \\ &+ O(n^{-\eta}). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Para pesos  $W$  en los que  $Q$  es una función convexa en el intervalo  $\mathbb{I}$  (no necesariamente simétrico), la determinación del comportamiento asintótico de las normas está asociada a los números de Mhaskar-Rakhmanov-Saff (ver [23]).

Para  $n \geq 1$  sea  $\delta_n = \frac{1}{2}(a_n + |a_{-n}|)$ , denotemos por  $L_n : [a_{-n}, a_n] \rightarrow [-1, 1]$  la transformación lineal dada por  $L_n(z) = -1 + \frac{z-a_{-n}}{\delta_n}$ , y por  $L_n^{[-1]}$  a su inversa. Entonces,

TEOREMA 3.6. Sea  $\mathbb{I} = (c, d)$  intervalo acotado o no,  $0 \in I$ . Dada  $Q : \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty)$  con  $Q'$  creciente y absolutamente continua en  $\mathbb{I}$ ,  $Q'(0) = 0 = Q(0)$  y  $Q$  positiva en  $\mathbb{I} \setminus \{0\}$ . Asumamos también que para  $j = 0, 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow c^+} |Q^{(j)}(x)| = \infty = \lim_{x \rightarrow d^-} |Q^{(j)}(x)|.$$

Sean  $W = e^{-Q}$  y  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortonormales para  $W^2$ . Dados  $\lambda > 0$ ,  $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$  positiva sobre un conjunto de medida positiva, y  $\{q_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortonormales de Sobolev con respecto al producto interno (3.37). Entonces

(I)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left( q'_n - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} p_{n-1} \right) W \right\|_{L^2(I)} = 0. \quad (3.56)$$

Si, adicionalmente, asumimos que

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow c^+ \text{ ó } x \rightarrow d^-} \frac{Q''(x)}{(Q'(x))^2} < 1, \quad (3.57)$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left( 1 + |Q'| \right) \left( q_n - q_n(0) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x p_{n-1} \right) W \right\|_{L^2(I)} = 0. \quad (3.58)$$

(II) Sea

$$W_n(\theta) = W \left( L_n^{[-1]}(\cos \theta) \right), \quad \theta \in [-\pi, \pi]. \quad (3.59)$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\delta_n^{1/2} \left( q'_n - \frac{1}{\sqrt{\lambda} p_{n-1}} \right) \left( L_n^{[-1]}(z) \right)}{\phi^{n-1}(z) D^{-2} \left( W_n; \frac{1}{\phi(z)} \right)} \right| = 0, \quad (3.60)$$

uniformemente sobre subconjuntos cerrados de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . Sea

$$W_n^*(\theta) = \left( 1 + \left| Q' \left( L_n^{[-1]}(\cos \theta) \right) \right| \right) W(\theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi]. \quad (3.61)$$

Si asumimos (3.57), entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\delta_n^{1/2} \left( q_n(L_n(z)) - q_n(0) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{L_n(z)} p_{n-1} \right)}{\phi^n(z) D^{-2} \left( W_n^*; \frac{1}{\phi(z)} \right)} \right| = 0, \quad (3.62)$$

uniformemente sobre subconjuntos cerrados de  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

OBSERVACION 3.2.2.

- a) Obsérvese que, puesto que  $Q'$  crece hacia el infinito a medida que nos aproximamos a los puntos extremos del intervalo  $\mathbb{I}$ , (3.58) da un orden de convergencia para el límite.
- b) La restricción (3.57) es una condición de regularidad, en vez de una de crecimiento. Si no se asume esta restricción, se puede mostrar una versión de (3.58) en la que  $|Q'|$  se puede reemplazar por una función que crece más lentamente cuando nos aproximamos a los extremos del intervalo  $\mathbb{I}$ .
- c) Los resultados siguen siendo válidos asumiendo menos suavidad sobre  $Q$ , por ejemplo para pesos de Freud en la clase  $\mathcal{F}(\text{Dini})^\ddagger$ . También existe un resultado similar para pesos no pertenecientes a la clase de Freud  $\mathcal{F}$ , siempre y cuando se satisfaga que para cada  $\epsilon > 0$ ,

$$\frac{xQ'(x)}{Q(x)} = O(Q(x)^\epsilon)$$

cuando  $x$  se aproxima a los puntos extremos del intervalo de ortogonalidad. Sin embargo, estas formulaciones pueden volverse más técnicas.

- d) En (3.46) puede reemplazar  $\int_0^x p_{n-1}$  por  $\frac{p_n \gamma_{n-1}(W^2)}{(n \gamma_n(W^2))}$ , donde  $\gamma_n$  es el coeficiente principal de  $p_n$ , pero el término de error no es suficientemente bueno.

Finalmente, una de las herramientas esenciales en [23] es una estimación que relaciona el coeficiente principal  $\kappa_n$  del polinomio ortonormal de Sobolev  $q_n$  con el coeficiente principal  $\gamma_{n-1}(W^2)$  del polinomio

---

<sup>‡</sup>ver [23] y referencias allí sugeridas.

ortonormal con respecto al peso  $W^2$ ,  $p_{n-1}(W^2; x)$ . Su formulación involucra un error de aproximación en norma  $L^2$  con peso  $W$ :

$$E_n[f; W] = \inf\{\|(f - P)W\|_{L^2(\mathbb{I})} : \text{grad}(P) \leq n\} \quad (3.63)$$

y el operador lineal

$$I[R](x) = W^{-2}(x) \int_c^x R(t)W^2(t)\psi^2(t)dt, \quad x \in (c, d), \quad (3.64)$$

definido sobre clases de funciones  $R$ , adecuadamente restringidas.

**TEOREMA 3.7.** *Sean  $\mathbb{I}$  un intervalo (acotado o no) y  $W : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible tal que  $W^2$  tiene todos sus momentos finitos y denotemos mediante  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  la correspondiente sucesión de polinomios ortonormales. Dada  $\psi : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible tal que el producto interno asociado a  $(\psi W)^2$  tiene todos sus momentos finitos, y asumamos que  $\psi$  es positiva en un conjunto de medida positiva. Sean  $\lambda > 0$ , y  $\{q_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortonormales con respecto al producto interno (3.36), con coeficientes principales  $\{\kappa_n\}$ . Entonces*

$$0 \leq \left( \frac{\gamma_{n-1}(W^2)}{n\kappa_n} \right)^2 - \left[ \left( \frac{\gamma_{n-1}(W^2)}{n\gamma_n((\psi W)^2)} \right)^2 + \lambda \right] \leq \sup E_{n-2}^2[I[R]; W], \quad (3.65)$$

donde el supremo se considera sobre todos los polinomios  $R \in \mathbb{P}_{n-1}$  que satisfacen

$$\|RW\psi\|_{L^2(\mathbb{I})} = 1, \quad (3.66)$$

$$\int_{\mathbb{I}} R(W\psi)^2 = 0. \quad (3.67)$$

Para estimar el error de aproximación se necesita una estimación de tipo Jackson. Esta estimación reduce el segundo miembro de (3.65) a una cota sobre la derivada con peso  $I[R]'$ , y métodos estándar permiten probar la acotación con peso de  $I[R]'$ , al menos para pesos exponenciales.

**TEOREMA 3.8.** *Sean  $\mathbb{I} = (c, d)$  intervalo acotado o no,  $0 \in \mathbb{I}$  y  $Q : \mathbb{I} \rightarrow [0, \infty)$  con  $Q'$  creciente y absolutamente continua en  $\mathbb{I}$ ,  $Q'(0) = 0 = Q(0)$  y  $Q$*

positiva en  $\mathbb{I} \setminus \{0\}$ . Dados  $\lambda > 0$ ,  $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$  positiva sobre un conjunto de medida positiva. Asumamos también que existe una sucesión de números positivos  $\{\eta_n\}$  tales que  $W$  admite la estimación de Jackson

$$E_n[f; W] \leq \eta_n \|f'W\|_{L^2(\mathbb{I})} \quad (3.68)$$

para todo  $n \geq 1$  y toda función absolutamente continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces

$$\left| \left( \frac{\gamma_{n-1}(W^2)}{n\kappa_n} \right)^2 - \lambda \right| \leq \left( \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{I})} \frac{\gamma_{n-1}(W^2)}{n\gamma_n(W^2)} \right)^2 + C_1 \eta_{n-2}^2. \quad (3.69)$$

La constante  $C_1$  es independiente de  $n, \lambda$ , pero depende de  $W, \psi$ .

No obstante, son necesarias algunas restricciones sobre el crecimiento de  $\psi$  cerca de los puntos extremos del intervalo  $\mathbb{I}$ .

### Ejemplo

En los teoremas 3.5 y 3.6, se supone que  $\psi$  está acotada. A continuación, mostraremos que si  $\psi$  crece más rápido que  $\sqrt{Q}$  cerca de los puntos extremos de  $\mathbb{I}$ , entonces el límite (3.56) puede fallar. Obsérvese que

$$q'_n - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} p_{n-1} = \left[ \frac{n\kappa_n}{\gamma_{n-1}(W^2)} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right] p_{n-1} + S,$$

donde  $S \in \mathbb{P}_{n-2}$  y, por tanto,

$$\int_{\mathbb{I}} \left( q'_n(x) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} p_{n-1}(x) \right)^2 W^2(x) dx \geq \left[ \frac{n\kappa_n}{\gamma_{n-1}(W^2)} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right]^2. \quad (3.70)$$

Si  $W$  es el peso de Hermite

$$W(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

dado  $\Delta > 1$  y

$$\psi(x) = |x|^\Delta, \quad x \in \mathbb{R},$$

mostraremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \text{ par}} \frac{n\kappa_n}{\gamma_{n-1}(W^2)} = 0,$$

y, entonces, de (3.70) se deduce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \text{ par}} \int_{\mathbb{I}} \left( q'_n(x) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} p_{n-1}(x) \right)^2 W^2(x) dx \geq \frac{1}{\lambda} > 0,$$

por lo que (3.56) falla. Por la desigualdad izquierda en (3.65), tenemos

$$\frac{n\kappa_n}{\gamma_{n-1}(W^2)} \leq \frac{n\gamma_n((\psi W)^2)}{\gamma_{n-1}(W^2)}. \quad (3.71)$$

Podemos usar fórmulas explícitas para los coeficientes principales en el lado derecho de esta última desigualdad para mostrar que decae a 0. Primero ([63], págs. 105-105),

$$\gamma_n(W^2) = \pi^{-1/4} (2^n/n!)^{1/2}.$$

Luego,

$$(\psi W)^2(x) = |x|^{2\Delta} \exp(-x^2)$$

es la forma simetrizada del peso de Laguerre  $t^{-1/2+\Delta} \exp(-t)$ , bajo la transformación  $t = x^2$  en la integral que define la ortogonalidad. De las representaciones para polinomios de Laguerre ([63], págs. 100-101) para  $n = 2m$  se deduce,

$$\gamma_n((\psi W)^2) = \frac{1}{m!} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} + \Delta)} \frac{1}{\binom{m+\Delta-\frac{1}{2}}{m}} \right\}^{1/2}.$$

Sustituyendo estas representaciones en (3.71) y aplicando la fórmula de Stirling obtenemos que, para  $n$  par,

$$\frac{n\kappa_n}{\gamma_{n-1}(W^2)} \leq C(n^{1-\Delta})^{1/2}.$$

Nótese que  $C(n^{1-\Delta})^{1/2}$  decae a 0 si  $\Delta > 1$ .

### Aplicaciones

Como un ejemplo final, en [23] los autores utilizan el teorema 3.5 para el estudio de desarrollos en series de Fourier respecto a estas familias de polinomios ortonormales.



Sea  $W = e^{-Q}$  como en el teorema 3.5 y sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en casi todo punto, con  $\|f\|_S^2$  finita. Asumamos por simplicidad que  $\psi \equiv 1$ . Entonces considerando el desarrollo de Fourier-Sobolev de  $f$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle f, q_n \rangle_S q_n.$$

Se muestra que existe una relación entre los términos de la derivada de la serie anterior

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle f, q_n \rangle_S q'_n,$$

y los términos del desarrollo de Fourier estándar de  $f'$  con respecto a la base ortonormal  $\{p_n\}_{n \geq 0}$ . Más precisamente, se muestra que

$$\left\| \left[ \sum_{n=m}^{\infty} \langle f, q_n \rangle_S q'_n - \sum_{n=m-1}^{\infty} \left( \int_{\mathbb{R}} f' p_n W^2 \right) p_n \right] W \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_S \left( \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_n^2}{n^2} \right)^{1/2}, \tag{3.72}$$

donde  $C$  es una constante independiente de  $f$  y  $m$ . Si por ejemplo,  $Q(x) = |x|^\alpha$ ,  $\alpha > 2$ , entonces esta serie converge, y el segundo miembro de (3.72) es  $O\left(n^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}}\right)$ .

Para establecer (3.72), escribimos

$$\langle f, q_n \rangle_S q'_n = \langle f, q_n \rangle_S \left[ q'_n - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} p_{n-1} \right] + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \langle f, q_n \rangle_S p_{n-1}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \langle f, q_n \rangle_S p_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left( \int_{\mathbb{R}} f q_n W^2 \right) p_{n-1} \\ &+ \sqrt{\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}} f' \left[ q'_n - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} p_{n-1} \right] W^2 \right) p_{n-1} + \left( \int_{\mathbb{R}} f' p_{n-1} W^2 \right) p_{n-1}. \end{aligned}$$

Usando estas dos últimas igualdades, podemos ver que el primer miem-

bro de (3.72) está acotado superiormente por

$$\begin{aligned} & \sum_{n=m}^{\infty} |\langle f, q_n \rangle_S| \left\| \left[ q'_n - \frac{1}{\lambda} p_{n-1} \right] W \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{\lambda} \left( \sum_{n=m}^{\infty} \left[ \int_{\mathbb{R}} f q_n W^2 \right]^2 \right)^{1/2} \\ & + \sqrt{\lambda} \left( \sum_{n=m}^{\infty} \left[ \int_{\mathbb{R}} f' \left[ q'_n - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} p_{n-1} \right] W^2 \right]^2 \right)^{1/2} \\ & := T_1 + T_2 + T_3. \end{aligned}$$

De acuerdo con (3.45), la desigualdad triangular y la desigualdad de Bessel, se tiene

$$\begin{aligned} T_1 & \leq C \left( \sum_{n=m}^{\infty} |\langle f, q_n \rangle_S|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_n^2}{n^2} \right)^{1/2} \\ & \leq C \langle f, f \rangle_S^{1/2} \left( \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_n^2}{n^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Usando que

$$\int_{\mathbb{I}} q_n^2 W^2 \leq 1 - \lambda \left( n \frac{\kappa_n}{\gamma_{n-1}(W^2)} \right)^2, \quad (3.73)$$

$$\left| \left( \frac{\gamma_{n-1}(W^2)}{n \kappa_n} \right)^2 - \lambda \right| = O \left( \frac{a_n}{n} \right)^2, \quad (3.74)$$

se puede mostrar que

$$\left[ \int_{\mathbb{R}} f q_n W^2 \right]^2 \leq \left[ \int_{\mathbb{R}} f^2 W^2 \right] \left[ \int_{\mathbb{R}} q_n^2 W^2 \right] \leq \|f\|_S^2 C \left( \frac{a_n}{n} \right)^2.$$

Entonces  $T_2$  admite una estimación similar a  $T_1$ . Finalmente, como

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\mathbb{R}} f' \left[ q'_n - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} p_{n-1} \right] W^2 \right]^2 & \leq \left[ \int_{\mathbb{R}} (f')^2 W^2 \right] \left[ \int_{\mathbb{R}} \left[ q'_n - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} p_{n-1} \right]^2 W^2 \right] \\ & \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_S^2 C \left( \frac{a_n}{n} \right)^2, \end{aligned}$$

por (3.45) nuevamente,  $T_3$  también admite una estimación similar a la hecha para  $T_1$ . De las estimaciones para  $T_1, T_2$  y  $T_3$  se deduce (3.72).

### 3.2.2 Polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev. Un caso no diagonal

Consideremos el siguiente producto interno de Sobolev

$$\langle p, q \rangle = \int_{\mathbb{R}} p(x)q(x)d\mu(x) + \mathbb{P}(c)^t A \mathbb{Q}(c), \quad (3.75)$$

donde  $d\mu$  es una medida de probabilidad no trivial con soporte sobre la recta real,  $A \in \mathbb{R}^{(k,k)}$  es una matriz semi-definida positiva,  $p, q$  son polinomios con coeficientes reales, y  $\mathbb{Q}(c) = (q(c), q'(c), \dots, q^{(k-1)}(c))^t$  fueron introducidos en [2].

Cuando  $A = \text{diag}(M_0, M_1, \dots, M_{k-1})$ , el producto interno anterior es denominado de tipo Sobolev diagonal, muchos investigadores han estado interesados en las propiedades analíticas de los polinomios ortogonales con respecto a (3.75). En particular, R. Koekoek [39] estudió la ecuación diferencial lineal de segundo orden satisfecha por tales polinomios ortogonales cuando  $d\mu = x^\alpha e^{-x} dx$ ,  $\alpha > -1$ , y  $c = 0$ . Estos polinomios también satisfacen relaciones de recurrencia de orden superior y también pueden ser representados como funciones hipergeométricas.

Para  $k = 2$  y  $M_0, M_1 > 0$ , en [40] los autores centran su atención en la localización de ceros de tales polinomios ortogonales, los cuales son denominados polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev. Finalmente, el análisis de sus propiedades asintóticas fue hecho en [5] y en [46].

Cuando  $k \geq 2$  si  $d\mu = x^\alpha e^{-x} dx$ ,  $c = 0$ ,  $M_0 = M_1 = \dots = M_{k-2} = 0$  y  $M_{k-1} > 0$  entonces problemas análogos son estudiados en [56] en el contexto de la distribución de ceros. Desde un punto de vista algebraico y para medidas más generales, en [49] los autores tratan con representaciones de polinomios ortogonales de tipo Sobolev en términos de polinomios ortogonales con respecto a la medida  $\mu$ , asumiendo las mismas restricciones para el producto interno (3.75).

El primer caso de un producto interno de tipo Sobolev no diagonal como (3.75) fue considerado en [3]. En este trabajo los autores consideran la medida  $d\mu = e^{-x^2} dx$  soportada sobre  $\mathbb{R}$ ,  $c = 0$ , y  $k = 2$ . En particular, analizan la asintótica escalada para los correspondientes polinomios ortogonales (fórmulas de Mehler-Heine) y, como una consecuencia, obtienen el comportamiento asintótico de sus ceros.

Tomando en cuenta que los polinomios generalizados de Hermite aparecen como consecuencia del proceso de simetrización para los polinomios ortogonales de Laguerre ([12], [63]) parece ser natural analizar las sucesiones de polinomios ortogonales con respecto al producto interno (3.75) cuando  $d\mu = x^\alpha e^{-x} dx$ ,  $A \in \mathbb{R}^{(k,k)}$  es una matriz semi-definida positiva no diagonal con  $k \geq 2$ , y  $c = 0$ .

En [16] tal estudio es hecho para el caso  $k = 2$ , generalizando algunos resultados conocidos para el caso diagonal (ver [5], [15], y [40]) también en este trabajo se da una bonita interpretación de los resultados de [3] usando un proceso de simetrización de los polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev considerados.

**DEFINICION 3.10.** Sean  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión de números reales y  $\mu$  un funcional lineal definido en el espacio  $\mathbb{P}$ , tales que

$$\langle \mu, x^n \rangle = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$\mu$  es denominado **funcional de momentos** asociado a  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ . En este caso,  $\mu_n$  es el  $n$ -ésimo momento del funcional  $\mu$ .

**DEFINICION 3.11.** Dado un funcional de momentos  $\mu$ , una sucesión de polinomios  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  se dice sucesión de polinomios ortogonales con respecto a  $\mu$  si

- (i) El grado de  $P_n$  es  $n$ .
- (ii)  $\langle \mu, P_n(x)P_m(x) \rangle = 0$ ,  $m \neq n$ .
- (iii)  $\langle \mu, P_n^2(x) \rangle \neq 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

**TEOREMA 3.9.** (Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de funcionales de momentos). ([12]) Sea  $\mu$  el funcional de momentos asociado con  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ . Existe una sucesión de polinomios ortogonales mónicos  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  asociada con  $\mu$  si y sólo si la submatrices principales de la matriz de Hankel  $[\mu_{i+j}]_{i,j \in \mathbb{N}}$  son no singulares.

Un funcional de momentos para el cual existe la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales se denomina **regular** o **cuasi-definido** ([12]).

PROPOSICION 3.2.1. (*Fórmula de Christoffel-Darboux*). Sea  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión de polinomios ortogonales mónicos. Si denotamos el  $n$ -ésimo núcleo polinomial por

$$K_n(x, y) = \sum_{j=0}^n \frac{P_j(y)P_j(x)}{\langle \mu, P_j^2 \rangle},$$

entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$K_n(x, y) = \frac{1}{\langle \mu, P_n^2 \rangle} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x - y}. \quad (3.76)$$

La demostración de esta proposición puede consultarse en [12], [36] y [63], entre otros.

La siguiente notación para las derivadas parciales del núcleo  $K_n(x, y)$

$$\frac{\partial^{j+k}(K_n(x, y))}{\partial^j x \partial^k y} = K_n^{(j,k)}(x, y),$$

permite presentar algunas propiedades de tales derivadas. Dada  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión de polinomios ortogonales mónicos. Por la fórmula de Christoffel-Darboux (3.76), tenemos

$$K_{n-1}(x, y) = \frac{1}{\langle \mu, P_{n-1}^2 \rangle} \frac{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)}{x - y}.$$

El cálculo de  $j$ -ésima derivada parcial con respecto a  $y$  produce

$$K_{n-1}^{(0,j)}(x, y) = \frac{1}{\langle \mu, P_{n-1}^2 \rangle} \left( P_n(x) \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left( \frac{P_{n-1}(y)}{x - y} \right) - P_{n-1}(x) \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left( \frac{P_n(y)}{x - y} \right) \right). \quad (3.77)$$

Usando la regla de Leibnitz

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j} \left( \frac{P_n(y)}{x - y} \right) = \sum_{k=0}^j \frac{j!}{k!} \frac{P_n^{(k)}(y)}{(x - y)^{j-k+1}},$$

y reemplazando esta última expresión en (3.77), se obtiene

$$\begin{aligned}
K_{n-1}^{(0,j)}(x,y) &= \frac{1}{\langle \mu, P_{n-1}^2 \rangle} \left( P_n(x) \sum_{k=0}^j \frac{j!}{k!} \frac{P_{n-1}^{(k)}(y)}{(x-y)^{j-k+1}} \right) \\
&\quad - \frac{1}{\langle \mu, P_{n-1}^2 \rangle} \left( P_{n-1}(x) \sum_{k=0}^j \frac{j!}{k!} \frac{P_n^{(k)}(y)}{(x-y)^{j-k+1}} \right) \\
&= \frac{j!}{\langle \mu, P_{n-1}^2 \rangle (x-y)^{j+1}} \left( P_n(x) \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} P_{n-1}^{(k)}(y) (x-y)^k \right) \\
&\quad - \frac{j!}{\langle \mu, P_{n-1}^2 \rangle (x-y)^{j+1}} \left( P_{n-1}(x) \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} P_n^{(k)}(y) (x-y)^k \right).
\end{aligned}$$

Consecuentemente,

PROPOSICION 3.2.2. ([49]) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$K_{n-1}^{(0,j)}(x,0) = \frac{j!}{\langle \mu, P_{n-1}^2 \rangle x^{j+1}} (P_n(x)Q_j(x,0;P_{n-1}) - P_{n-1}(x)Q_j(x,0;P_n)) \quad (3.78)$$

donde  $Q_j(x,0;P_{n-1})$  y  $Q_j(x,0;P_n)$  denotan los polinomios de Taylor de grado  $j$  de los polinomios  $P_{n-1}$  y  $P_n$  alrededor de  $x=0$ , respectivamente.

Como se mencionó en el capítulo 1, los polinomios ortogonales de Laguerre están definidos como los polinomios ortogonales con respecto al producto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty pqx^\alpha e^{-x} dx, \quad \alpha > -1, \quad p, q \in \mathbb{P}. \quad (3.79)$$

Resumiremos algunas de las propiedades de los polinomios ortogonales mónicos de Laguerre que utilizaremos en esta sección.

PROPOSICION 3.2.3. ([12],[63]). Sea  $\{L_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Laguerre.

1. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$xL_n^\alpha(x) = L_{n+1}^\alpha(x) + (2n+1+\alpha)L_n^\alpha(x) + n(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x), \quad (3.80)$$

con  $L_0^\alpha(x) = 1, L_1^\alpha(x) = x - (\alpha + 1)$ .

2. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$L_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+1}(x) + nL_{n-1}^{\alpha+1}(x). \quad (3.81)$$

3. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|L_n^\alpha\|_\alpha^2 = n!\Gamma(n + \alpha + 1). \quad (3.82)$$

4. Para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$L_n^\alpha(0) = (-1)^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)}. \quad (3.83)$$

5. Para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$(L_n^\alpha)'(x) = nL_{n-1}^{\alpha+1}(x). \quad (3.84)$$

6. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x(L_n^\alpha(x))' = nL_n^\alpha(x) + n(n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(x). \quad (3.85)$$

En particular, para los polinomios de Laguerre tenemos

PROPOSICION 3.2.4. Para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$K_{n-1}(x, 0) = \frac{L_{n-1}^\alpha(0)L_{n-1}^{\alpha+1}(x)}{(n-1)!\Gamma(n + \alpha)}, \quad (3.86)$$

$$K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0) = \frac{(-1)^n}{(n-2)!\Gamma(\alpha + 2)}L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \frac{(-1)^nn}{(n-2)!\Gamma(\alpha + 2)}L_{n-2}^{\alpha+2}(x), \quad (3.87)$$

$$K_{n-1}^{(1,1)}(x, 0) = \frac{(-1)^n(n-1)}{(n-2)!\Gamma(\alpha + 2)}L_{n-2}^{\alpha+3}(x) + \frac{(-1)^nn}{(n-3)!\Gamma(\alpha + 2)}L_{n-3}^{\alpha+3}(x). \quad (3.88)$$

**Demostración.** La demostración de (3.86) aparece en [14]. Para (3.87) ver [15]. Finalmente, (3.88) es consecuencia de (3.87) y (3.81). ■

Usando (3.82) y (3.83) en (3.86), (3.87), y (3.88) se obtiene

PROPOSICION 3.2.5. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$K_{n-1}(0, 0) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{(n - 1)! \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + 2)}, \quad (3.89)$$

$$K_{n-1}^{(1,0)}(0, 0) = -\frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{(n - 2)! \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + 3)} = -\frac{n - 1}{\alpha + 2} K_{n-1}(0, 0), \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} K_{n-1}^{(1,1)}(0, 0) &= \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) (n(\alpha + 2) - (\alpha + 1))}{(n - 2)! \Gamma(\alpha + 2) \Gamma(\alpha + 4)} \\ &= \frac{(n(\alpha + 2) - (\alpha + 1)) (n - 1)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)} K_{n-1}(0, 0). \end{aligned} \quad (3.91)$$

TEOREMA 3.10. (Fórmula de tipo Mehler-Heine, [16]).

Dada  $J_\alpha$  la función de Bessel de primera especie definida por

$$J_\alpha(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (x/2)^{2j+\alpha}}{j! \Gamma(j + \alpha + 1)},$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/(n+j))}{n^\alpha} = x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}) \quad (3.92)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$  y uniformemente en  $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Donde  $\widehat{L}_n^\alpha(x) = (-1)^n/n! L_n^\alpha(x)$ .

### Comportamiento asintótico

Si  $p \in \mathbb{P}$  denotaremos por

$$\mathbb{P}(x) = \begin{pmatrix} p(x) \\ p'(x) \end{pmatrix}.$$

Dados  $p, q \in \mathbb{P}$ , definimos el siguiente producto interno de tipo Sobolev

$$\langle p, q \rangle_S = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + \mathbb{P}(0)^t A \mathbb{Q}(0), \quad \alpha > -1, \quad (3.93)$$

donde



$$A = \begin{pmatrix} M_0 & \lambda \\ \lambda & M_1 \end{pmatrix},$$

$M_0, M_1 \geq 0$ ,  $A$  es una matriz semi-definida positiva, es decir,  $\det A = |A| \geq 0$ . Obsérvese que  $M_0 = 0$ ,  $M_1 > 0$  ó  $M_1 = 0$ ,  $M_0 > 0$  implican que  $\lambda = 0$ . Estas situaciones han sido consideradas en [5], [14], [15].

Sea  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a (3.93). Consideremos el desarrollo de Fourier de  $\tilde{L}_n^\alpha$  en términos de la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Laguerre  $\{L_n^\alpha\}_{n \geq 0}$

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} L_k^\alpha(x),$$

donde

$$a_{n,k} = \frac{\langle \tilde{L}_n^\alpha(x), L_k^\alpha(x) \rangle_\alpha}{\|L_k^\alpha\|_\alpha^2}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

De (3.93), se deduce

$$a_{n,k} = -\frac{\left(\tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0)\right)^t A \mathbb{L}_k^\alpha(0)}{\|L_k^\alpha\|_\alpha^2}.$$

Como una consecuencia;

$$\begin{aligned} \tilde{L}_n^\alpha(x) &= L_n^\alpha(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0)\right)^t A \mathbb{L}_k^\alpha(0)}{\|L_k^\alpha\|_\alpha^2} L_k^\alpha(x) \\ &= L_n^\alpha(x) - \left(\tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0)\right)^t A \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbb{L}_k^\alpha(0) L_k^\alpha(x)}{\|L_k^\alpha\|_\alpha^2}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) - \left(\tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0)\right)^t A \begin{pmatrix} K_{n-1}(x, 0) \\ K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0) \end{pmatrix}. \quad (3.94)$$

De la expresión (3.94) obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{L}_n^\alpha(0) &= L_n^\alpha(0) - \left(\tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0)\right)^t A \begin{pmatrix} K_{n-1}(0,0) \\ K_{n-1}^{(0,1)}(0,0) \end{pmatrix}, \\ \left(\tilde{L}_n^\alpha\right)'(0) &= \left(L_n^\alpha\right)'(0) - \left(\tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0)\right)^t A \begin{pmatrix} K_{n-1}^{(1,0)}(0,0) \\ K_{n-1}^{(1,1)}(0,0) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

De manera que

$$\left(\tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0)\right)^t = \left(\mathbb{L}_n^\alpha(0)\right)^t - \left(\tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0)\right)^t A \mathbb{K}_{n-1}(0,0), \quad (3.95)$$

donde

$$\mathbb{K}_{n-1}(0,0) = \begin{pmatrix} K_{n-1}(0,0) & K_{n-1}^{(1,0)}(0,0) \\ K_{n-1}^{(0,1)}(0,0) & K_{n-1}^{(1,1)}(0,0) \end{pmatrix}.$$

Usando (3.95) se obtiene

$$\left(\tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0)\right)^t (I + A \mathbb{K}_{n-1}(0,0)) = \left(\mathbb{L}_n^\alpha(0)\right)^t, \quad (3.96)$$

donde  $I$  la matriz identidad de orden  $2 \times 2$ . Obsérvese que

$$I + A \mathbb{K}_{n-1}(0,0)$$

$$\begin{aligned}&= K_{n-1}(0,0) \begin{pmatrix} \frac{1}{K_{n-1}(0,0)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_{n-1}(0,0)} \end{pmatrix} \\ &\quad + A K_{n-1}(0,0) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n-1}{\alpha+2} \\ -\frac{n-1}{\alpha+2} & \frac{(n(\alpha+2) - (\alpha+1))(n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \end{pmatrix} \\ &= K_{n-1}(0,0) \begin{pmatrix} G_n & H_n \\ J_n & K_n \end{pmatrix},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 G_n &= \frac{1}{K_{n-1}(0,0)} + \left( M_0 + \frac{\lambda}{\alpha+2} \right) - \frac{n\lambda}{\alpha+2}, \\
 H_n &= \frac{\lambda n^2}{(\alpha+1)(\alpha+3)} - \left( \frac{M_0}{\alpha+2} + \frac{(2\alpha+3)\lambda}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \right) n \\
 &\quad + \left( \frac{M_0}{\alpha+2} + \frac{\lambda}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \right), \\
 J_n &= -\frac{M_1}{\alpha+2} n + \left( \lambda + \frac{M_1}{\alpha+2} \right), \\
 K_n &= \frac{M_1 n^2}{(\alpha+1)(\alpha+3)} - \left( \frac{\lambda}{\alpha+2} + \frac{(2\alpha+3)M_1}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \right) n \\
 &\quad + \left( \frac{\lambda}{\alpha+2} + \frac{M_1}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \right) + \frac{1}{K_{n-1}(0,0)}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 |I + AK_{n-1}(0,0)| &= (K_{n-1}(0,0))^2 \\
 &\times \left\{ \frac{1}{(K_{n-1}(0,0))^2} + \frac{1}{K_{n-1}(0,0)} \text{traza} \left[ A \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n-1}{\alpha+2} \\ -\frac{n-1}{\alpha+2} & \frac{(n(\alpha+2) - (\alpha+1))(n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \end{pmatrix} \right] \right\} \\
 &+ |A| \left\{ \left( \frac{(n(\alpha+2) - (\alpha+1))(n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{(n-1)^2}{(\alpha+2)^2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + K_{n-1}(0, 0) \left( M_1 \frac{(n(\alpha+2) - (\alpha+1))(n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{2\lambda}{\alpha+2}(n-1) + M_0 \right) \\
&\quad + |A| \frac{n-1}{\alpha+2} \left( \frac{(n(\alpha+2) - (\alpha+1))}{(\alpha+1)(\alpha+3)} - \frac{n-1}{\alpha+2} \right) (K_{n-1}(0, 0))^2 \\
&= 1 + K_{n-1}(0, 0) \left( M_1 \frac{(n(\alpha+2) - (\alpha+1))(n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{2\lambda}{\alpha+2}(n-1) + M_0 \right) \\
&\quad + (K_{n-1}(0, 0))^2 |A| \frac{n-1}{\alpha+2} \left( \frac{n}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \right).
\end{aligned}$$

Luego, si  $|A| > 0$  tenemos que

$$|I + AK_{n-1}(0, 0)| \sim \frac{|A| n^{2\alpha+4}}{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)(\Gamma(\alpha+1))^2(\Gamma(\alpha+2))^2}, \quad (3.97)$$

y si  $|A| = 0, M_1 > 0$ ,

$$|I + AK_{n-1}(0, 0)| \sim \frac{n^{\alpha+3} M_1}{(\alpha+1)(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)}. \quad (3.98)$$

Usando (3.94) y (3.96) se obtiene

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_n^\alpha(x) &= L_n^\alpha(x) \\
&\quad - (\mathbb{L}_n^\alpha(0))^t (I + AK_{n-1}(0, 0))^{-1} A \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}(\alpha+1)}{(n-1)!\Gamma(\alpha+2)} & 0 \\ \frac{(-1)^n}{(n-2)!\Gamma(\alpha+2)} & \frac{(-1)^n}{(n-2)!\Gamma(\alpha+2)} \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{pmatrix} \\
&= L_n^\alpha(x) - \frac{(-1)^n}{(n-2)!\Gamma(\alpha+2)K_{n-1}(0, 0)} \begin{pmatrix} (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \\ (-1)^{n-1} \frac{n\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)} \end{pmatrix}^t \\
&\quad \times \begin{pmatrix} G_n & H_n \\ J_n & K_n \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -\frac{\alpha+1}{n-1} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} \tilde{L}_n^\alpha(x) &= L_n^\alpha(x) + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{n}{\alpha+1} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} G_n & H_n \\ J_n & K_n \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -(\alpha+1) & 0 \\ n-1 & n-1 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Además, si denotamos

$$M_n = \begin{pmatrix} G_n & H_n \\ J_n & K_n \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$M_n^{-1} = \frac{1}{|M_n|} \begin{pmatrix} K_n & -H_n \\ -J_n & G_n \end{pmatrix},$$

donde

$$|M_n| = \frac{1}{(K_{n-1}(0,0))^2} |I + A\mathbb{K}_{n-1}(0,0)|.$$

Por tanto, de (3.99), tras algunos cálculos se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{L}_n^\alpha(x) &= L_n^\alpha(x) + \frac{1}{|M_n|} \begin{pmatrix} \tilde{A}_n n^2 + B_n n + C_n \\ \tilde{A}'_n n^2 + B'_n n + C'_n \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{pmatrix}, \\ &\hspace{15em} (3.100) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_n &= \frac{2|A|}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \frac{M_1}{(\alpha+1)K_{n-1}(0,0)}, \\
B_n &= \frac{2\alpha|A|}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{2\lambda}{K_{n-1}(0,0)} - \frac{M_1}{(\alpha+1)K_{n-1}(0,0)}, \\
\tilde{A}'_n &= \frac{|A|}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{M_1}{(\alpha+1)K_{n-1}(0,0)}, \\
B'_n &= \frac{\alpha|A|}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{\lambda}{K_{n-1}(0,0)} - \frac{M_1}{(\alpha+1)K_{n-1}(0,0)}, \\
C_n &= \frac{-2|A|}{(\alpha+2)(\alpha+3)} + \frac{\lambda + (\alpha+1)M_0}{K_{n-1}(0,0)}, \\
C'_n &= \frac{-|A|}{(\alpha+2)} + \frac{\lambda}{K_{n-1}(0,0)}.
\end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned}
\widehat{L}_n^\alpha(x) &= \frac{(-1)^n}{n!} L_n^\alpha(x) \\
\widehat{\widetilde{L}}_n^\alpha(x) &= \frac{(-1)^n}{n!} \widetilde{L}_n^\alpha(x),
\end{aligned}$$

entonces, de (3.100) se deduce

$$\begin{aligned}
\widehat{\widetilde{L}}_n^\alpha(x) &= \widehat{L}_n^\alpha(x) + \frac{1}{|M_n|} \begin{pmatrix} \tilde{A}_n n^2 + B_n n + C_n \\ \tilde{A}'_n n^2 + B'_n n + C'_n \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -\frac{1}{n} \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ \frac{1}{n(n-1)} \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{pmatrix} \\
&= \widehat{L}_n^\alpha(x) + \frac{1}{|M_n|} \begin{pmatrix} \tilde{A}_n n + B_n + \frac{C_n}{n} \\ \tilde{A}'_n n + B'_n + \frac{C'_n}{n} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ \frac{1}{n-1} \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Por otro lado, como

$$\begin{aligned}
|M_n| &= \frac{1}{(K_{n-1}(0,0))^2} + \frac{1}{(K_{n-1}(0,0))} \left( \frac{M_1}{(\alpha+1)(\alpha+3)} n^2 + Rn + T \right) \\
&\quad + |A| \left( \frac{n^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)} + R'n + T' \right), \tag{3.102}
\end{aligned}$$

donde  $R, T, R'$ , y  $T'$  dependen sólo de  $M_0, M_1, \lambda$ , y  $\alpha$ , asumiendo que  $|A| > 0$ , obtenemos

$$|M_n| \sim \frac{|A|}{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)} n^2.$$

Por tanto,

$$\widehat{L}_n^\alpha(x) \sim \widehat{L}_n^\alpha(x) + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)}{n^2|A|} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_n n + B_n + \frac{C_n}{n} \\ \widetilde{A}'_n n + B'_n + \frac{C'_n}{n} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ \frac{1}{n-1} \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{pmatrix}.$$

Como una consecuencia, para  $x \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} &\sim 1 + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)}{n^2|A|} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_n n + B_n + \frac{C_n}{n} \\ \widetilde{A}'_n n + B'_n + \frac{C'_n}{n} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -\frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} \\ \frac{1}{n-1} \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} \end{pmatrix} \\ &= 1 + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)}{|A|} \begin{pmatrix} \frac{\widetilde{A}_n}{n} + \frac{B_n}{n^2} + \frac{C_n}{n^3} \\ \frac{\widetilde{A}'_n}{n} + \frac{B'_n}{n^2} + \frac{C'_n}{n^3} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -\frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} \\ \frac{1}{n-1} \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{(l-j)/2} \widehat{L}_{n+k}^{\alpha+j}(x)}{\widehat{L}_{n+h}^{\alpha+l}(x)} = (-x)^{-(j-l)/2}, \quad (3.103)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ , donde  $j, l \in \mathbb{R}$ ,  $h, k \in \mathbb{Z}$ , (ver [5]) entonces

$$\frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{L_n^\alpha(x)} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .

Por otro lado, si  $|A| = 0$ ,  $M_1 > 0$ , de (3.101) y (3.102)

$$\widehat{L}_n^\alpha(x) = \widehat{L}_n^\alpha(x) + \frac{1}{C(n, M_1, \alpha, R, T)} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_n n + B_n + \frac{C_n}{n} \\ \widetilde{A}'_n n + B'_n + \frac{C'_n}{n} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ \frac{1}{n-1} \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{pmatrix}.$$

donde  $C(n, M_1, \alpha, R, T) = \frac{1}{(K_{n-1}(0,0))^2} + \frac{1}{(K_{n-1}(0,0))} \left( \frac{M_1}{(\alpha+1)(\alpha+3)} n^2 + Rn + T \right)$ .  
Luego, para  $x \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$

$$\frac{\widehat{L}_n^\alpha(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} \sim 1 + \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)K_{n-1}(0,0)}{M_1} \begin{pmatrix} \frac{\widetilde{A}_n}{n} + \frac{B_n}{n^2} + \frac{C_n}{n^3} \\ \frac{\widetilde{A}'_n}{n} + \frac{B'_n}{n^2} + \frac{C'_n}{n^3} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -\frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} \\ \frac{1}{n-1} \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} K_{n-1}(0,0)\widetilde{A}_n &= \frac{M_1}{\alpha+1}, \\ K_{n-1}(0,0)\widetilde{A}'_n &= \frac{M_1}{\alpha+1}, \\ K_{n-1}(0,0)B_n &= -2\lambda - \frac{M_1}{\alpha+1}, \\ K_{n-1}(0,0)B'_n &= -\lambda - \frac{M_1}{\alpha+1}, \\ K_{n-1}(0,0)C_n &= \lambda + (\alpha+1)M_0, \\ K_{n-1}(0,0)C'_n &= \lambda, \end{aligned}$$

deducimos

$$\frac{\widehat{L}_n^\alpha(x)}{\widehat{L}_n^\alpha(x)} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ . Así pues, se obtiene la siguiente asintótica relativa exterior:

TEOREMA 3.11.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(x)}{L_n^\alpha(x)} = 1 \quad (3.104)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .



Para encontrar la correspondiente fórmula de Mehler-Heine para los polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev  $\tilde{L}_n^\alpha(x)$ , supondremos, en primer lugar, que  $|A| > 0$ . Por tanto, de (3.103) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\tilde{L}}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} &\sim \\ \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)}{n^{\alpha+2}|A|} &\begin{pmatrix} \tilde{A}_n n + B_n + \frac{C_n}{n} \\ \tilde{A}'_n n + B'_n + \frac{C'_n}{n} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x/n) \\ \frac{1}{n-1}\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x/n) \end{pmatrix} \\ = \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)}{|A|} &\begin{pmatrix} \tilde{A}_n + \frac{B_n}{n} + \frac{C_n}{n^2} \\ \tilde{A}'_n + \frac{B'_n}{n} + \frac{C'_n}{n^2} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -\frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x/n)}{n^{\alpha+1}} \\ \frac{n}{n-1}\frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x/n)}{n^{\alpha+2}}, \end{pmatrix} \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{\tilde{L}}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} &= x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}) \\ &+ \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)}{|A|} \begin{pmatrix} \frac{2|A|}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \\ \frac{|A|}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \end{pmatrix}^t \\ &\times \begin{pmatrix} x^{-(\alpha+1)/2} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) \\ x^{-(\alpha+2)/2} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ . Por tanto, el segundo miembro de la ecuación anterior es

$$x^{-\alpha/2} \left( J_\alpha(2\sqrt{x}) - 2(\alpha+2)x^{-1/2} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) + (\alpha+2)(\alpha+3)x^{-1} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \right),$$

donde  $J_\alpha$  es la función de Bessel de primera especie, y como

$$J_\alpha(2\sqrt{x}) + J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) = \frac{\alpha+1}{\sqrt{x}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}),$$

entonces

$$x^{-\alpha/2} \left[ J_\alpha(2\sqrt{x}) - 2(\alpha+2)x^{-1/2} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) + (\alpha+2)(\alpha+3)x^{-1} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= x^{-\alpha/2} \left[ -\frac{(\alpha+3)}{\sqrt{x}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) + \left( \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{x} - 1 \right) J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \right] \\
&= x^{-\alpha/2} \left[ -\frac{(\alpha+3)}{\sqrt{x}} \left( \frac{\alpha+2}{\sqrt{x}} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) - J_{\alpha+3}(2\sqrt{x}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{x} - 1 \right) J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \right] \\
&= x^{-\alpha/2} \left[ \frac{(\alpha+3)}{\sqrt{x}} J_{\alpha+3}(2\sqrt{x}) - J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \right] \\
&= x^{-\alpha/2} J_{\alpha+4}(2\sqrt{x}).
\end{aligned}$$

En conclusión, obtenemos la siguiente fórmula de Mehler-Heine

**TEOREMA 3.12.** *Sea  $\left\{ \widehat{L}_n^\alpha \right\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales con respecto a (3.93) y  $|A| > 0$ . Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} = x^{-\alpha/2} J_{\alpha+4}(2\sqrt{x}), \quad (3.105)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ .

Este resultado coincide con el obtenido en [46] para el caso diagonal,  $M_0, M_1 > 0$ .

Ahora, encontraremos la fórmula de Mehler-Heine cuando  $|A| = 0$ ,  $M_1 > 0$ . De (3.100),

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} &= \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} \\
&+ \frac{1}{C(n, M_1, \alpha, R, T)} \begin{pmatrix} \widetilde{A}_n n + B_n + \frac{C_n}{n} \\ \widetilde{A}'_n n + B'_n + \frac{C'_n}{n} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -n \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x/n)}{n^{\alpha+1}} \\ \frac{n}{n-1} \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x/n)}{n^{\alpha+2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} \\
&+ \frac{1}{C(n, M_1, \alpha, R, T)} \begin{pmatrix} -\widetilde{A}_n n^2 - B_n n - C_n \\ \frac{n}{n-1} (\widetilde{A}'_n n^2 + B'_n n + C'_n) \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -\frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+1}(x/n)}{n^{\alpha+1}} \\ \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x/n)}{n^{\alpha+2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}) + \begin{pmatrix} -(\alpha+3) \\ \alpha+3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -x^{-(\alpha+1)/2} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) \\ x^{-(\alpha+2)/2} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \end{pmatrix}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ , donde

$$C(n, M_1, \alpha, R, T) = \frac{1}{(K_{n-1}(0,0))^2} + \frac{1}{(K_{n-1}(0,0))} \left( \frac{M_1}{(\alpha+1)(\alpha+3)} n^2 + Rn + T \right).$$

Así pues,

TEOREMA 3.13. Sea  $\left\{ \widehat{L}_n^\alpha \right\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales con respecto a (3.93) y asumamos  $|A| = 0, M_1 > 0$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_n^\alpha(x/n)}{n^\alpha} = x^{-\alpha/2} \left( J_\alpha(2\sqrt{x}) - \frac{\alpha+3}{\sqrt{x}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) + \frac{\alpha+3}{x} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) \right),$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ .

Si  $M_0 = 0$  y  $\lambda = 0$  el resultado anterior coincide con el obtenido en [5] y [15].

Para encontrar una fórmula asintótica fuerte escalada expresaremos el polinomio ortogonal de tipo Laguerre-Sobolev  $\widetilde{L}_n^\alpha(x)$  como una combinación lineal de los polinomios mónicos de Laguerre  $L_n^{\alpha+2}(x), L_{n-1}^{\alpha+2}(x)$  y  $L_{n-2}^{\alpha+2}(x)$ . Sustituyendo (3.86) y (3.87) en (3.94)

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_n^\alpha(x) &= L_n^\alpha(x) - \left( \widetilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0) \right)^t A \begin{pmatrix} K_{n-1}(x, 0) \\ K_{n-1}^{(0,1)}(x, 0) \end{pmatrix} \\ &= L_n^\alpha(x) \\ &\quad - \left( \widetilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0) \right)^t A \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! \Gamma(\alpha+1)} L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ \frac{(-1)^n}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2)} L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \frac{(-1)^n n}{(n-2)! \Gamma(\alpha+2)} L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{pmatrix} \\ &= L_n^\alpha(x) \\ &\quad - \frac{(-1)^n}{(n-2)! \Gamma(\alpha+1)} \left( \widetilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0) \right)^t A \begin{pmatrix} -\frac{1}{n-1} L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \\ \frac{1}{(\alpha+1)} L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \frac{n}{\alpha+1} L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De (3.81) se tiene

$$\begin{aligned}
& \tilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^\alpha(x) \\
& - \frac{(-1)^n}{(n-2)!\Gamma(\alpha+1)} \left( \tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0) \right)^t A \left( \begin{array}{c} -\frac{1}{n-1} (L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + (n-1)L_{n-2}^{\alpha+2}(x)) \\ \frac{1}{(\alpha+1)} L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \frac{n}{\alpha+1} L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \end{array} \right) \\
& = L_n^\alpha(x) - \frac{(-1)^n}{(n-2)!\Gamma(\alpha+1)} \left( \tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0) \right)^t A \left[ \left( \begin{array}{c} -\frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{(\alpha+1)} \end{array} \right) L_{n-1}^{\alpha+2}(x) \right] \\
& \quad - \frac{(-1)^n}{(n-2)!\Gamma(\alpha+1)} \left( \tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0) \right)^t A \left[ \left( \begin{array}{c} -1 \\ \frac{n}{\alpha+1} \end{array} \right) L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \right],
\end{aligned}$$

donde

$$\left( \tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0) \right)^t = (\mathbb{L}_n^\alpha(0))^t (I + A\mathbb{K}_{n-1}(0,0))^{-1}.$$

Pero, por (3.81) tenemos

$$L_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+2}(x) + 2nL_{n-1}^{\alpha+2}(x) + n(n-1)L_{n-2}^{\alpha+2}(x).$$

Consecuentemente,

TEOREMA 3.14. *Para todo  $n \in \mathbb{N}$*

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+2}(x) + A_{n,\alpha}L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + B_{n,\alpha}L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \quad (3.106)$$

donde

$$\begin{aligned}
A_{n,\alpha} &= 2n - \frac{(-1)^n}{(n-2)!\Gamma(\alpha+1)} \left( \tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0) \right)^t A \left( \begin{array}{c} -\frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{(\alpha+1)} \end{array} \right) \\
&\sim 2n - (\alpha+1)(\alpha+2) \\
B_{n,\alpha} &= n(n-1) - \frac{(-1)^n}{(n-2)!\Gamma(\alpha+1)} \left( \tilde{\mathbb{L}}_n^\alpha(0) \right)^t A \left( \begin{array}{c} -1 \\ \frac{n}{\alpha+1} \end{array} \right) \\
&\sim n(n-1) - (\alpha+1)(\alpha+2)(n-1).
\end{aligned}$$

lo que significa que la sucesión  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  es cuasi-ortogonal con respecto al peso de Laguerre  $d\mu_{\alpha+2} = x^{\alpha+2}e^{-x}dx$ .<sup>§</sup>

Efectuando el cambio de variable  $nx$  en (3.106), se tiene

$$\widehat{L}_n^\alpha(nx) = \widehat{L}_n^{\alpha+2}(nx) - \frac{A_{n,\alpha}}{n} \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(nx) + \frac{B_{n,\alpha}}{n(n-1)} \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(nx).$$

De la definición de  $A_{n,\alpha}$  y  $B_{n,\alpha}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{A_{n,\alpha}}{n} &= 2 - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \frac{B_{n,\alpha}}{n(n-1)} &= 1 - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \widehat{L}_n^\alpha(nx) &= \widehat{L}_n^{\alpha+2}(nx) - 2\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(nx) + \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(nx) \\ &\quad + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{n} \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(nx) - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{n} \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(nx) \\ &\quad - \widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(nx) \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(nx) \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

De (3.81) obtenemos  $\widehat{L}_n^\alpha(x) = \widehat{L}_n^{\alpha+2}(x) - 2\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(x)$ , luego

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{L}_n^\alpha(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} &= 1 + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{n} \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{n} \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} \\ &\quad - \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned} \quad (3.107)$$

Queremos encontrar el límite cuando  $n$  tiende a  $\infty$  en el primer miembro de (3.107). Usando que (cfr. [5] y [63]).

<sup>§</sup>Ver [9] para mayor información sobre familias cuasi-ortogonales, en particular el análisis de la distribución de sus ceros.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_{n-1}^\alpha(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} = -\frac{1}{\varphi((x-2)/2)} \quad (3.108)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$ , donde  $\varphi$  es la aplicación  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  en el exterior del disco unidad dada por

$$\varphi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

R. Alvarez-Nodarse y J. J. Moreno-Balcázar demostraron en [5] que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_n^\alpha(nx)}{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(nx)} = -\frac{(\varphi((x-2)/2) + 1)^2}{\varphi(x-2)/2}. \quad (3.109)$$

Luego, usando (3.108) y (3.109) se concluye que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_{n-2}^{\alpha+2}(nx)}{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(nx)} \frac{\widehat{L}_{n-1}^{\alpha+2}(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} \\ &= \left( -\frac{1}{\varphi((x-2)/2)} \right) \left( -\frac{\varphi((x-2)/2)}{(\varphi((x-2)/2) + 1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{(\varphi((x-2)/2) + 1)^2} \end{aligned}$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$ . Como una consecuencia, de (3.107) se obtiene la asintótica relativa escalada para polinomios ortogonales de tipo Laguerre-Sobolev.

PROPOSICION 3.2.6. *Para  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{L}_n^\alpha(nx)}{\widehat{L}_n^\alpha(nx)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{L}_n^\alpha(nx)}{L_n^\alpha(nx)} = 1 \quad (3.110)$$

*uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$ .*

Por otro lado, usando (3.93) obtenemos

$$\left\| \widetilde{L}_n^\alpha \right\|_S^2 = \|L_n^\alpha\|_\alpha^2 + \mathbb{L}_n^\alpha(0)^t (I + A\mathbb{K}_{n-1}(0, 0))^{-1} A\mathbb{L}_n^\alpha(0).$$

Si  $B$  es una matriz no singular, es inmediato comprobar que

$$\begin{vmatrix} 0 & u^t \\ v & B \end{vmatrix} = -|B|u^tB^{-1}v$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Así

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{L}_n^\alpha \right\|_S^2 &= \|L_n^\alpha\|_\alpha^2 - \frac{1}{|I + A\mathbb{K}_{n-1}(0,0)|} \left| \begin{array}{cc} 0 & \mathbb{L}_n^\alpha(0)^t \\ A\mathbb{L}_n^\alpha(0) & I + A\mathbb{K}_{n-1}(0,0) \end{array} \right| \\ &= \frac{\|L_n^\alpha\|_\alpha^2}{|I + A\mathbb{K}_{n-1}(0,0)|} (|I + A\mathbb{K}_{n-1}(0,0)|) \\ &\quad + \frac{\|L_n^\alpha\|_\alpha^2}{|I + A\mathbb{K}_{n-1}(0,0)|} \left( \left| \begin{array}{cc} 0 & \mathbb{L}_n^\alpha(0)^t / \|L_n^\alpha\|_\alpha^2 \\ -A\mathbb{L}_n^\alpha(0) & I + A\mathbb{K}_{n-1}(0,0) \end{array} \right| \right) \\ &= \frac{\|L_n^\alpha\|_\alpha^2}{|I + A\mathbb{K}_{n-1}(0,0)|} \left| \begin{array}{cc} 1 & \mathbb{L}_n^\alpha(0)^t / \|L_n^\alpha\|_\alpha^2 \\ -A\mathbb{L}_n^\alpha(0) & I + A\mathbb{K}_{n-1}(0,0) \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Finalmente, usando

$$I + A\mathbb{K}_n(0,0) = I + A\mathbb{K}_{n-1}(0,0) + \frac{A}{\|L_n^\alpha\|_\alpha^2} \mathbb{L}_n^\alpha(0) \mathbb{L}_n^\alpha(0)^t,$$

se tiene

$$\frac{\left\| \tilde{L}_n^\alpha \right\|_S^2}{\|L_n^\alpha\|_\alpha^2} = \frac{|I + A\mathbb{K}_n(0,0)|}{|I + A\mathbb{K}_{n-1}(0,0)|}. \quad (3.111)$$

Por tanto, de (3.111), (3.97), y (3.98) se deduce la siguiente

**PROPOSICION 3.2.7.** *Sea  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales con respecto a (3.93). Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\| \tilde{L}_n^\alpha \right\|_S}{\|L_n^\alpha\|_\alpha} = 1.$$

### Ecuación holonómica y fórmula de recurrencia a cinco términos

Para finalizar esta sección, mostraremos la existencia de una fórmula de recurrencia a cinco términos para la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de tipo Laguerre-Sobolev  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  así como la existencia de dos operadores diferenciales de primer orden (denominados operadores de creación y aniquilación) a partir de los cuales se puede determinar una ecuación holonómica que satisfacen dichos polinomios ortogonales. El lector interesado puede consultar [17].

PROPOSICION 3.2.8. *El operador de multiplicación por  $x^2$  es un operador simétrico con respecto al producto interno de Sobolev (3.93), es decir, si  $p, q \in \mathbb{P}$  entonces*

$$\langle x^2 p, q \rangle_S = \langle p, x^2 q \rangle_S. \quad (3.112)$$

Consideremos el desarrollo de Fourier de  $x^2 \tilde{L}_n^\alpha$  en términos de  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$ ;

$$x^2 \tilde{L}_n^\alpha(x) = \tilde{L}_{n+2}^\alpha(x) + \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} \tilde{L}_k^\alpha(x) \quad (3.113)$$

donde

$$a_{n,k} = \frac{\langle x^2 \tilde{L}_n^\alpha(x), \tilde{L}_k^\alpha(x) \rangle_S}{\|\tilde{L}_k^\alpha(x)\|_S^2}, \quad k = 0, \dots, n+1,$$

y

$$\|\tilde{L}_k^\alpha(x)\|_S^2 = \langle \tilde{L}_k^\alpha(x), \tilde{L}_k^\alpha(x) \rangle_S.$$

De (3.112) se deduce que

$$a_{n,k} = \frac{\langle \tilde{L}_n^\alpha(x), x^2 \tilde{L}_k^\alpha(x) \rangle_S}{\|\tilde{L}_k^\alpha(x)\|_S^2}.$$

Por lo que  $a_{n,k} = 0$  para  $k = 0, \dots, n-3$ , y (3.113) se transforma en

$$x^2 \tilde{L}_n^\alpha(x) = \tilde{L}_{n+2}^\alpha(x) + a_{n,n+1} \tilde{L}_{n+1}^\alpha(x) + a_{n,n} \tilde{L}_n^\alpha(x) + a_{n,n-1} \tilde{L}_{n-1}^\alpha(x) + a_{n,n-2} \tilde{L}_{n-2}^\alpha(x).$$



El próximo paso es encontrar los coeficientes  $a_{n,k}$ ,  $k = n - 2, \dots, n + 1$ .  
 Teniendo en cuenta que  $(x^2 \tilde{L}_k^\alpha)(0) = (x^2 \tilde{L}_k^\alpha)'(0) = 0$ , entonces

$$\left\langle \tilde{L}_n^\alpha(x), x^2 \tilde{L}_k^\alpha(x) \right\rangle_S = \left\langle \tilde{L}_n^\alpha(x), \tilde{L}_k^\alpha(x) \right\rangle_{\alpha+2},$$

y usando la fórmula de conexión (3.106) se tiene

$$\begin{aligned} a_{n,n+1} &= \frac{A_{n+1,\alpha} \|L_n^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2 + A_{n,\alpha} B_{n+1,\alpha} \|L_{n-1}^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2}{\left\| \tilde{L}_{n+1}^\alpha(x) \right\|_S^2} \sim 4n \\ a_{n,n} &= \frac{\|L_n^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2 + A_{n,\alpha}^2 \|L_{n-1}^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2 + B_{n,\alpha}^2 \|L_{n-2}^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2}{\left\| \tilde{L}_n^\alpha(x) \right\|_S^2} \sim 6n^2 \\ a_{n,n-1} &= \frac{A_{n,\alpha} \|L_{n-1}^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2 + B_{n,\alpha} A_{n-1,\alpha} \|L_{n-2}^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2}{\left\| \tilde{L}_{n-1}^\alpha(x) \right\|_S^2} \sim 4n^3 \\ a_{n,n-2} &= \frac{B_{n,\alpha} \|L_{n-2}^{\alpha+2}\|_{\alpha+2}^2}{\left\| \tilde{L}_{n-2}^\alpha(x) \right\|_S^2} \sim n^4 \end{aligned}$$

Como una consecuencia, deducimos

**TEOREMA 3.15.** *(Fórmula de recurrencia a cinco términos, [17]) Para todo  $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} x^2 \tilde{L}_n^\alpha(x) &= \tilde{L}_{n+2}^\alpha(x) + a_{n,n+1} \tilde{L}_{n+1}^\alpha(x) + a_{n,n} \tilde{L}_n^\alpha(x) \\ &\quad + a_{n,n-1} \tilde{L}_{n-1}^\alpha(x) + a_{n,n-2} \tilde{L}_{n-2}^\alpha(x). \end{aligned} \tag{3.114}$$

donde  $a_{n,k}$ ,  $k = n - 2, \dots, n + 1$ , son los coeficientes de Fourier-Sobolev, previamente definidos y  $\tilde{L}_{-1}^\alpha(x) = \tilde{L}_{-2}^\alpha(x) = 0$ .

### Ejemplo

Consideremos el producto interno (3.93) con  $M_0 = M$ ,  $M_1 = 4N$ , y  $\lambda = 0$ . Es decir, si  $p, q \in \mathbb{P}$  introducimos el producto interno

$$\langle p, q \rangle_S = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + Mp(0)q(0) + 4Np'(0)q'(0). \quad (3.115)$$

Sea  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Laguerre-Sobolev con respecto a (3.115) y  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales con respecto al siguiente producto interno

$$\langle p, q \rangle_H = \int_{-\infty}^\infty p(x)q(x)|x|^{2\alpha} e^{-x^2} dx + Mp(0)q(0) + Np''(0)q''(0), \quad (3.116)$$

$M, N \in \mathbb{R}^+$ . Entonces, de acuerdo con la siguiente proposición, podemos encontrar una relación entre las sucesiones  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  y  $\{P_n\}_{n \geq 0}$ .

PROPOSICION 3.2.9. *Para todo  $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} P_{2n}(x) &= \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x^2) \\ P_{2n+1}(x) &= xL_n^{\alpha+1/2}(x^2). \end{aligned}$$

**Demostración.** Para mostrar que  $P_{2n+1}(x) = xL_n^{\alpha+1/2}(x^2)$ , probaremos que

$$\langle xL_n^{\alpha+1/2}(x^2), x^{2k+1} \rangle_H = 0, \text{ cuando } n < k. \text{ Por lo que}$$

$$\begin{aligned} \langle xL_n^{\alpha+1/2}(x^2), x^{2k+1} \rangle_H &= \int_{-\infty}^\infty L_n^{\alpha+1/2}(x^2)x^{2k+2}|x|^{2\alpha} e^{-x^2} dx \\ &= \int_0^\infty L_n^{\alpha+1/2}(t)t^k t^{\alpha+1/2} e^{-t} dt \\ &= \delta_{n,k} \left\| L_n^{\alpha+1/2} \right\|_{\alpha+1/2}^2, k \leq n, \end{aligned}$$

donde  $\delta_{n,k}$  es la delta de Kronecker.

Además,

$$\langle xL_n^{\alpha+1/2}(x^2), x^{2k} \rangle_H = 0.$$

es decir,

$$P_{2n+1}(x) = xL_n^{\alpha+1/2}(x^2).$$

Por otro lado,  $P_{2n}(x) = \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x^2)$ . De hecho, si  $1 \leq k \leq n$ ,

$$\begin{aligned} & \left\langle \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x^2), x^{2k} \right\rangle_H \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x^2) |x|^{2\alpha} e^{-x^2} dx \\ & \quad + \left[ (2k)(2k-1)x^{2k-2} \right]_{x=0} 2 \left( \tilde{L}_n^{\alpha-1/2} \right)'(0) N \\ &= \int_0^{\infty} t^k \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(t) t^{\alpha-1/2} e^{-t} dt + 4N \left[ k(2k-1)x^{2k-2} \right]_{x=0} \left( \tilde{L}_n^{\alpha} \right)'(0) \\ &= \int_0^{\infty} t^k \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(t) t^{\alpha-1/2} e^{-t} dt + 4N (t^k)'(0) \left( \tilde{L}_n^{\alpha} \right)'(0) \\ &= \left\langle \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(t), t^k \right\rangle_S \\ &= \delta_{nk} \left\| \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x^2) \right\|_S^2. \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x^2), 1 \right\rangle_H &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x^2) |x|^{2\alpha} e^{-x^2} dx + M \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(0) \\ &= \int_0^{\infty} \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(t) t^{\alpha-1/2} e^{-t} dt + M \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(0) \\ &= \left\langle \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x), 1 \right\rangle_S, \end{aligned}$$

entonces

$$P_{2n}(x) = \tilde{L}_n^{\alpha-1/2}(x^2).$$

■

Algunos resultados obtenidos en [3] se pueden deducir de esta simple relación entre sucesiones de polinomios ortogonales. Véase también [49].

### Ecuación holonómica

En esta sección deduciremos una ecuación diferencial de segundo orden satisfecha por la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de tipo Laguerre-Sobolev  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$ . Para tal fin, encontraremos dos operadores diferenciales de primer orden  $\mathcal{J}_n$  y  $\mathcal{K}_n$ , tales que

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_n(\tilde{L}_n^\alpha) &= H(x; n)\tilde{L}_{n-1}^\alpha \\ \mathcal{K}_n(\tilde{L}_{n-1}^\alpha) &= K(x; n)\tilde{L}_n^\alpha.\end{aligned}$$

para algunos polinomios  $H(x; n)$  y  $K(x; n)$ . Estos operadores se denominan en la literatura operadores de aniquilación y de creación, respectivamente ([36]).

Sustituyendo (3.80) en (3.106):

$$\tilde{L}_n^\alpha(x) = f(x; n)L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + M_n L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \quad (3.117)$$

así como para los polinomios de grado  $n - 1$

$$\tilde{L}_{n-1}^\alpha(x) = K_n L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + g(x; n)L_{n-2}^{\alpha+2}(x), \quad (3.118)$$

donde

$$\begin{aligned}f(x; n) &= A_{n,\alpha} + (x - (2n + 1 + \alpha)) \\ M_n &= B_{n,\alpha} - (n - 1)(n + \alpha + 1) \\ K_n &= 1 - \frac{B_{n-1,\alpha}}{(n - 2)(n + \alpha)} \\ g(x; n) &= A_{n-1,\alpha} + \frac{B_{n-1,\alpha}(x - (2n + \alpha - 1))}{(n - 2)(n + \alpha)}.\end{aligned}$$

Derivando en ambos miembros de (3.117)

$$\left(\tilde{L}_n^\alpha\right)'(x) = L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + f(x; n)\left(L_{n-1}^{\alpha+2}\right)'(x) + M_n\left(L_{n-2}^{\alpha+2}\right)'(x).$$

Multiplicando por  $x$  los dos miembros de la igualdad anterior, y usando (3.85), obtenemos

$$\begin{aligned}
x \left( \tilde{L}_n^\alpha \right)' (x) &= x L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + f(x; n)(n-1)L_{n-1}^{\alpha+2}(x) \\
&\quad + f(x; n)(n-1)(n+\alpha+1)L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \\
&\quad + M_n \left[ (n-2)L_{n-2}^{\alpha+2}(x) + (n-2)(n+\alpha)L_{n-3}^{\alpha+2}(x) \right].
\end{aligned}$$

De (3.80) se tiene que

$$L_{n-3}^{\alpha+2}(x) = -\frac{1}{(n-2)(n+\alpha)}L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \frac{(x-(2n+\alpha-1))}{(n-2)(n+\alpha)}L_{n-2}^{\alpha+2}(x).$$

Así,

$$\begin{aligned}
x \left( \tilde{L}_n^\alpha \right)' (x) &= [x + (n-1)f(x; n) - M_n] L_{n-1}^{\alpha+2}(x) \\
&\quad + (n-1)(n+\alpha+1)f(x; n)L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \\
&\quad + M_n (x - (n+\alpha+1)) L_{n-2}^{\alpha+2}(x),
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
x \left( \tilde{L}_n^\alpha \right)' (x) &= [nx + A_{n,\alpha}n - n - B_{n,\alpha} - A_{n,\alpha} - n^2] L_{n-1}^{\alpha+2}(x) \\
&\quad + [B_{n,\alpha}x + A_{n,\alpha}(-1 - \alpha + n\alpha + n^2)] L_{n-2}^{\alpha+2}(x) \\
&\quad - [B_{n,\alpha}(1 + n + \alpha) - n(\alpha - n^2 - n\alpha + 1)] L_{n-2}^{\alpha+2}(x).
\end{aligned}$$

Entonces, definiendo

$$\begin{aligned}
\phi(x; n) &= nx + A_{n,\alpha}n - n - B_{n,\alpha} - A_{n,\alpha} - n^2 \\
\sigma(x; n) &= B_{n,\alpha}x + A_{n,\alpha}(-1 - \alpha + n\alpha + n^2) \\
&\quad - B_{n,\alpha}(1 + n + \alpha) + n(\alpha - n^2 - n\alpha + 1)
\end{aligned}$$

se obtiene

$$x \left( \tilde{L}_n^\alpha \right)' (x) = \phi(x; n)L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + \sigma(x; n)L_{n-2}^{\alpha+2}(x). \quad (3.119)$$

De manera similar,

$$x \left( \tilde{L}_{n-1}^\alpha \right)' (x) = \tau(x; n) L_{n-1}^{\alpha+2}(x) + v(x; n) L_{n-2}^{\alpha+2}(x),$$

donde

$$\tau(x; n) = \frac{-xB_{n-1,\alpha}}{(n-2)(n+\alpha)}$$

$$+ \frac{2n + 2B_{n-1,\alpha} + 2\alpha + nB_{n-1,\alpha} - 3n\alpha + B_{n-1,\alpha}\alpha - 3n^2 + n^3 + n^2\alpha}{(n-2)(n+\alpha)} - A_{n-1,\alpha}$$

$$v(x; n) = K_n(n-1)(n+\alpha+1) + \frac{B_{n-1,\alpha}x}{(n-2)(n+\alpha)} + g(x; n)(x - (n+\alpha+1)).$$

De (3.117) y (3.118) se deduce que

$$L_{n-1}^{\alpha+2}(x) = \frac{g(x; n)\tilde{L}_n^\alpha(x) - M_n\tilde{L}_{n-1}^\alpha(x)}{g(x; n)f(x; n) - K_nM_n} \quad (3.120)$$

$$L_{n-2}^{\alpha+2}(x) = \frac{f(x; n)\tilde{L}_{n-1}^\alpha(x) - K_n\tilde{L}_n^\alpha(x)}{g(x; n)f(x; n) - K_nM_n}. \quad (3.121)$$

En consecuencia, reemplazando (3.120) y (3.121) en (3.119), se tiene

$$x [g(x; n)f(x; n) - K_nM_n] \left( \tilde{L}_n^\alpha \right)' (x) + [g(x; n)\phi(x; n) - K_n\phi(x; n)] \tilde{L}_n^\alpha(x)$$

$$= [f(x; n)\sigma(x; n) - M_n\phi(x; n)] \tilde{L}_{n-1}^\alpha(x).$$

De manera similar, se puede mostrar que

$$x [g(x; n)f(x; n) - K_nM_n] \left( \tilde{L}_{n-1}^\alpha \right)' (x) + [M_n\tau(x; n) - v(x; n)f(x; n)] \tilde{L}_{n-1}^\alpha(x)$$

$$= [\tau(x; n)g(x; n)\sigma(x; n) - K_nv(x; n)] \tilde{L}_n^\alpha(x).$$

Por lo tanto,

PROPOSICION 3.2.10. Sea  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  una sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a (3.93). Entonces, los operadores diferenciales  $\mathcal{J}_n$  y  $\mathcal{K}_n$  definidos por

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_n &= F(x; n)D + G(x; n)I \\ \mathcal{K}_n &= F(x; n)D + J(x; n)I\end{aligned}$$

donde  $D$  es el operador derivada,  $I$  el operador identidad y

$$\begin{aligned}F(x; n) &= x[g(x; n)f(x; n) - K_n M_n], \\ G(x; n) &= \phi(x; n)(g(x; n) - K_n), \\ H(x; n) &= f(x; n)\sigma(x; n) - M_n\phi(x; n), \\ J(x; n) &= M_n\tau(x; n) - v(x; n)f(x; n), \\ K(x; n) &= \tau(x; n)g(x; n)\sigma(x; n) - K_n v(x; n),\end{aligned}$$

satisfacen

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_n(\tilde{L}_n^\alpha) &= H(x; n)\tilde{L}_{n-1}^\alpha, \\ \mathcal{K}_n(\tilde{L}_{n-1}^\alpha) &= K(x; n)\tilde{L}_n^\alpha.\end{aligned}$$

En otras palabras,  $\mathcal{J}_n$  es un operador de aniquilación y  $\mathcal{K}_n$  es un operador de creación asociados a la sucesión  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$ .

De la proposición 3.2.10 se deduce

$$\frac{1}{H(x; n)}\mathcal{J}_n(\tilde{L}_n^\alpha) = \tilde{L}_{n-1}^\alpha.$$

Así, aplicando el operador diferencial  $\mathcal{K}_n$  a los dos miembros de la anterior igualdad

$$\mathcal{K}_n\left(\frac{1}{H(x; n)}\mathcal{J}_n(\tilde{L}_n^\alpha)\right) = K(x; n)\tilde{L}_n^\alpha,$$

es decir,

$$F(x; n)D\left(\frac{1}{H(x; n)}\mathcal{J}_n(\tilde{L}_n^\alpha)\right) + \frac{J(x; n)}{H(x; n)}\mathcal{J}_n(\tilde{L}_n^\alpha) = K(x; n)\tilde{L}_n^\alpha.$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
D\left(\frac{1}{H(x;n)}\mathcal{J}_n\left(\tilde{L}_n^\alpha\right)\right) &= D\left(\frac{1}{H(x;n)}\left(F(x;n)\left(\tilde{L}_n^\alpha\right)'+G(x;n)\tilde{L}_n^\alpha\right)\right) \\
&= -\frac{H'(x;n)}{H^2(x;n)}\left(F(x;n)\left(\tilde{L}_n^\alpha\right)'+G(x;n)\tilde{L}_n^\alpha\right) \\
&\quad +\frac{1}{H(x;n)}\left(F'(x;n)\left(\tilde{L}_n^\alpha\right)'+F(x;n)\left(\tilde{L}_n^\alpha\right)''\right) \\
&\quad +\frac{1}{H(x;n)}\left(G'(x;n)\tilde{L}_n^\alpha+G(x;n)\left(\tilde{L}_n^\alpha\right)'\right),
\end{aligned}$$

se deduce

$$\frac{F^2(x;n)}{H(x;n)}\left(\tilde{L}_n^\alpha\right)''+\frac{F(x;n)}{H(x;n)}\Upsilon(x;n)\left(\tilde{L}_n^\alpha\right)'+\frac{1}{H(x;n)}\Sigma(x;n)\tilde{L}_n^\alpha=0,$$

donde

$$\begin{aligned}
\Upsilon(x;n) &= G(x;n)+J(x;n)-\frac{F(x;n)H'(x;n)}{H(x;n)}+F'(x;n) \\
\Sigma(x;n) &= F(x;n)G'(x;n)+J(x;n)G(x;n)-K(x;n)H(x;n) \\
&\quad -\frac{F(x;n)G(x;n)H'(x;n)}{H(x;n)}.
\end{aligned}$$

Luego, si se usa la notación de la proposición 3.2.10, se obtiene

**TEOREMA 3.16.** *Sea  $\{\tilde{L}_n^\alpha\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Laguerre-Sobolev con respecto a (3.93). Entonces*

$$A(x;n)\left(\tilde{L}_n^\alpha(x)\right)''+B(x;n)\left(\tilde{L}_n^\alpha(x)\right)'+C(x;n)\tilde{L}_n^\alpha(x)=0,$$



donde

$$A(x; n) = F^2(x; n)$$

$$B(x; n) = F(x; n) \left[ F'(x; n) + G(x; n) + J(x; n) - \frac{F(x; n)H'(x; n)}{H(x; n)} \right]$$

$$C(x; n) = F(x; n)G'(x; n) + J(x; n)G(x; n) - \frac{F(x; n)G(x; n)H'(x; n)}{H(x; n)} - K(x; n)H(x; n).$$

### 3.3 Series de Fourier relativas a polinomios ortogonales en espacios de Sobolev

En la teoría de series de Fourier, el análisis de los fenómenos de Gibbs se puede mejorar utilizando polinomios ortogonales asociados a un producto interno de la forma (3.1), tal y como se muestra en los experimentos numéricos presentados en [35].

Si denotamos mediante  $\mathbf{R}$  la matriz de Gram del producto escalar (3.1) respecto a la base canónica  $\{x_n^n\}_{n \geq 0}$  y mediante  $\mathbf{R}^{(k)}$  la matriz de Gram del producto interno estándar relativo a la medida  $\mu_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ , entonces

PROPOSICION 3.3.1.

$$\mathbf{R} = \sum_{k=0}^m Z^k D_k \mathbf{R}^{(k)} D_k (Z^t)^k, \quad (3.122)$$

$$\text{donde } D_k = \text{diag} \left( d_j^{(k)} \right)_{j=0}^{\infty} \text{ con } d_j^{(k)} = k! \binom{k+j}{j}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Las matrices  $\mathbf{R}^{(k)}$  son matrices de Hankel.

Si consideramos la sucesión de polinomios ortogonales respecto a (3.1), las entradas de la matriz de Hessenberg asociada no se pueden determinar de manera explícita como hemos realizado en el capítulo 2 para el caso de los polinomios ortonormales en la circunferencia unidad. No obstante, en algunos casos particulares sí se puede abordar este problema. Por ejemplo cuando en (3.1) consideramos  $m = 1$  y  $d\mu_1 = \lambda d\tilde{\mu}_1$ ,

con  $(\mu_0, \tilde{\mu}_1)$  un par coherente de medidas y  $\lambda \geq 0$ , la sucesión de polinomios ortogonales mónicos  $\{Q_n^\lambda\}_{n \geq 0}$  asociada a este producto interno satisface

$$P_{n+1}(x) + \sigma_n \frac{n+1}{n} P_n(x) = Q_{n+1}^\lambda(x) + \sum_{j=0}^n a_{n,j} Q_j^\lambda(x),$$

donde

$$a_{n,j} = \frac{\langle P_{n+1} + \sigma_n \frac{n+1}{n} P_n, Q_j^\lambda \rangle_S}{\langle Q_j^\lambda, Q_j^\lambda \rangle_S} = 0,$$

para  $0 \leq j \leq n-1$  y

$$a_{n,n} = \frac{\sigma_n \frac{n+1}{n} \int_{\mathbb{I}_0} P_n^2(x) d\mu_0(x)}{\langle Q_n^\lambda, Q_n^\lambda \rangle_S}.$$

Por tanto, hemos establecido una relación algebraica sencilla entre los polinomios  $\{Q_n^\lambda\}_{n \geq 0}$  y  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  de manera que, para  $n \geq 2$ ,

$$P_n(x) + c_n P_{n-1}(x) = Q_n^\lambda(x) + e_n(\lambda) Q_{n-1}^\lambda(x). \quad (3.123)$$

donde  $c_n = \sigma_{n-1} \frac{n}{n-1}$ ,  $e_n(\lambda) = a_{n-1, n-1}$ ,  $n \geq 2$ . En términos matriciales, si  $\mathbf{a}(x) = [P_0(x), P_1(x), \dots]^t$  y  $\mathbf{b}(x) = [Q_0^\lambda(x), Q_1^\lambda(x), \dots]^t$ , la relación se puede expresar como

$$A\mathbf{a}(x) = B\mathbf{b}(x), \quad (3.124)$$

donde  $A$  y  $B$  son matrices bidiagonales inferiores con entradas diagonales 1.

Por tanto, si  $J_\infty$  es la matriz tridiagonal asociada a la sucesión de polinomios ortogonales estándar  $\{P_n\}_{n \geq 0}$ , esto es,  $x\mathbf{a}(x) = J_\infty \mathbf{a}(x)$ , y  $M$  es la matriz de Hessenberg asociada a la sucesión de polinomios ortogonales de Sobolev  $\{Q_n^\lambda\}_{n \geq 0}$ , esto es,  $x\mathbf{b}(x) = M\mathbf{b}(x)$  de (3.124) se sigue que

$$AJ_\infty \mathbf{a}(x) = BM\mathbf{b}(x),$$

es decir,

$$AJ_\infty A^{-1} B^{-1} \mathbf{b}(x) = BM\mathbf{b}(x).$$

Por tanto, deducimos el siguiente resultado

PROPOSICION 3.3.2. (Marcellán [44]) Dado un par coherente de medidas  $(\mu_0, \tilde{\mu}_1)$  y el producto interior de Sobolev

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{\mathbb{I}_0} p(x)q(x)d\mu_0(x) + \lambda \int_{\mathbb{I}_2} p'(x)q'(x)d\tilde{\mu}_1(x),$$

entonces la matriz de Hessenberg  $M$  asociada a la familia de polinomios ortogonales mónicos de Sobolev es

$$M = (B^{-1}A)J_\infty(B^{-1}A)^{-1},$$

donde  $A, B$  son las matrices bidiagonales dadas en (3.124).

A modo de ejemplo, en el caso Laguerre se tienen tres situaciones

- a)  $\begin{cases} d\mu_0(x) = (x+a)x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \\ d\tilde{\mu}_1(x) = x^\alpha e^{-x}dx, \quad a > 0, \alpha > 0. \end{cases}$
- b)  $\begin{cases} d\mu_0(x) = e^{-x}dx + M\delta_0, \\ d\tilde{\mu}_1(x) = e^{-x}dx, \quad M > 0. \end{cases}$
- c)  $\begin{cases} d\mu_0(x) = x^\alpha e^{-x}dx, \\ d\tilde{\mu}_1(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{x+a}dx + M\delta_{-a}, \quad a \geq 0, \alpha > -1, M \geq 0. \end{cases}$

En el caso de Jacobi (ver Figura 3.1), se tienen las siguientes situaciones

- a)  $\begin{cases} d\mu_0(x) = (x+a)(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}dx, \\ d\tilde{\mu}_1(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx, \quad \alpha, \beta > 0, a > -1. \end{cases}$
- b)  $\begin{cases} d\mu_0(x) = (1-x)^{\alpha-1}dx + M\delta_{-1}, \\ d\tilde{\mu}_1(x) = (1-x)^\alpha dx, \quad \alpha > 0, M \geq 0. \end{cases}$
- c)  $\begin{cases} d\mu_0(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx, \\ d\tilde{\mu}_1(x) = \frac{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}}{x+a}dx + M\delta_{-a}, \quad a > 1, \alpha, \beta > -1, M \geq 0. \end{cases}$

De la relación (3.123) se sigue una interesante aplicación al tratamiento de la series de Fourier respecto a familias de polinomios ortogonales de Sobolev. Sea

$$\mathbb{W}^{2,1} = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \int f^2 d\mu_0 < +\infty, \int (f')^2 d\tilde{\mu}_1 < +\infty \right\}.$$

Denotaremos mediante  $\hat{\mathbf{a}}$ ,  $\hat{\mathbf{b}}$ ,  $\hat{\mathbf{q}}$  los vectores columnas cuyas  $(n+1)$ -ésimas componentes son, respectivamente,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}}(n) &= \int f(x)P_n(x)d\mu_0(x), \\ \hat{\mathbf{b}}(n) &= \int f'(x)S_n(x)d\tilde{\mu}_1(x), \\ \hat{\mathbf{q}}(n) &= \langle f, Q_n^\lambda \rangle_S.\end{aligned}$$

De (3.124) se sigue que

$$B\hat{\mathbf{q}} = A\hat{\mathbf{a}} + \lambda D\hat{\mathbf{b}},$$

donde  $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n, \dots)$ .

Por tanto,

PROPOSICION 3.3.3.

$$\hat{\mathbf{q}} = B^{-1}A\hat{\mathbf{a}} + \lambda B^{-1}D\hat{\mathbf{b}}.$$

De esta forma se pueden determinar los coeficientes del desarrollo de Fourier de la función  $f$  respecto a los polinomios ortonormales de Sobolev en términos de los coeficientes de Fourier de  $f$  respecto a  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  y los coeficientes de Fourier de  $f'$  respecto a  $\{S_n\}_{n \geq 0}$ .

### 3.4 Ejercicios

1. Demostrar el enunciado de la Proposición 3.1.2.
2. Demostrar el enunciado del Lema 3.1. *Sugerencia: Obsérvese que*

$$\|Q_n\|_S^2 = \|Q_n\|_{\mu_0}^2 + \lambda n^2 \left\| \frac{Q_n'}{n} \right\|_{\mu_1}^2.$$

*Utilice que  $P_n$  y  $T_n$  tienen norma cuadrática mínima, es decir,*

$$\begin{aligned}\|P_n\|_{\mu_0}^2 &= \inf\{\langle p, p \rangle_{\mu_0} : \text{grad}(p) = n, p \text{ mónico}\}, \\ \|T_n\|_{\mu_1}^2 &= \inf\{\langle p, p \rangle_{\mu_1} : \text{grad}(p) = n, p \text{ mónico}\}\end{aligned}$$

y la sucesión  $\{Q_n\}$  es solución del problema extremal

$$\|Q_n\|_S^2 = \inf\{\langle p, p \rangle_S : \text{grad}(p) = n, p \text{ mónico}\}.$$

Por lo tanto,  $\|Q_n\|_S^2 \leq \langle R_n^\infty, R_n^\infty \rangle_S = \langle R_n^\infty, R_n^\infty \rangle_{\mu_0} + \lambda n^2 \|T_{n-1}\|_{\mu_1}^2$ ,  
 $n \geq 2$ .

Finalmente, use la Proposición 3.1.2 para estimar  $\langle R_n^\infty, R_n^\infty \rangle_{\mu_0}$ ,  
 $n \geq 2$ .

3. Demuestre que la clase  $E^2(\Omega, \rho_1)$  es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por (3.6).
4. Demuestre que si  $f \in E^2(\Omega, \rho_1)$ , entonces  $f$  tiene límite no tangencial

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(x), \quad \text{para casi todo } x \in \Gamma,$$

donde  $\Gamma \in C^{2+}$ .



# CAPÍTULO 4

## PROBLEMAS ABIERTOS

En esta sección mencionaremos varios problemas relacionados con la teoría de polinomios ortogonales no estándar.

### 4.1 Desarrollos en series de Fourier-Sobolev

**Problema 1.** Bajo las hipótesis de la proposición 3.3.2, un interesante problema es el análisis de los errores de aproximación  $f - \mathcal{S}_N f$ , donde  $\mathcal{S}_N$  denota el proyector  $N$ -ésimo de Fourier de  $f$  respecto a las familias  $\{Q_n^\lambda\}_{n \geq 0}$ ,  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{S_n\}_{n \geq 0}$ , respectivamente. Las correspondientes estimaciones en términos de  $N$  permitirían la comparación entre la aproximación estándar y la aproximación de Sobolev, hasta ahora sólo realizada entre el caso Legendre y el caso Legendre-Sobolev [35].

### 4.2 Transformaciones espectrales sobre la circunferencia unidad

**Problema 1.** Las transformaciones espectrales racionales aplicadas a funciones de Stieltjes forman un grupo no conmutativo que está generado por las transformaciones canónicas (Christoffel y Geronimus) y las correspondientes a los polinomios asociados y antiasociados en la recta real. Para el caso de la circunferencia unidad, este es un problema abierto.

**Problema 2.** La representación matricial del operador de multiplicación para medidas soportadas en la circunferencia unidad da lugar a una matriz de Hessenberg cuyo carácter unitario depende del hecho de que la medida de ortogonalidad no pertenezca a la clase de Szegő. La representación CMV [10] elimina esta restricción en la medida utilizando ciertas bases ortogonales en el espacio de los polinomios de Laurent. De esta forma, el operador de multiplicación se puede representar mediante una matriz pentadiagonal denominada matriz CMV. El estudio de las transformaciones espectrales lineales a partir del enfoque CMV se perfila como una línea fructífera de investigación.

**Problema 3.** En [6] se han encontrado nuevas fórmulas de cuadratura sobre la circunferencia unidad, con la propiedad de exactitud algebraica en todo el espacio de polinomios  $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ . Aunque estas fórmulas no son de tipo interpolatorio, poseen como máximo dominio de exactitud algebraica todo el espacio  $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ . Hasta el momento no se conoce la relación entre estas fórmulas de cuadratura y las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio asociadas al concepto de para-ortogonalidad [19].

### 4.3 Asintótica y localización de ceros

**Problema 1.** Sea  $(\mu_0, \mu_1)$  un vector de medidas de Borel sobre  $\mathbb{C}$  tales que al menos una de ellas tiene como soporte un conjunto infinito de puntos. Consideremos el producto interno de Sobolev

$$\langle p, q \rangle_S = \int p(z) \overline{q(z)} d\mu_0(z) + \int p'(z) \overline{q'(z)} d\mu_1(z),$$

y  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos correspondiente. ¿Cuál es la asymptótica fuerte de  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$  si  $\mu_0$  y  $\mu_1$  son dos medidas absolutamente continuas en la clase de Szegő con soportes disjuntos, o al menos con soportes diferentes?. Si es conocida la asymptótica fuerte de  $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ , entonces se pueden localizar los ceros del polinomio  $Q_n$  y su correspondiente distribución sobre  $\Delta = \text{supp}(\mu_0) \cup \text{supp}(\mu_1)$ .



# CAPÍTULO 5

# APÉNDICE

## Lema de Schwarz

Utilizando el principio del máximo, Carathéodory demostró en 1904 el siguiente resultado, conocido como *Lema de Schwarz*.

LEMA 5.1. *Dada  $w : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica y acotada por 1 en  $\mathbb{D}$ , tal que  $w(0) = 0$ . Entonces*

$$|w(z)| \leq |z|, \text{ para todo } z \in \mathbb{D}. \quad (5.1)$$

*Además, si la igualdad  $|w(z)| = |z|$  es válida para algún  $z \in \mathbb{D}$ , entonces  $w$  es la transformación lineal  $w(z) = e^{i\alpha}z$ , donde  $\alpha$  es una constante real.*

**Demostración.** Como  $w$  es una función analítica en el disco unidad  $\mathbb{D}$ , y se anula en el origen, tenemos que

$$w(z) = c_1z + c_2z^2 + \cdots + c_nz^n + \cdots$$

Por tanto, la función

$$f(z) := \frac{w(z)}{z} = c_1 + c_2z + \cdots + c_nz^{n-1} + \cdots$$

es analítica en  $\mathbb{D}$  y  $f(0) = c_1$ .

Dado  $z = a$  un punto arbitrario de  $\mathbb{D}$ . Sea  $r$  tal que  $|a| < r < 1$ . Sobre la circunferencia  $|z| = r$ , tenemos

$$|f(z)| = \frac{|w(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}.$$

Por el principio del máximo esta última desigualdad es válida en el disco  $|z| \leq r$  y, por tanto,

$$|f(a)| = \frac{|w(a)|}{|a|} \leq \frac{1}{r}.$$

Haciendo  $r \rightarrow 1^-$ , tenemos que

$$|f(a)| = \frac{|w(a)|}{|a|} \leq 1,$$

de manera que  $|f(a)| = 1$  sólo puede ocurrir en el caso en que  $f(z) = \frac{w(z)}{z} = e^{i\alpha}$ , donde  $\alpha$  es una constante real <sup>\*</sup>.

■

## El teorema de Carathéodory-Toeplitz

Dada una sucesión  $\{c_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$ , si existe una medida positiva de Borel no trivial  $\sigma$  sobre la circunferencia unidad  $\mathbb{T}$ , tal que

$$c_n = \int e^{in\theta} d\sigma(\theta),$$

definimos  $c_n$  para  $n < 0$  por  $c_n := \bar{c}_{-n}$  y formamos la matriz de Toeplitz de orden  $n$ , con entradas  $\mathbf{T}_{i,j} = c_{i-j}$ ,  $0 \leq i, j \leq n$ . Es decir,

$$\mathbf{T}_n = \begin{pmatrix} c_0 & c_{-1} & \cdots & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_0 \end{pmatrix}$$

El teorema de Carathéodory-Toeplitz caracteriza la sucesión  $\{c_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$ , como sucesión de momentos asociada a una medida positiva de Borel no trivial  $\sigma$  sobre  $\mathbb{T}$ , en términos de la positividad del  $\det(\mathbf{T}_n)$  para todo  $n \geq 0$ . Más precisamente,

**TEOREMA 5.1.** (*Carathéodory-Toeplitz, [60]*).

*La sucesión  $\{c_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$  es una sucesión de momentos asociada a una medida positiva de Borel no trivial  $\sigma$  sobre  $\mathbb{T}$ , si y sólo si,  $\det(\mathbf{T}_n) > 0$ , para todo  $n \geq 0$ .*

---

<sup>\*</sup>Esta demostración es debida a Constantin Carathéodory (1873-1950)

## El teorema espectral

Sea  $U$  un operador unitario sobre un espacio de Hilbert  $H$ . El vector  $\varphi \in \mathcal{H}$  se dice cíclico para  $U$  si y sólo si  $\text{span}\{U^j\varphi : j \in \mathbb{Z}\}$  es denso en  $\mathcal{H}$ .

TEOREMA 5.2. (*Teorema espectral para operadores unitarios, [60]*).

*Un operador unitario  $U$  con vector cíclico  $\varphi$  es unitariamente equivalente al operador multiplicación por  $z$ ,  $M_z$  sobre  $L^2(\mathbb{T}, \sigma)$ .*

**Demostración.** Sea  $\varphi \in \mathcal{H}$  un vector para  $U$ , tal que  $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ . Definamos la sucesión

$$c_n := \langle \varphi, U^{-n}\varphi \rangle_{\mathcal{H}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, para  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ ,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq m} a_i \bar{a}_j c_{i-j} = \left\| \sum_{i=1}^m a_i U^i \varphi \right\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0.$$

Por tanto, aplicando el teorema de Carathéodory-Toeplitz, la sucesión  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es la sucesión de momentos de una medida  $\sigma^\dagger$  sobre la circunferencia unidad, es decir,

$$c_n = \int e^{in\theta} d\sigma(\theta).$$

Sea  $V : \text{span}\{U^j\varphi : j \in \mathbb{Z}\} \rightarrow L^2(\mathbb{T}, \sigma)$  dada por

$$V(U^j\varphi) = e^{ij\theta},$$

y como la sucesión  $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es un conjunto denso en  $L^2(\mathbb{T})$ , entonces  $V$  se puede extender a un operador unitario  $\tilde{V} : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{T}, \sigma)$ . ■

---

<sup>†</sup> $\sigma$  es la medida espectral para  $(U, \varphi)$ .



# BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Alfaro y F. Marcellán, *Recent trends in orthogonal polynomials on the unit circle*. En *Orthogonal Polynomials and Their Applications. Proceedings Erice, 1990*. C. Brezinski et al. Editors. IMACS Annals Comput. and Appl. Math. **9**. J. C. Baltzer, Basel, 1991. 3-14.
- [2] M. Alfaro, F. Marcellán, M. L. Rezola y A. Ronveaux, *On orthogonal polynomials of Sobolev type: Algebraic properties and zeros*, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 737–757.
- [3] M. Alfaro, J. J. Moreno-Balcázar, A. Peña y M. L. Rezola, *Asymptotics for a generalization of Hermite polynomials*. Enviado para publicación.
- [4] P. Althammer, *Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation*, J. Reine Angew. Math. **211** (1962), 192–204.
- [5] R. Alvarez-Nodarse y J. J. Moreno-Balcázar, *Asymptotic properties of generalized Laguerre orthogonal polynomials*, Indag. Math. (N.S.) **15** (2004), 151–165.
- [6] E. Berriochoa, A. Cachafeiro, J. García-Amor y F. Marcellán, *New quadrature rules for Bernstein measures on the interval  $[-1, 1]$* , Electr. Trans. on Numer. Anal. **30** (2008), 278–290.
- [7] J. Blankenagel, *Anwendungen adjungierter Polynomoperatoren*, Tesis Doctoral. Universität Köln, 1971.
- [8] J. Brenner, *Über eine Erweiterung des orthogonalitätsbegriffes bei polynomen*. En *Proceedings Conference on the Constructive Theory*

- of Functions*, Budapest, 1969, G. Alexits and S. B. Stechkin Eds. Akadémia Kiadó, Budapest, 1972. 77–83.
- [9] C. Brezinski, K. Driver y M. Redivo-Zaglia, *Quasi-orthogonality with applications to some families of classical orthogonal polynomials*, Appl. Numer. Math. **48** (2004), 157–168.
- [10] M. J. Cantero, L. Moral y L. Velázquez, *Five diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials on the unit circle*, Linear Algebra Appl. **362** (2003), 29–56.
- [11] M. Castro y J. Durán, *Boundedness properties for Sobolev inner products*, J. Approx. Theory **122** (2003), 97–111.
- [12] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc. New York, 1978.
- [13] E. A. Cohen, *Theoretical Properties of Best Polynomial Approximation in  $W^{1,2}[-1, 1]$* , SIAM J. Math. Anal. **2** (1971), 187–192.
- [14] H. Dueñas y F. Marcellán, *Laguerre-Type orthogonal polynomials. Electrostatic interpretation*, Int. J. Pure and Appl. Math. **38** (2007), 345–358.
- [15] H. Dueñas y F. Marcellán, *The Laguerre-Sobolev-Type orthogonal polynomials: Holonomic equation and electrostatic interpretation*, Rocky Mount. J. Math. (2008). En prensa.
- [16] H. Dueñas y F. Marcellán, *Asymptotic behaviour of Laguerre-Sobolev-Type Orthogonal Polynomials. A nondiagonal case*. Enviado para publicación.
- [17] H. Dueñas y F. Marcellán, *The holonomic equation of the Laguerre-Sobolev-Type Orthogonal Polynomials: A nondiagonal case*. Enviado para publicación.
- [18] L. Daruis, P. González-Vera y F. Marcellán, *Gaussian quadrature formulae on the unit circle*, J. Comput. Appl. Math. **140** (2002), 159–183.

- [19] L. Daruis y P. González-Vera, *Ortogonalidad y cuadratura sobre la circunferencia unidad*, XVIII Escuela Venezolana de Matemáticas, Mérida, Venezuela 2005.
- [20] L. Daruis, J. Hernández y F. Marcellán, *Spectral transformations for Hermitian Toeplitz matrices*, J. Comput. Appl. Math. **202** (2007), 155–176.
- [21] W. D. Evans, L. L. Littlejohn, F. Marcellán, C. Markett y A. Ronveaux, *On recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **26** (1995), 446–467.
- [22] L. Garza, *Transformaciones Espectrales, Funciones de Carathéodory y Polinomios Ortogonales en la Circunferencia Unidad*, Tesis Doctoral. Universidad Carlos III de Madrid, España, 2009.
- [23] J. Geronimo, D. S. Lubinsky y F. Marcellán, *Asymptotics for Sobolev orthogonal polynomials for exponential weights*, Constr. Approx. **22** (2005), 309–346.
- [24] Ya. L. Geronimus, *On the trigonometric moment problem*, Ann. of Math. **47** (1946), 742–761.
- [25] Ya. L. Geronimus, *Orthogonal Polynomials: Estimates, asymptotic formulas, and series of polynomials orthogonal on the unit circle and on an interval*, Consultants Bureau, New York, 1961.
- [26] Ya. L. Geronimus, *Polynomials orthogonal on a circle and their applications, in Series and Approximation*, Amer. Math. Soc. Transl. Series vol **3**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1962. 1-79.
- [27] E. Godoy y F. Marcellán, *An analogue of the Christoffel formula for polynomial modification of a measure on the unit circle*, Boll. Un. Mat. Ital. **5-A** (1991), 1-12.
- [28] E. Godoy y F. Marcellán, *Orthogonal polynomials and rational modifications of measures*, Canad. J. Math. **45** (1993), 930-943.
- [29] L. Golinskii, P. Nevai y W. Van Assche, *Perturbation of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle*, J. Approx. Theory **83** (1995), 392-422.

- [30] \_\_\_\_\_, *Perturbation of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle, II*, J. Approx. Theory **96** (1999), 1-32.
- [31] L. Golinskii y V. Totik, *Orthogonal Polynomials: from Jacobi to Simon*. En *Spectral theory and mathematical physics: a Festschrift in honor of Barry Simon's 60th birthday*. Proc. Sympos. Pure Math. **76**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. 821–874.
- [32] W. B. Gragg, *The QR algorithm for unitary Hessenberg matrices*, J. Comput. Appl. Math. **16** (1986), 1-8.
- [33] U. Grenander y G. Szegő, *Toeplitz Forms and their Applications*, University of California Press, Berkeley 1958, Chelsea, New York, 2nd edition, 1984.
- [34] W. Gröbner, *Orthogonale polynomsysteme, die gleichzeitig mit  $f(x)$  auch deren ableitung  $f'(x)$  approximieren*, En *Funktionalanalysis, Approximations-theorie, Numerische Mathematik*, ISNM **7**, Birkhäuser, Basel, 1967. 24–32.
- [35] A. Iserles, P. E. Koch, S. P. Norsett y J. M. Sanz-Serna, *On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products*, J. Approx. Theory **65** (1991), 151–175.
- [36] M. E. H. Ismail, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in one variable*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications Vol **98**, Cambridge University Press, Cambridge (2005).
- [37] M. E. H. Ismail y R. W. Ruedemann, *Relation between polynomials orthogonal on the unit circle with respect to different weights*, J. Approx. Theory **71** (1992), 39-60.
- [38] T. Kailath y B. Porat, *State-space generators for orthogonal polynomials*. En *Prediction Theory and Harmonic Analysis, The Pesi Massani Volume*. V. Mandrekar and H. Salehi, Editors. North-Holland, Amsterdam, 1983. 131-163.
- [39] R. Koekoek, *Generalizations of Laguerre Polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **153** (1990), 576–590.
- [40] R. Koekoek and H. G. Meijer, *A generalization of Laguerre Polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **24** (1993), 768–782.



- [41] D. C. Lewis, *Polynomial least square approximation*, Amer. J. of Math. **69** (1947), 273–278.
- [42] G. López Lagomasino, F. Marcellán y H. Pijeira, *Logarithmic Asymptotics of Contracted Sobolev Extremal Polynomials on the Real Line*, J. Approx. Theory **143** (2006), 62–73.
- [43] G. López Lagomasino y H. Pijeira, *Polinomios Ortogonales*, XIV Escuela Venezolana de Matemáticas, Mérida, Venezuela, 2001.
- [44] F. Marcellán, *Polinomios ortogonales no estándar. Aplicaciones en Análisis Numérico y Teoría de Aproximación*, Rev. Acad. Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales **30** (117) (2006), 563–579.
- [45] F. Marcellán, B. P. Osilenker e I. A. Rocha, *Problemas abiertos en series de Fourier de Jacobi-Sobolev*. En *MARGARITA MATEMATICA en memoria de José Javier (Chicho) Guadalupe Hernández*. Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño, España 2001. 183–189.
- [46] F. Marcellán y J. J. Moreno Balcázar, *Asymptotics and zeros of Sobolev orthogonal polynomials on unbounded supports*, Acta Appl. Math. **94** (2006), 163–192.
- [47] F. Marcellán, F. Peherstorfer y R. Steinbauer *Orthogonality properties of linear combinations of orthogonal polynomials I*, Adv. in Comput. Math. **5** (1996), 281–295.
- [48] ———, *Orthogonality properties of linear combinations of orthogonal polynomials II*, Adv. in Comput. Math. **7** (1997), 401–428.
- [49] F. Marcellán y A. Ronveaux, *On a class of polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product*, Indag. Math. (N.S.) **1** (1990), 451–464.
- [50] F. Marcellán y W. Van Assche, *Relative asymptotics for orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **72** (1993), 193–209.
- [51] A. Martínez Finkelshtein, *Bernstein-Szegő's Theorem for Sobolev Orthogonal Polynomials*, Constr. Approx. **16** (2000), 73–84.

- [52] \_\_\_\_\_, *Analytic Aspects of Sobolev Orthogonal Polynomials revisited*, J. Comput. Appl. Math. **127** (2001), 255–266.
- [53] A. Martínez Finkelshtein, J. J. Moreno-Balcázar, T. E. Pérez y M. A. Piñar, *Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs*, J. Approx. Theory **92** (1998), 280–293.
- [54] A. Martínez Finkelshtein, J. J. Moreno-Balcázar y H. Pijeira, *Strong asymptotics for Gegenbauer-Sobolev orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **81** (1997), 211–216.
- [55] H. G. Meijer, *Coherent pairs and zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials*, Indag. Math. (N.S.) **4** (1993), 93–112.
- [56] \_\_\_\_\_, *Zero distribution of orthogonal polynomials in a certain discrete Sobolev space*, J. Math. Anal. Appl. **172** (1993), 520–532.
- [57] \_\_\_\_\_, *A short history of orthogonal polynomials in a Sobolev space I. The non-discrete case*, Nieuw Arch. voor Wisk. **14** (1996), 93–112.
- [58] H. Pijeira, Y. Quintana y W. Urbina, *Zero localization and asymptotic behavior of orthogonal polynomials of Jacobi-Sobolev*, Rev. Col. Mat. **35** (2001), 77–97.
- [59] F. W. Schäfke, *Zu den orthogonalpolynomen von Althammer*, J. Reine Angew. Math. **252** (1972), 195–199.
- [60] B. Simon, *Orthogonal Polynomials on the unit circle. Part 1: Classical Theory*, Amer. Math. Soc., Colloq. Publ. Series vol **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [61] B. Simon, *Orthogonal Polynomials on the unit circle. Part 2: Spectral Theory*, Amer. Math. Soc., Colloq. Publ. Series vol **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [62] H. Stahl, *Orthogonal polynomials with respect to complex-valued measures*. En *Orthogonal polynomials and their applications. Proceedings Erice, 1990*. C. Brezinski et al. Editors. IMACS Annals Comput. and Appl. Math. **9**. J. C. Baltzer, Basel, 1991. 139-154.
- [63] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Colloq. Publ. Amer. Math. Soc. Vol **23**, (4th ed.), Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1975.

# INDICE ALFABÉTICO

- asintótica
  - fuerte escalada, 120
  - relativa escalada, 123
- circunferencia unidad, 5
- clase de Nevai, 19
- coeficientes de Verblunsky, 9, 51, 65
- condición de Szegő, 11
- ecuación holonómica, 127
- fórmula
  - de Christoffel-Darboux, 12
  - de Mehler-Heine, 117, 118
  - de recurrencia a tres términos, 3
- fórmulas de recurrencia
  - de Szegő, 7
- función
  - de Carathéodory, 30
  - de Schur, 30
  - delta de Dirac, 18
  - peso, 79
  - de Carathéodory, 49, 62
  - de Christoffel, 11
  - de segunda especie, 13
  - de Szegő, 11
  - de Freud, 93
  - exponencial, 94
- funcional de momentos, 106
  - regular o cuasi-definido, 106
- matriz
  - de Hessenberg, 31, 32, 37, 38, 41, 60
  - de Toeplitz, 8, 142
  - CMV, 74
  - polinomial ortogonal, 22
- medida
  - de Borel, 2, 22, 89
  - espectral, 5
  - absolutamente continua, 10
  - de variación acotada, 11
  - singular, 10
- momentos, 7, 31, 143
- núcleo reproductor, 12
- número de Mhaskar-Rakhmanov-Saff, 93, 94
- números de Mhaskar-Rakhmanov-Saff, 97
- operador multiplicación, 1, 6, 16

- ortogonalidad
  - múltiple, 22
  - no hermitiana, 23
- par coherente de medidas, 25
  - simétricamente coherente, 27
- par  $k$ -coherente de medidas, 89
- polinomios ortogonales
  - de Sobolev, 15
  - mónicos
    - de Sobolev, 15
  - ortonormales, 7, 9, 19, 32
  - ortonormales de Sobolev, 17
  - polinomio límite asociado, 26
  - de tipo Laguerre-Sobolev, 123
  - en la circunferencia unidad
    - mónicos, 8
- producto de Sobolev
  - forma de K. H. Kwon, 18
  - no diagonal, 17
  - diagonal o caso continuo, 18
  - discreto, 18
- producto interno de Sobolev, 14, 27
  - Gegenbauer-Sobolev, 27
  - Laguerre-Sobolev, 25
- propiedades asintóticas, 19, 95
- relaciones de recurrencia, 8
  - ascendente y descendente, 8
- sucesión estándar, 1
  - de polinomios ortogonales
    - mónicos, 2, 25, 89
- teorema
  - de Carathéodory-Toeplitz, 142
  - de Verblunsky, 10
  - espectral para operadores unitarios, 143
  - de Carathéodory-Toeplitz, 9
  - de Szegő-Kolmogorov-Krein, 11
- transformaciones espectrales, 35
  - transformaciones espectrales lineales
    - en la circunferencia unidad
      - Christoffel, 35, 40
      - Geronimus, 57
      - parte real, 57
      - Uvarov, 56
  - transformaciones espectrales racionales
    - transformación  $\mathcal{F}^{(N)}$ , 37
    - transformación  $\mathcal{F}_\Omega$ , 36
    - transformación de Aleksandrov, 36
      - en la circunferencia unidad
        - asociados de segunda especie, 35
    - transformación  $F^{(-N)}$ , 39