XXVI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA-VENEZUELA 2013

Matemáticas de las elecciones

Ramón Pino Pérez

Centro Interdisciplinario de Lógica y Álgebra
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes

pino@ula.ve

MÉRIDA, VENEZUELA, 1 AL 6 DE SEPTIEMBRE DE 2013

XXVI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana. La XXVI Escuela Venezolana de Matemáticas recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Banco Central de Venezuela, el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) y Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA).

2010 Mathematics Subject Classification: 91B14, 91B12, 91B10, 91B08, 91B06, 62Cxx

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
Rif: G-20004206-0

Matemáticas de las elecciones
Ramón Pino Pérez

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas
Preprensa e impresión: Gráficas Lauki C. A.
Depósito legal If66020135102421
ISBN 978-980-261-143-0
Caracas, Venezuela
2013

Índice general

Prefacio

La teoría de elección social estudia los procedimientos electorales y sus propiedades. Este libro trata de los modelos matemáticos de tales procedimientos.

El estudio sistemático de estos procedimientos comienza a mediados del siglo XX con los trabajos del economista Kenneth John Arrow. Influenciado por los trabajos de los lógicos de los inicios del siglo XX y en particular por la revolución gödeliana, Arrow hace un estudio axiomático de los procesos electorales. En su tesis doctoral publicada en 1951 demuestra su famoso teorema de imposibilidad. Este resultado puede interpretarse como la prueba matemática de la no existencia de sistemas electorales perfectos. Justamente en este libro veremos en detalle el contenido matemático de este teorema y de otros teoremas mayores en el dominio. En particular, veremos que los buenos sistemas electorales se pueden siempre manipular en un sentido que precisaremos en detalle en el capítulo dedicado a la manipulabilidad. La intuición es que en los buenos sistemas electorales siempre existe un individuo (un votante) que mintiendo en la manera de expresar su voto logra un resultado más satisfactorio de acuerdo a sus preferencias verdadaderas. Esto tiene lugar cuando hay más de 3 candidatos y en general más de 3 votantes.

Muchos de nosotros tiene familiaridad con los procesos electorales mayoritarios. Cada individuo escoge uno de los candidatos y al final del proceso se cuentan los votos que obtiene cada candidato. El ganador cuando existe es quien obtiene más votos (mayoría simple); o bien quien obtiene más de la mitad (mayoría absoluta) o alguna mayoría calificada. Veremos que estos procesos son robustos y justos sobre todo cuando hay dos candidatos. Pero cuando hay más de dos candidatos puede ser electo por mayoría simple un candidato que la mayoría de la población detesta. En el primer capítulo daremos un ejemplo preciso de esta situación. Ahora bien el estudio fino de los procesos electorales se vuelve interesante cuando hay más de dos candidatos (3 o más) y los votantes pueden expresar sus preferencias relativas entre los candidatos. Esto es justamente lo que ocupará la mayor parte de este trabajo.

Quisiera comentar el origen de mi interés por estos temas. En realidad vienen de una observación de David Makinson sobre un trabajo en colaboración con mi colega Sebastien Koniezny (entonces mi estudiante) sobre la fusión de la información representada en lógica proposicional. Makinson observó similitudes grandes entre la manera de abordar la fusión lógica y la teoría de eleccción social. En realidad la parte común en ambos enfoques viene de la manera de *agregar* preferencias. Esa es la parte central en ambas áreas. En lógica sin embargo hay que hacer surgir las preferencias mediante alguna métrica entre los mundos. Estas similitudes han dado origen a trabajos en lógica que usan técnicas de elección social y a trabajos en elección social que usa técnicas de inspiradas de la fusión lógica. Parte de ello será visto en uno de los capítulos de estas notas.

Organizamos este libro en 6 capítulos. El primero es una introducción a los sistemas electorales; sus conceptos básicos; sus propiedades. Daremos unos ejemplos de sistemas electorales e indicaremos sus propiedades. El segundo capítulo está dedicado al Teorema de imposibilidad de Arrow. El tercer capítulo al teorema de imposibilidad de Gibbard et Satterthwaite y algunas de sus variantes. El cuarto capítulo a estudiar preferencias estructuradas y algunas versiones de imposibilidad en este contexto. El quinto capítulo será dedicado a estudiar versiones generales de manipulabilidad basadas en levantamientos de preferencias, *i.e.* extensiones de las preferencias sobre los candidatos a preferencias sobre los conjuntos de candidatos. El sexto y último capítulo mostrará una apertura sobre definiciones de reglas de elección por aproximación a situaciones de consenso.

Agradezco infinitamente a mis estudiantes (muchos de ellos actualmente profesores) quienes han trabajado en estos temas y han contribuido con su interés, sus discusiones, sus ideas y su entusiasmo a enriquecer el material de este libro: Franklin Leal, Dubraska Salcedo, Amílcar Mata, Anthonny Arias y Bolivia Salcedo. Sin ellos, realmente creo, que este libro no hubiera sido posible.

Ramón Pino Pérez

Capítulo 1

Sistemas electorales

Los ingredientes esenciales en un sistema electoral son los individuos (los votantes) y los candidatos o alternativas. Llamaremos a N el conjunto de individuos. Supondremos, en general, que N es un conjunto finito con n elementos, digamos $\mathsf{N} = \{1 \ldots, n\}$. El conjunto de alternativas será denotado X y también supondremos que es un conjunto finito. En general, usaremos las primeras o las últimas letras del alfabeto a, b, c, d, x, y, z para denotar a los candidatos (con subíndices cuando sea necesario).

Cuando hay un solo candidato no hay mucho que decir sobre el resultado. Cuando hay dos, todo sistema electoral razonable será un tipo de sistema mayoritario. De igual manera cuando hay un único elector pues tampoco hay mucho que decir pues el resultado de la elección será lo que él decida. Cuando hay dos electores cualquier sistema razonable tiene problemas pues un elector puede querer justo lo contrario del otro y en esa situación no hay una opción razonable como resultado. Así que en general supondremos que hay 3 o más alternativas y también en general supondremos que hay 3 o más electores. Pero el ingrediente principal en lo que nos va a ocupar es la expresión concreta del voto de cada votante. Para tomar en cuenta de manera más precisa la opinión de cada votante se pensará que cada uno de ellos dará sus preferencias relativa entre los candidatos. En lo que sigue daremos una representación matemática de las preferencias.

1.1. Preferencias

Vamos a suponer que cada individuo (votante) i sabe cómo comparar dos candidatos a y b cualesquiera del conjunto de alternativas. El individuo i prefiere estrictamente uno de esos candidatos o bien le son indiferentes. Esa preferencia de i sobre los individuos debe ser coherente en el sentido de que si él prefiere a a b y b a c, necesariamente debe preferir a a c. Estas preferencias tienen una representación matemática bien precisa son relaciones binarias sobre el conjunto de alternativas llamadas preórdenes totales: relaciones binarias $\preceq$ que satisfacen la propiedad de totalidad $[\forall x, y \in X\ (x \preceq y \vee y \preceq x)]$ y la propiedad de transitividad $[\forall x, y, z \in X\ (x \preceq y \wedge y \preceq z\ \rightarrow\ x \preceq z)]$.

Así, para ser honestos, debemos decir, más bien, que el ingrediente principal de una votación es el conjunto de las preferencias de los individuos.

Las preferencias de un individuo i serán denotadas por $\preceq_i$, lo cual siempre será un preorden total sobre X, es decir una relación total y transitiva.

La relación estricta $\prec$ asociada a una relación de preferencia se define por $x \prec y$ ssi $x \preceq y$ y $y \npreceq x$. La relación estricta asociada a un preorden total es lo que se conoce como una relación modular, *i.e.* irreflexiva ($x \nprec x$) y negativamente transitiva ($x \nprec y \wedge y \nprec z\ \rightarrow\ x \nprec y$); la prueba de esto es un excelente ejercicio. La relación de indiferencia $\simeq$ asociada a un preorden total se define por $x \simeq y$ ssi $x \preceq y \wedge y \preceq x$. Es fácil ver que esa relación es de equivalencia. La relación de indiferencia $\sim\sim$ asociada a una relación modular $\prec$ se define por $x \sim y$ ssi $x \nprec y \wedge \not{y} \prec x$. Esa relación es de equivalencia también. Si uno parte de una relación modular (una preferencia estricta) $\prec$ puede definir una preferencia (laxa) asociada $\preceq$ de la siguiente manera: $x \preceq y$ ssi $x \prec y \vee x \sim y$. Se puede ver que la relación así definida es un preorden total. De hecho para los efectos de representar las preferencias de un individuo las relaciones $\preceq$ y $\prec$ vehiculan la misma información. Más precisamente dejamos al lector el siguiente ejercicio que precisa matemáticamente lo que queremos decir.

Ejercicio 1.1.1 *Dé las pruebas de las siguientes afirmaciones.*

1. *Sea $\preceq$ un preorden total. Sea $\prec$ su relación estricta asociada. Entonces $\prec$ es una relación modular.*

2. *Sea $\prec$ una relación modular. Sea $\preceq$ su relación laxa asociada. Entonces $\preceq$ es un preorden total.*

3. *Sea $\prec$ la relación estricta asociada un preorden total $\preceq$. La relación laxa asociada a $\prec$ es exactamente el preorden toal original $\preceq$.*

4. *Sea $\preceq$ el preorden total asociado a una relación modular $\prec$. La relación estricta asociada a $\preceq$ coincide con la relación original $\prec$.*

5. *$\prec$ es una relación modular sobre X ssi existe un conjunto I estrictamente ordenado por una relación $<$ (irreflexiva, transitiva y tal que para todo par de elementos diferentes x y y se tiene $x < y$ o bien $y < x$) y una función (de rango) $r : X \longrightarrow I$ tal que $x \prec y$ ssi $r(x) < r(y)$ (una tal función r se llama función de rango).*

Cuando $\preceq$ es preorden total sobre X definimos los minimales de un subconjunto V de X con respecto a $\preceq$, denotado por $min(V, \preceq)$

$$min(V, \preceq) = \{x \in V : \forall y \in V \ x \preceq y\}$$

Cuando $\prec$ es una relación modular sobre X definimos los minimales de un subconjunto V de X con respecto a $\prec$, denotado por $min(V, \prec)$

$$min(V, \prec) = \{x \in V : \forall y \in V \setminus \{x\}, \ \ x \prec y\}$$

Usaremos una representación gráfica de preórdenes totales por niveles. Por ejemplo si $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}$ un preorden total $\preceq$ puede ser representado por el siguiente diagrama

$$\begin{array}{c} a_1 \quad a_2 \quad a_7 \quad a_9 \\ a_3 \quad a_4 \quad a_8 \\ a_5 \quad a_6 \end{array}$$

Esto quiere decir que los minimales son exactamente las alternativas a_5 y a_6 y ellos son todos igualmente preferidos; luego viene el nivel a_3, a_4 y a_8, equivalentes entre ellos; finalmente los menos preferidos son a_1, a_2, a_7 y a_9 todos ellos igualmente preferidos. De hecho la relación modular asociada viene dada por la función de rango $r : X \longrightarrow \{1, 2, 3\}$, (el conjunto $\{1, 2, 3\}$ ordenado con el orden natural $<$) definida por $r^{-1}(1) = \{a_5, a_6\}$, $r^{-1}(2) = \{a_3, a_4, a_8\}$ y $r^{-1}(3) = \{a_1, a_2, a_7, a_9\}$.

Cuando se tiene una preferencia $\preceq$ y un subconjunto A de X no vacío denotamos por $\preceq\restriction_A$ a la relación $\preceq$ restringida al conjunto A. Por ejemplo si consideramos la relación anterior y $A = \{a_1, a_2, a_4, a_6\}$ la relación $\preceq\restriction_A$ luce de la manera siguiente:

$$\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ \multicolumn{2}{c}{a_4} \\ \multicolumn{2}{c}{a_6} \end{array}$$

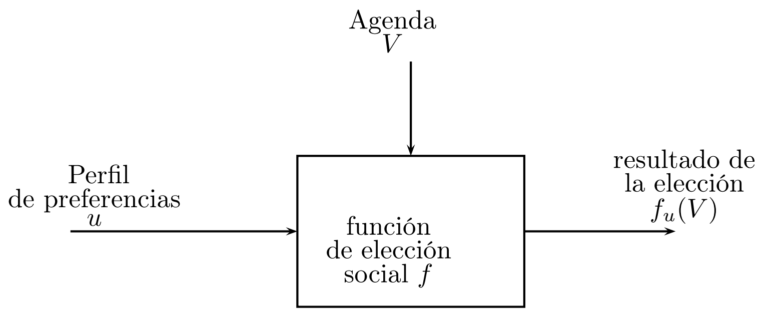
Al conjunto de preórdenes totales sobre X lo denotaremos P. Llamaremos *perfil* a un elemento de P^n, es decir a un vector de preórdenes totales de tamaño n. Se piensa que un perfil resume el resultado de un voto de la población N; la i-ésima componente de un perfil es la preferencia del individuo i. Los perfiles serán denotados con las letras u, v, w, con subíndices cuando sea necesario. Denotaremos por L al conjunto de órdenes lineales, es decir los preórdenes totales que satisfacen además la antisimetría ($x \preceq y \wedge y \preceq x \Rightarrow x = y$). A los perfiles restringidos a órdenes lineales los llamaremos L^n, *i.e.* un perfil $u = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ está en L^n cuando cada componente $\preceq_i$ es un orden lineal.

Llamaremos $\mathcal{P}^*(X)$ al conjunto $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$, es decir al conjunto de subconjuntos no vacíos de X. Llamaremos agenda a los elementos de $\mathcal{P}^*(X)$, *i.e.* a los conjuntos no vacíos de candidatos.

1.2. Funciones de elección social

En muchas situaciones la elección no se hace sobre todos los candidatos sino sobre un subconjunto de ellos. Ya sea porque algunos candidatos se retiran de la elección o porque quedan inhabilitados. Así, el mecanismo más general del que queremos dar cuenta es el siguiente: dado una votación, es decir un perfil, cómo seleccionar *los mejores* candidatos de un subconjunto de candidatos, es decir de una agenda.

El diagrama siguiente ilustra el mecanismo de las funciones de elección.



Más precisamente tenemos la siguiente definición de funciones de elección social:

Definición 1.2.1 *Una función de elección social es una función f tal que:*

$$f : \mathsf{P}^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X), \ \ y$$

$$f(u, V) \subseteq V, \quad \textit{para cualquier} \quad (u, V) \in \mathsf{P}^n \times \mathcal{P}^*(X)$$

$f(u, V)$ es el conjunto de las mejores alternativas de la agenda V, según las preferencias expresadas en el perfil u.

Algunas veces, f es una función parcial.

Escribimos $f_u(V)$ en lugar de $f(u, V)$ y algunas veces nos referiremos a una función de elección social diciendo simplemente una función de elección.

Veamos algunos ejemplos.

1.2.1. Regla por Mayoría Simple

A veces a ciertas funciones de elección social se les llama reglas y se le acompaña el con el nombre del proceso que define la regla (*v.g. regla por simple*) o el inventor del proceso (*v.g. regla de Condorcet*). Sin embargo más adelante usaremos el nombre de *regla de voto* para distinguir ciertos procesos bien precisos y un poco diferentes de las funciones de elección social.

Sean $X = \{x, y\}$ y $\mathsf{N} = \{1, \ldots, n\}$. Definimos f solo para los pares de la forma (u, X) con $u \in \mathcal{P}$, porque en los casos de las agendas $V = \{x\}$ y $V = \{y\}$ el resultado es trivial.

$$f_u(X) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } \Big|\{i \in \mathsf{N} : x \prec_i y\}\Big| > \Big|\{i \in \mathsf{N} : y \prec_i x\}\Big| \\ \{y\} & \text{si } \Big|\{i \in \mathsf{N} : y \prec_i x\}\Big| > \Big|\{i \in \mathsf{N} : x \prec_i y\}\Big| \\ \{x,y\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta regla de elección se llama Regla por Mayoría Simple.

Ejemplo 1.2.2 *Sea $n = 3$. Considere el siguiente perfil u:*

$$u = \left(\begin{array}{ccc} x & x & y \\ \underbrace{y}_{\preceq_1} & \underbrace{y}_{\preceq_2} & \underbrace{x}_{\preceq_3} \end{array} \right),$$

$f_u(\{x,y\}) = \{y\}$, *porque* $\Big|\{i \in \mathsf{N} : y \prec_i x\}\Big| = 2 > 1 = \Big|\{i \in \mathsf{N} : x \prec_i y\}\Big|$.

Ahora, si

$$u = \left(\begin{array}{ccc} & y & x \\ \underbrace{x\ y}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{y}_{\preceq_3} \end{array} \right),$$

entonces $f_u(\{x,y\}) = \{x,y\}$.

1.2.2. Regla por Mayoría Absoluta

Sean $X = \{x, y\}$ y $N = \{1, \dots, n\}$. De nuevo definimos f, la regla de Mayoría Absoluta, sólo para los pares de la forma (u, X) con $u \in \mathcal{P}$.

$$f_u(X) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } \Big|\{i \in \mathsf{N} : x \prec_i y\}\Big| > n/2 \\ \{y\} & \text{si } \Big|\{i \in \mathsf{N} : y \prec_i x\}\Big| > n/2 \\ \{x,y\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.3 *Sea $n = 4$. Consideremos el siguiente perfil u:*

$$u = \left(\begin{array}{cccc} y & y & x & y \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{y}_{\preceq_3} & \underbrace{x}_{\preceq_4} \end{array} \right),$$

entonces $f_u(\{x,y\}) = \{x\}$, *porque* $\Big|\{i \in \mathsf{N} : x \prec_i y\}\Big| = 3 > 2$.

Notemos que en este caso obtenemos el mismo resultado si usamos Mayoría Simple o Mayoría Absoluta. También esto ocurre en las situaciones del ejemplo 1.2.2.

Ahora, si

$$u = \left(\begin{array}{cccc} y & y & & x \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{x\ y}_{\preceq_3} & \underbrace{y}_{\preceq_4} \end{array} \right),$$

entonces según la Regla por Mayoría Absoluta x e y son escogidos, mientras que la Regla por Mayoría Simple da como ganadora a la alternativa x.

En resumen, cuando x es escogido por Mayoría Absoluta también es escogido por Mayoría Simple, pero la recíproca no es cierta.

1.2.3. Una Generalización de Mayoría Simple, Ganadores de Condorcet y La Paradoja del Voto

En general, el conjunto de alternativas tiene más de dos elementos, y dada la aceptación de la Regla por Mayoría Simple, surge la idea de generalizar esta regla para más de dos alternativas.

Veamos una manera de generalizar para $X = \{x, y, z\}$. La idea central es aplicar Mayoría Simple a cada par de alternativas posible, es decir, aplicar Mayoría Simple a $\{x, y\}$, $\{y, z\}$ y $\{x, z\}$.

Definición 1.2.4 *Una alternativa es llamada Ganador de Condorcet*[1] *si gana o al menos empata en cada votación de pares en la cual participa.*

Así, definimos una nueva regla de la manera siguiente:

$$f_u(V) = \{x \in V : x \text{ es ganador de Condorcet}\}$$

Mas adelante veremos que se puede aplicar esta regla a conjuntos de alternativas X de cualquier cardinalidad finita.

Ejemplo 1.2.5 *Sean* $N = \{1, 2, 3\}$ *y* $X = \{x, y, z\}$.

[1]Condorcet fue uno de los primeros a contribuir a la teoría de elección social (ver [10, 31, 32])

Supongamos $V = \{x, y, z\}$ *y*

$$u = \left(\begin{array}{ccc} y & y & y \\ z & x & x \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{z}_{\preceq_2} & \underbrace{z}_{\preceq_3} \end{array} \right).$$

Aplicamos Mayoría Simple a los pares $\{x, y\}, \{y, z\}$ *y* $\{x, z\}$ *y tenemos que:*

- x *le gana a* y*, pero* x *pierde con* z*. Así,* x *no es ganador de Condorcet.*
- *Como* x *le gana a* y*,* y *no puede ser ganador de Condorcet.*
- z *le gana a* y*. También* z *le gana a* x*. Así,* z *es el único ganador de Condorcet.*

Por lo tanto, $f_u(V) = \{z\}$.

Ejemplo 1.2.6 *Consideremos ahora*

$$u = \left(\begin{array}{ccc} z & x & y \\ y & z & x \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{y}_{\preceq_2} & \underbrace{z}_{\preceq_3} \end{array} \right).$$

Al aplicar Mayoría Simple a $\{x, y\}, \{y, z\}$ *y* $\{x, z\}$ *tenemos que* x *le gana a* y*,* y *le gana a* z*, pero* z *la gana a* x*.*

Esta es una situación, que nos genera una cierta idea de contradicción, puesto que esperaríamos, por transitividad, que que x *le ganase a* z *ya que* x *le gana a* y *que a su vez le gana a* z*. Pero como vimos, en realidad,* z *le gana a* x*. Esta situación es conocida como* ***La Paradoja del Voto***[2].

El ejemplo precedente nos muestra una regla que es parcial.

Otro paradoja interesante que podemos observar es que si se vota por un sólo candidato, por mayoría simple podemos elegir el candidato menos preferido. El siguiente ejemplo con tres alternativas ilustra esta situación.

[2] Ver [24]

Ejemplo 1.2.7 *Sea $X = \{x, y, z\}$ y $|N| = 7$. Considere u el siguiente perfil que representa las preferencias completas de los electores*

$$u = \left(\begin{array}{ccccccc} x & x & x & z & z & z & z \\ y & y & y & x & x & y & y \\ \underbrace{z}_{\preceq_1} & \underbrace{z}_{\preceq_2} & \underbrace{z}_{\preceq_3} & \underbrace{y}_{\preceq_4} & \underbrace{y}_{\preceq_5} & \underbrace{x}_{\preceq_6} & \underbrace{x}_{\preceq_7} \end{array} \right).$$

Si cada elector vota por su candidato más preferido gana z pues obtiene 3 votos mientras que x obtiene 2, igual que el candidato y. Sin embargo se puede observar que hay 4 electores para quienes el candidato z es el menos preferido.

Para paliar los efectos de la paradoja del voto, Borda[3] [7] (ver también [32]) propone una nueva regla, que lleva su nombre y que presentaremos en la siguiente sección.

1.2.4. Otros ejemplos de reglas de elección

En esta sección continuaremos dando algunos ejemplos de reglas de elección.

Definición 1.2.8 (Regla de la Identidad.) *Ella es la regla $f : P^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ definida por por*

$$f_u(V) = V$$

Esta función es poco interesante porque, a pesar de estar bien definida, es una regla que no considera la opinión de los votantes, dando como ganadores a todas las alternativas de la agenda.

Definición 1.2.9 (Regla de la Proyección.) *Ella es la regla $f : P^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ definida por*

$$f_u(V) = min(V, \preceq_1)$$

Esta regla de elección es llamada Regla de la Proyección.

Esta regla no parece ser muy buena, ya que sólo toma en cuenta las preferencias de un solo individuo, el individuo 1.

[3] Jean-Charles de Borda, matemático francés (1733-1799) a quien se le debe el ejemplo de la Paradoja del voto (ver [30]).

Definición 1.2.10 (Regla de Condorcet.) *Dado un perfil* $u = (\preceq_1 \ , \preceq_2 \ , \ldots, \preceq_n)$*, un conjunto finito de alternativas* $X = \{x, y, \ldots\}$ *y una agenda* V*, definimos* $N_{x,y} = |\{i : x \prec_i y\}|$*. Decimos que* x *es un Ganador de Condorcet de* V *relativo a* u *si para todo* $y \in V,\ N_{x,y} \geq N_{y,x}$*.*

Notemos que esta definición es consistente con la definición 1.2.4

Definimos

$$f_u^C(V) = \big\{x \in V : x \text{ es ganador de Condorcet de } V \text{ relativo a } u\big\}.$$

Esta función de elección es llamada Regla de Condorcet.

Ejemplo 1.2.11 *Sean* $\mathsf{N} = \{1, 2, 3\}$ *y* $X = \{t, x, y, z\}$*.*

Si $V = X$ *y*

$$u = \left(\begin{array}{ccc} t & x & y \\ z & z & x \\ y & y & z \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{t}_{\preceq_2} & \underbrace{t}_{\preceq_3} \end{array} \right),$$

como,

- $N_{x,t} = 1 < N_{t,x} = 2,$
- $N_{y,t} = 1 < N_{t,y} = 2,$
- $N_{z,t} = 1 < N_{t,z} = 2,$

entonces t *es el único ganador de Condorcet. Así,* $f^C(V) = \{t\}$*.*

El ejemplo 1.2.6 nos muestra que f^C *es una regla parcial.*

Definición 1.2.12 (Regla de Pareto.) *Sean* $x, y \in X$ *y* u *un perfil. Decimos que* x *es Pareto superior a* y *en* u *si para todo* i*,* $x \preceq_i y$ *y existe* j *tal que* $x \prec_j y$*.*

Definimos

$$f_u(V) = \{x \in V : \forall y \in V, y \neq x, x \text{ es pareto superior a } y \text{ en } u\}.$$

Esta regla de elección es llamada Regla de Pareto.

Ejemplo 1.2.13 *Sean* $\mathsf{N} = \{1,2,3\}$ *y* $X = \{x,y,z\}$.

Si

$$u = \left(\begin{array}{ccc} z & y & \\ y & z & \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{x\ z\ y}_{\preceq_3} \end{array} \right)$$

entonces, x *es Pareto Superior a* y *en* u*; también* x *es Pareto superior a* z *en* u*, por lo tanto,* $f_u(V) = \{x\}$.

Notemos que esta regla tampoco esta definida para la situación del ejemplo 1.2.6.

Podemos forzar cada regla a ser total, dando como ganadores a todas la alternativas de la agenda, en los casos en que la función no esté definida.

Las reglas que definiremos a continuación son funciones totales.

Definición 1.2.14 (Regla de Condorcet Ordenada.) *Consideremos* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *un conjunto de preferencias ordenado (con el orden natural de los subíndices). Las agendas son de la forma* $V = \{x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}$ *con* $i_0 < i_1 < \ldots < i_m$. *Definimos*

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & \begin{cases} x_{i_0} & \textit{si } N_{x_{i_0},x_{i_1}} \geq N_{x_{i_1},x_{i_0}} \\ x_{i_1} & \textit{en otro caso} \end{cases} \\ y_2 & = & \begin{cases} y_1 & \textit{si } N_{y_1,x_{i_2}} \geq N_{x_{i_2},y_1} \\ x_{i_2} & \textit{en otro caso} \end{cases} \\ & \vdots & \\ y_m & = & \begin{cases} y_{m-1} & \textit{si } N_{y_{m-1},x_{i_m}} \geq N_{x_{i_m},y_{m-1}} \\ x_{i_m} & \textit{en otro caso} \end{cases} , \end{array}$$

y finalmente $f_u(V) = \{y_m\}$.

Notemos que esta regla es una generalización de Mayoría Simple que siempre da como resultado un único ganador y es llamada Regla de Condorcet Ordenada.

Ejemplo 1.2.15 *Sean* $\mathsf{N} = \{1,2,3,4\}$ *y* $X = \{w,x,y,z\}$ *ordenado alfabéticamente.*

Si $V = X$ *y*

$$u = \left(\begin{array}{cccc} & z & w & w \\ y\ z & x & y & y \\ x & w & z & z \\ \underbrace{w}_{\preceq_1} & \underbrace{y}_{\preceq_2} & \underbrace{x}_{\preceq_3} & \underbrace{x}_{\preceq_4} \end{array} \right),$$

veamos cómo se obtiene $f_u(V)$.

- $N_{w,x} = 2 = N_{x,w} \Rightarrow y_1 = w$
- $N_{w,y} = 1 < 3 = N_{y,w} \Rightarrow y_2 = y$
- $N_{y,z} = 1 < 2 = N_{z,y} \Rightarrow y_3 = z$

Por lo tanto, $f_u(V) = \{z\}$.

Definición 1.2.16 (Regla de Borda.) *Dado un perfil* u *digamos* $u = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$, *a cada* $x \in X$ *podemos asociarle un número natural* $r_i(x)$, *que corresponde al nivel donde* x *se encuentra en el preorden total* $\preceq_i$. *Formalmente,* $r_i(x)$ *es una función definida de la manera siguiente:* $r_i(x) = m$ *ssi* m *es el mayor entero tal que existen* $x_o, x_1, \ldots, x_m$ *en* X *con* $x_j \prec_i x_{j+1}$ *y* $x_m = x$. *Ahora definimos*

$$r_u(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i(x), \text{ y}$$

$$f_u^B(V) = \{x \in V : r_u(x) \leq r_u(y), \forall y \in V\}.$$

Esta regla de elección es llamada Regla de Borda.

Ejemplo 1.2.17 *Sean* $\mathsf{N} = \{1, 2, 3\}$ *y* $X = \{x, y, z\}$.
Supongamos

$$u = \left(\begin{array}{ccc} z & y & \\ y & z & \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{x\ z\ y}_{\preceq_3} \end{array} \right).$$

Veamos cómo se obtiene $f_u^B(X)$.

- $r_u(x) = 0$
- $r_u(y) = 3$
- $r_u(z) = 3$

Por lo tanto, $f_u^B(X) = \{x\}$.

Ejemplo 1.2.18 *Esta regla da como ganadores a todas la alternativas de la agenda en la situación de ejemplo 1.2.6.*

Ejemplo 1.2.19 *(1) Consideremos la siguiente situación:*

$\mathsf{N} = \{1, 2, 3\}$ *y* $X = \{w, x, y, z\}$.

Si $V = X$ *y*

$$u = \begin{pmatrix} w & w & w \\ z & y & x \\ y & x & z \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{z}_{\preceq_2} & \underbrace{y}_{\preceq_3} \end{pmatrix}$$

tenemos que:

- $r_u(w) = 9$
- $r_u(x) = 3$
- $r_u(y) = 3$
- $r_u(z) = 3$

Por lo tanto, $f_u^B(X) = \{x, y, z\}$.

Por otro lado,

- $N_{x,y} = N_{y,z} = N_{z,x} = 2$
- $N_{y,x} = N_{z,y} = N_{x,z} = 1$
- $N_{x,w} = N_{y,w} = N_{z,w} = 3$
- $N_{w,x} = N_{w,y} = N_{w,z} = 0$

Así, tenemos que no hay Ganador de Condorcet.

(2) Tomemos ahora, $\mathsf{N} = \{1,2,3\}$ *y* $X = \{t,w,x,y,z\}$.

Si $V = X$ *y*

$$u = \begin{pmatrix} w & w & x \\ t & t & t \\ z & z & w \\ y & y & z \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{y}_{\preceq_3} \end{pmatrix}$$

tenemos que:

- $r_u(t) = 9$
- $r_u(w) = 10$
- $r_u(x) = 4$
- $r_u(y) = 2$
- $r_u(z) = 5$

Por lo tanto, $f_u^B(X) = \{y\}$.

Por otro lado,

- $N_{x,y} = 2 > 1 = N_{y,x}$
- $N_{x,z} = 2 > 1 = N_{z,x}$
- $N_{x,w} = 2 > 1 = N_{w,x}$
- $N_{x,t} = 2 > 1 = N_{t,x}$

Por lo tanto, $f_u^C(V) = \{x\}$.

Así, $x \in V$*, es un Ganador de Condorcet, pero y* $x \notin f_u^B(V)$*, es decir, un ganador de Condorcet no es necesariamente un ganador de Borda.*

Esto nos dice que los ganadores de Condorcet no son necesariamente elegidos por Borda, es decir muchas veces se tiene $f_u^C(V) \not\subseteq f_u^B(V)$.

1.3. Postulados

En esta sección vamos a introducir algunos postulados que una regla de elección "justa" debería satisfacer. Los ilustraremos con ejemplos.

En lo que sigue f denota una regla de elección.

Definición 1.3.1 *f satisface el postulado de **Dominio Estándar(DE)** si:*

i) Hay al menos tres elementos en X,

ii) Hay al menos tres elementos en N, y

iii) f está definida para todos los posibles pares de $\mathsf{P}^n \times \mathcal{P}^*(X)$.

Definición 1.3.2 *f satisface el postulado de **Anonimato (A)** si, dados dos perfiles u, u' tales que u' es una permutación de u entonces $f_u(V) = f_{u'}(V), \forall V \in \mathcal{P}^*(X)$.*

Es bastante claro que todas las reglas que hemos definido hasta ahora, excepto la Regla de la Proyección, satisfacen este postulado.

Definición 1.3.3 *i es dictador si para todo $u \in \mathsf{P}^n$ y todo $V \in \mathcal{P}^*(X)$*

$$x \prec_i y \ \wedge \ x \in V \Longrightarrow y \notin f_u(V)$$

*Diremos que f es **Dictatorial** si existe $i \in \mathsf{N}$ tal que i es dictador.*

*Algunas veces, en lugar de escribir que f no es dictatorial escribiremos simplemente f es **ND**.*

Que f sea no dictatorial es por supuesto el postulado deseable para una regla de elección.

Ejemplo 1.3.4 *La Regla de la Proyección, es claramente una regla dictatorial. Allí el individuo 1 es el dictador.*

Veremos inmediatamente que una regla de elección no puede al mismo tiempo satisfacer el postulado de anonimato y ser dictatorial.

Proposición 1.3.5 *Sea f es una regla de elección total, $|X| > 1$ y $|N| > 1$. Si f es dictatorial entonces f no satisface el postulado de Anonimato.*

Demostración: f dictatorial significa que existe $i \in N$ tal que i es un dictador. Sin pérdida de generalidad supongamos $i = 1$.

Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Ellos existen porque $|X| > 1$. Sea $u = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ definido por

$$u = \left(\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & & \vdots \\ y & x & & x \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{y}_{\preceq_2} & \cdots & \underbrace{y}_{\preceq_n} \end{array} \right)$$

Como $|N| > 1$, por lo menos los dos primeros individuos del perfil existen.

Como el individuo 1 es un dictador entonces $y \notin f_u(\{x, y\})$. Como f es total $f_u(\{x, y\}) = \{x\}$.

Tomemos $u' = (\preceq_2, \preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ el perfil que resulta de permutar los dos primeros elementos de u. Luego, como el primer individuo es un dictador entonces $x \notin f_{u'}(\{x, y\})$. Como f es total $f_{u'}(\{x, y\}) = \{y\}$. Así, $f_u(\{x, y\}) \neq f_{u'}(\{x, y\})$. De donde se deduce que f no satisface el postulado de Anonimato.

∎

Definición 1.3.6 *f satisface el postulado de* ***Pareto Fuerte (PF)*** *si, para todo perfil u y para toda agenda V si se cumplen las tres propiedades siguientes:*

(i) $x \in V$, *y*

(ii) $\forall i, x \preceq_i y$

(iii) $\exists j$ *tal que* $x \prec_j y$,

necesariamente $y \notin f_u(V)$.

Definición 1.3.7 *f satisface el postulado de* ***Pareto Débil (PD)*** *si, para todo perfil u y para toda agenda V si se cumplen las dos propiedades siguientes:*

(i) $x \in V$, *y*

(ii) $\forall i, x \prec_i y$,

necesariamente $y \notin f_u(V)$.

Notemos que Pareto Fuerte implica Pareto Débil. Estas propiedades han sido también consideradas en la fusión lógica [35, 36].

Ejemplo 1.3.8 *(1)* ***La Regla de la Proyección no satisface PF.***

En efecto, sean $X = \{t, x, y\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, *y*

$$u = \left(\begin{array}{ccc} & t & t \\ t & y & y \\ \underbrace{x\ y}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{x}_{\preceq_3} \end{array} \right)$$

Luego, $f_u(X) = \{x, y\}$. *Pero observe que*

- $x \in V = X$,
- $\forall i, x \preceq_i y$,
- $\exists j[x \prec_i y]$, *por ejemplo* $j = 2$. *Además*
- $y \in f_u(V)$

*Por lo tanto (***PF***) no se cumple.*

(2) ***La Regla de la Proyección satisface PD.***

Sean $u = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ *un perfil,* $x, y \in X$ *y* V *una agenda, tales que:*

i) $x \in V$, *y*

ii) $\forall i, x \prec_i y$

Por (ii) tenemos que $x \prec_1 y$. *Luego, por i) tenemos que* $y \notin min(V, \prec_1)$. *Es decir,* $y \notin f_u(V)$. *Por lo tanto,* f *satisface* ***PD****.*

3) ***La Regla de Borda,*** f^B***, satisface los postulados de Pareto.***

En efecto, sean u *un perfil y* V *una agenda tales que se cumplen:*

(i) $x \in V$,

(ii) $\forall i, x \preceq_i y$, *y*

(iii) $\exists j$ *tal que* $x \prec_j y$

Debemos mostrar que $y \notin f_u^B(V)$.

Por (ii) tenemos que $r_i(x) \leq r_i(y), \forall i \in \mathsf{N}$. *Luego, por (iii), para algún* j, $r_j(x) < r_j(y)$. *Así, por propiedades estándares de la suma* $\Sigma_{i=1}^n r_i(x) < \Sigma_{i=1}^n r_i(y)$, *es decir* $r_u(x) < r_u(y)$. *Por (i) y la definición de* $f_u^B(V)$ *tenemos lo deseado.*

Definición 1.3.9 $u \upharpoonright_V$ *denota el perfil* u *restringido a la agenda* V.

Ejemplo 1.3.10 *Si* $X = \{t, w, x, y, z\}$, $\quad V = \{t, w, \}$ *y*

$$u = \left(\begin{array}{ccc} w & w & x \\ t & t & t \\ z & z & w \\ y & y & z \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{y}_{\preceq_3} \end{array} \right)$$

tenemos que:

$$u \upharpoonright_V = \left(\begin{array}{ccc} w & w & t \\ \underbrace{t}_{\preceq_1} & \underbrace{t}_{\preceq_2} & \underbrace{w}_{\preceq_3} \end{array} \right)$$

Definición 1.3.11 f *satisface el postulado de* ***Independencia de Alternativas Irrelevantes(IAI)*** *si, para cada par de perfiles* u *y* u' *y cada agenda* V *tales que* $u \upharpoonright_V = u' \upharpoonright_V$ *se tiene* $f_u(V) = f_{u'}(V)$.

Ejemplo 1.3.12 *(1)* ***La Regla de la Proyección satisface IAI***

Sean $u = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$, $u' = (\preceq'_1, \ldots, \preceq'_n)$ *perfiles y* V *una agenda, tales que* $u \upharpoonright_V = u' \upharpoonright_V$. *Luego, para cada* i $\preceq_i \upharpoonright_V = \preceq'_i \upharpoonright_V$, *en particular,* $\preceq_1 \upharpoonright_V = \preceq'_1 \upharpoonright_V$. *De donde,* $min(\preceq_1, V) = min(V, \preceq'_1)$. *O lo que es equivalente,* $f_u(V) = f_{u'}(V)$. *Por lo tanto,* f *satisface* ***IAI***.

(2) ***La Regla de Borda,*** f^B***, no satisface IAI***

En efecto, sean $X = \{t, w, x, y, z\}$, $V = \{x, t, w\}$ *y* u, u' *los perfiles siguientes:*

$$u = \begin{pmatrix} w & w & y & y \\ t & t & x & x \\ z & z & z & z \\ y & y & w & w \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{t}_{\preceq_3} & \underbrace{t}_{\preceq_4} \end{pmatrix}, \quad u' = \begin{pmatrix} z & z & y & y \\ y & y & z & z \\ w & w & x & x \\ t & t & w & w \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{x}_{\preceq_2} & \underbrace{t}_{\preceq_3} & \underbrace{t}_{\preceq_4} \end{pmatrix}$$

Claramente $u \restriction_V = u' \restriction_V$. *Sin embargo, vamos a ver que* $f_u(V) \neq f_{u'}(V)$. *En efecto, tenemos por una parte*

$$\left.\begin{array}{rcl} r_u(x) & = & 6 \\ r_u(t) & = & 6 \\ r_u(w) & = & 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow f_u^B(V) = \{x, t\}$$

Por otra parte tenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} r_{u'}(x) & = & 4 \\ r_{u'}(t) & = & 2 \\ r_{u'}(w) & = & 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow f_{u'}^B(V) = \{t\}.$$

Así, claramente $f_u(V) \neq f_{u'}(V)$.

Definición 1.3.13 f *satisface el postulado de* ***Explicaciones Transitivas (ET)*** *si para cada perfil* u *existe un preorden total* $\preceq_u$ *tal que para cada agenda* V, $f_u(V) = min(V, \preceq_u)$.

Ejemplo 1.3.14 *(1)* ***La Regla de la Proyección satisface ET***

Tomamos para cada $u = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$, $\preceq_u = \preceq_1$.

Luego, trivialmente, $f_u(V) = min(V, \preceq_u)$. *Así,* f *satisface* ***ET***.

2) ***La Regla de Borda,*** f^B***, satisface ET***

Sea $u = (\preceq_1, \preceq_2, \ldots, \preceq_n) \in \mathcal{P}$.

Definimos $\preceq'_u$ *de la siguiente manera:*

$$x \preceq'_u y \Longleftrightarrow r_u(x) \leq r_u(y)$$

La relación $\preceq'_u$ *es reflexiva y transitiva porque* $\leq$ *es reflexiva y transitiva. Luego, para mostrar que* $\preceq'_u$ *es un preorden total solo* *falta ver que es total. En efecto, sean $x, y \in X$. Luego, $r_u(x) \leq r_u(y)$ ó $r_u(y) \leq r_u(x)$. Es decir, $x \preceq'_u y$ ó $y \preceq'_u x$.*

Finalmente que $f^B_u(V) = min(V, \preceq'_u)$ se deduce inmediatamente de la definición de f^B y la definición de $\preceq'_u$.

La proposición siguiente es una herramienta fundamental en la prueba del teorema central del capítulo 2.

Proposición 1.3.15 *Si f satisface Explicaciones Transitivas ($f_u(V) = min(V, \preceq_u)$) entonces $\preceq_u$ es único y está caracterizado por*

$$x \preceq_u y \Longleftrightarrow x \in f_u(\{x, y\})$$

Demostración: Sea f una función de elección social que satisface el postulado de Explicaciones Transitivas ($f_u(V) = min(V, \preceq_u)$).

Definimos para cada perfil u, la relación $\preceq_u^{'}$ como sigue:

$$x \preceq_u^{'} y \Longleftrightarrow x \in f_u(\{x, y\})$$

Sea $u \in \mathcal{P}$. Veamos que $\preceq_u^{'}$ es un preorden total.

- Totalidad.

  Sean $x, y \in X$.

  Consideremos la agenda $\{x, y\}$. $x \in min(\{x, y\}, \preceq_u)$ ó $y \in min(\{x, y\}, \preceq_u)$.

  Como f satisface el postulado de Explicaciones Transitivas entonces $x \in f_u(\{x, y\})$ ó $y \in f_u(\{x, y\})$. Es decir, $x \preceq_u^{'} y$ ó $y \preceq_u^{'} x$.

- Reflexividad.

  Para cada $x \in X$, $\{x\} = min(\{x\}, \preceq_u)$. Luego, $x \in f_u(\{x\})$. Por lo tanto, $x \preceq_u^{'} x$.

- Transitividad.

  Supongamos que $x \preceq_u^{'} y$ y $y \preceq_u^{'} z$. Es decir, $x \in f_u(\{x, y\})$ y $y \in f_u(\{y, z\})$. Y veamos que $x \preceq_u^{'} z$, es decir, que $x \in f_u(\{x, z\})$.

Como f satisface Explicaciones Transitivas entonces $x \in min(\{x,y\}, \preceq_u)$ y $y \in min(\{y,z\}, \preceq_u)$. Es decir, $x \preceq_u y$ y $y \preceq_u z$. Luego, por la transitividad de $\preceq_u$ tenemos que $x \preceq_u z$. Así, $x \in min(\{x,z\}, \preceq_u)$. Luego, $x \in f_u(\{x,z\})$.

Así, hemos mostrado que $\preceq_u'$ es un preorden total.

Veamos ahora que $min(V, \preceq_u') = f_u(V)$ y que es el único preorden con esta propiedad.

- $min(V, \preceq_u') = f_u(V)$

  Sea $x \in X$.

$$\begin{array}{rcl} x \in min(V, \preceq_u') & \Leftrightarrow & x \preceq_u' y, \forall y \in V \\ & \Leftrightarrow & x \in f_u(\{x,y\}), \forall y \in V \\ & \Leftrightarrow & x \in min(\{x,y\}, \preceq_u), \forall y \in V \\ & \Leftrightarrow & x \preceq_u y, \forall y \in V \\ & \Leftrightarrow & x \in min(V, \preceq_u) \\ & \Leftrightarrow & x \in f_u(V) \end{array}$$

- $\preceq_u'$ es único.

  Sea $\preceq_u'$ un preorden total tal que $f_u(V) = min(V, \preceq_u')$. Veamos que $\preceq_u' = \preceq_u$.

  Sean $x, y \in X$.

$$\begin{array}{rcl} x \preceq_u' y & \Leftrightarrow & x \in min(\{x,y\}, \preceq_u') = f_u(\{x,y\}) = min(\{x,y\}, \preceq_u) \\ & \Leftrightarrow & x \preceq_u y \end{array}$$

∎

Es natural preguntarse si hay una caracterización de la propiedad (**ET**). La respuesta a esta pregunta es positiva y damos la caracterización que conocemos de inmediato (estas técnicas ya aparecen en los trabajos sobre la fusión lógica [27]).

Proposición 1.3.16 (Caracterización de Explicaciones Transitivas[4]) *La función f satisface Explicaciones Transitivas si y solo si f es total y, para cada perfil u y cada par de agendas V y V' tales que $V \cap V' \neq \emptyset$ se cumple:*

(i) $f_u(V) \cap V' \subseteq f_u(V \cap V')$, *y*

(ii) $f_u(V \cap V') \subseteq f_u(V) \cap V'$, *si este último conjunto no es vacío.*

Demostración:

($\Longleftarrow$) Sea $u \in \mathcal{P}$. Debemos mostrar que existe un preorden total $\preceq_u$ tal que para toda agenda V se tiene $f_u(V) = min(V, \preceq_u)$. Definimos $\preceq_u$ de la manera siguiente:

$$x \preceq_u y \Longleftrightarrow x \in f_u(\{x, y\})$$

Veamos que $\preceq_u$ es un preorden total.

(1) Totalidad.

Sean $x, y \in \mathbf{X}$. Como $f_u(\{x, y\}) \neq \emptyset$ y $f_u(\{x, y\}) \subseteq \{x, y\}$ entonces $x \in f_u(\{x, y\})$ ó $y \in f_u(\{x, y\})$. Luego, $x \preceq_u y$ ó $y \preceq_u x$.

(2) Transitividad.

Supongamos que $x \preceq_u y \quad \wedge \quad y \preceq_u z$. Veamos que $x \preceq_u z$, lo cual es equivalente a $x \in f_u(\{x, z\})$. Notemos que si $x \in f_u(\{x, y, z\})$ entonces $x \in f_u(\{x, z\})$. En efecto, por (i), $f_u(\{x, y, z\}) \cap \{x, z\} \subseteq f_u(\{x, z\})$. Así, basta mostrar que $x \in f_u(\{x, y, z\})$. Por reducción al absurdo, supongamos que $x \notin f_u(\{x, y, z\})$. Luego, $x \notin f_u(\{x, y, z\}) \cap \{x, y\}$. Como $f_u(\{x, y, z\}) \cap \{x, y\}$ es una de las siguientes opciones $\{x, y\}$, $\{x\}$, $\{y\}$ o bien $\emptyset$, necesariamente se tiene que $f_u(\{x, y, z\}) \cap \{x, y\}$ es $\{y\}$ o bien $\emptyset$.

3.1) Si $f_u(\{x, y, z\}) \cap \{x, y\} = \{y\}$, por (i) y (ii) $\{y\} = f_u(\{x, y\})$. Esto contradice la hipótesis de que $x \preceq_u y$.

3.2) Suponga $f_u(\{x, y, z\}) \cap \{x, y\} = \emptyset$. Como $f_u(\{x, y, z\}) \neq \emptyset$ y $f_u(\{x, y, z\}) \subseteq \{x, y, z\}$ entonces $f_u(\{x, y, z\}) = \{z\}$. Luego, $f_u(\{x, y, z\}) \cap \{y, z\} = \{z\}$. Por (i) y (ii) $\{z\} = f_u(\{y, z\})$. Esto contradice la hipótesis de que $y \preceq_u z$.

Hemos mostrado que $\preceq_u$ es un preorden total. Falta ver que $f_u(V) = min(V, \preceq_u)$ para cualquier V. Sea $V \in \mathcal{P}^*(X)$.

(1) $f_u(V) \subseteq min(V, \preceq_u)$:

Por reducción al absurdo, supongamos que $f_u(V) \nsubseteq min(V, \preceq_u)$, es decir, que $\exists x \in f_u(V)\big[x \notin min(V, \preceq_u)\big]$. Pero $x \notin min(V, \preceq_u)$ significa que $\exists y \in V\big[x \npreceq_u y\big]$. Lo que estamos suponiendo es que, $\exists x, y \in V\big[x \in f_u(V) \wedge x \npreceq_u y\big]$.

Consideremos la agenda $\{x, y\}$.

Por (i) y (ii) tenemos que $f_u(V) \cap \{x, y\} = f_u(V \cap \{x, y\})$, es decir, que $f_u(V) \cap \{x, y\} = f_u(\{x, y\})$. Por lo tanto, $x \in f_u(\{x, y\})$.

Esto contradice que $x \npreceq_u y$.

(2) $min(V, \preceq_u) \subseteq f_u(V)$:

Por reducción al absurdo, supongamos que $min(V, \preceq_u) \nsubseteq f_u(V)$, es decir, que $\exists x \in min(V, \preceq_u)\big[x \notin f_u(V)\big]$. Ahora bien, $x \in min(V, \preceq_u)$ significa que $x \preceq_u y, \forall y \in V$. Así, estamos suponiendo que, $\exists x \in V\big[x \preceq_u y,\ \forall y \in V \wedge x \notin f_u(V)\big]$. Consideremos $z \in f_u(V)$, y la agenda $\{z, x\}$. Luego, $f_u(V) \cap \{z, x\} \neq \emptyset$ porque $z \in f_u(V)$. Por (i) y (ii) tenemos que $f_u(V) \cap \{z, x\} = f_u(V \cap \{z, x\})$. Por lo tanto, $f_u(V) \cap \{z, x\} = f_u(\{z, x\})$. Como $x \notin f_u(\{z, x\})$ entonces $\{z\} = f_u(\{z, x\})$. Es decir, $z \prec_u x$. Esto contradice que $x \in min(V, \preceq_u)$ porque $z \in V$.

($\Longrightarrow$) Sean u un perfil, V y V' agendas tales que $V \cap V' \neq \emptyset$. Mostraremos que se satisfacen (i) y (ii).

(i) $f_u(V) \cap V' \subseteq f_u(V \cap V')$.

Debemos mostrar que $min(V, \preceq_u) \cap V' \subseteq min(V \cap V', \preceq_u)$. Observemos que

$$\begin{aligned} min(V, \preceq_u) \cap V' &= \{x \in (V \cap V') : x \preceq_u y, \forall y \in V\} \quad \text{y} \\ min(V \cap V', \preceq_u) &= \{x \in (V \cap V') : x \preceq_u y, \forall y \in (V \cap V')\}. \end{aligned}$$

De aquí, obtenemos fácilmente lo deseado.

(ii) $f_u(V \cap V') \subseteq f_u(V) \cap V'$, si $f_u(V) \cap V' \neq \emptyset$.

Supongamos que $f_u(V) \cap V' \neq \emptyset$. Es decir, $\exists y \in V\big[y \in f_u(V) \wedge y \in V'\big]$. De allí tenemos que $y \preceq z, \forall z \in V \ \wedge\ y \in (V \cap V')$. Debemos mostrar que $min(V \cap V', \preceq_u) \subseteq min(V, \preceq_u) \cap V'$. Sea

$x \in min(V \cap V', \preceq_u)$. Es claro que $x \in V'$, así, basta mostrar que $x \in min(V, \preceq_u)$. En efecto, Sea $w \in V$. Como $x \in min(V \cap V', \preceq_u)$ y $y \in (V \cap V')$, entonces $x \preceq_u y$. Por otro lado, $y \preceq_u w$. Luego, por la transitividad, $x \preceq_u w$.

∎

1.4. Análisis de los Postulados sobre algunas Reglas de Elección

Ya hemos analizado la satisfacción o no de algunos postulados por algunas de las reglas definidas. Ahora vamos a estudiar el resto de postulados de la sección anterior que no han sido analizados aún.

- **La Regla de Condorcet, f^C, satisface los postulados de Pareto.**

  En efecto, sean u un perfil, $x, y \in X$ y V una agenda tales que:

  (i) $x \in V$,

  (ii) $\forall i, x \preceq_i y$, y

  (iii) $\exists j$ tal que $x \prec_j y$

  Debemos mostrar que $y \notin f_u^C(V)$.

  De las hipótesis es fácil ver que $N_{x,y} > N_{y,x}$, por lo tanto y no es ganador de Condorcet de V relativo a u. Así, $y \notin f_u^C(V)$.

- **La Regla de Condorcet, f^C, satisface IAI**

  En efecto, sean $u = (\preceq_1, \preceq_2, \ldots, \preceq_n)$ y $u' = (\preceq'_1, \preceq'_2, \ldots, \preceq'_n)$ perfiles y V una agenda tales que $u \restriction_V = u' \restriction_V$. Note que x es Ganador de Condorcet en V respecto a u significa que

$$\left|\{i \in \mathsf{N} : x \prec_i y\}\right| \geq \left|\{i \in N : y \prec_i x\}\right|, \forall y \in V$$

  Como $u \restriction_V = u' \restriction_V$ entonces

$$\left|\{i \in \mathsf{N} : x \prec_i y\}\right| \geq \left|\{i \in \mathsf{N} : y \prec_i x\}\right| \Longleftrightarrow$$
$$\left|\{i \in \mathsf{N} : x \prec'_i y\}\right| \geq \left|\{i \in \mathsf{N} : y \prec'_i x\}\right|$$

y la última desigualdad significa que x es Ganador de Condorcet en V con respecto al perfil u'. Esto muestra lo deseado.

- **La Regla de Condorcet, f^C no satisface ET** porque no es total. Aún si forzáramos esta regla a ser total (dando como resultado, por ejemplo, toda la agenda en los casos de indefinición) la regla no puede satisfacer ET. Esto se puede ver fácilmente como consecuencia del teorema de Imposibilidad de Arrow el cual será demostrado en el capítulo siguiente.

- **La Regla de Pareto satisface, evidentemente, los postulados de Pareto.**

- **La Regla de Pareto satisface IAI.**

  Sean $u = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$, $u' = (\preceq'_1, \ldots, \preceq'_n)$ perfiles y V una agenda, tales que $u \restriction_V = u' \restriction_V$. Luego, para cada i, $\preceq_i\restriction_V = \preceq'_i\restriction_V$. Basta mostrar que x es Pareto superior a y en u ssi x es Pareto superior a y en u'. Ahora bien notemos que

$$\begin{array}{rcl} x \text{ es pareto superior a } y \text{ en } u & \Longleftrightarrow & \forall i, x \preceq_i y \wedge \exists j[x \prec_j y] \\ & \Longleftrightarrow & \forall i, x \preceq'_i y \wedge \exists j[x \prec'_j y] \\ & \Longleftrightarrow & x \text{ es pareto superior a } y \text{ en } u' \end{array}$$

- **La Regla de Pareto no satisface ET** porque no es total. Aún si forzáramos esta regla a ser total (dando como resultado, por ejemplo, toda la agenda en los casos de indefinición) la regla no puede satisfacer **ET**. Esto se puede ver fácilmente como consecuencia del teorema de Imposibilidad de Arrow probado en el capítulo siguiente.

- **La Regla de Condorcet Ordenada no satisface los postulados de Pareto.**

  Basta observar el ejemplo 1.2.15, allí tenemos $f_u(V) = \{z\}$. Sin embargo, para todo i, $x \prec_i z$ y $x \in V$. Así el postulado de Pareto Débil no se cumple para esta regla.

- **La Regla de Condorcet Ordenada satisface IAI**:

  Sean $u = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$, $u' = (\preceq'_1, \ldots, \preceq'_n)$ perfiles y V una agenda, tales que $u \restriction_V = u' \restriction_V$. Luego, para cada i $\preceq_i\restriction_V = \preceq'_i\restriction_V$. Pongamos

$$N_{x,y,u} = |\{i : x \prec_i y\}| \text{ y } N_{x,y,u'} = |\{i : x \prec'_i y\}|$$

Como $u \restriction_V = u' \restriction_V$ entonces $\forall x, y \in V, N_{x,y,u} = N_{x,y,u'}$ Luego, $f_u(V) = f_{u'}(V)$.

- **La Regla de Condorcet Ordenada no satisface ET**.

  Por reducción al absurdo. Supongamos que la Regla de Condorcet Ordenada (f), satisface **ET**. Por la proposición 1.3.15 la relación $\preceq_u$ definida por

$$x \preceq_u y \Longleftrightarrow x \in f_u(\{x, y\})$$

  es el único preorden total que satisface $f_u(V) = min(V, \preceq_u)$. Sean $N = \{1, 2, 3\}$, $X = \{x, y, z\}$ y

$$u = \left(\begin{array}{ccc} y & y & y \\ z & x & x \\ \underbrace{x}_{\preceq_1} & \underbrace{z}_{\preceq_2} & \underbrace{z}_{\preceq_3} \end{array} \right).$$

  Luego,

$$\begin{aligned} f_u(\{x, y\}) &= \{x\} \Longleftrightarrow x \prec_u y \\ f_u(\{y, z\}) &= \{y\} \Longleftrightarrow y \prec_u z \\ f_u(\{x, z\}) &= \{z\} \Longleftrightarrow z \prec_u x \end{aligned}$$

  Esta situación contradice que la relación $\preceq_u$ sea un preorden total, porque no es una relación transitiva. Por lo tanto, concluimos que f no satisface **ET**.

- **La Regla de Borda, f^B, satisface ET.**

  En la sección anterior mostramos que f^B satisface **ET**. Presentamos a continuación otra demostración del mismo hecho, usando la proposición 1.3.16.

  Así, debemos mostrar que f es total y, que para cada perfil u y cada par de agendas V y V' tales que $V \cap V' \neq \emptyset$ se cumple:

  (i) $f_u^B(V) \cap V' \subseteq f_u^B(V \cap V')$, y

  (ii) $f_u^B(V \cap V') \subseteq f_u^B(V) \cap V'$, si este último conjunto no es vacío.

Tenemos que f^B es total por su definición.

Sean $u = (\preceq_1, \preceq_2, \ldots, \preceq_n) \in \mathcal{P}$ y $V, V' \in \mathcal{P}^*(X)$ tales que $V \cap V' \neq \emptyset$. Tenemos que

$$f_u^B(V) \cap V' = \{x \in (V \cap V') : r_u(x) \leq r_u(y), \forall y \in V\}, \quad y$$

$$f_u^B(V \cap V') = \{x \in (V \cap V') : r_u(x) \leq r_u(y), \forall y \in (V \cap V')\},$$

de donde, se satisface (i).

Supongamos ahora que $f_u^B(V) \cap V' \neq \emptyset$. Es decir,

$$\exists t \in X \Big[t \in \{x \in (V \cap V') : r_u(x) \leq r_u(y), \forall y \in V\} \Big]$$

Sea $h \in f_u(V \cap V')$. Es decir, $h \in \{x \in (V \cap V') : r_u(x) \leq r_u(y), \forall y \in (V \cap V')\}$. Como $t \in (V \cap V')$ entonces $r_u(h) \leq r_u(t)$. Luego, usando la transitividad de $\leq$ tenemos que $r_u(h) \leq r_u(y), \forall y \in V$. Por lo tanto, $h \in f_u(V)$. Lo que muestra que se satisface (ii).

A continuación presentamos una tabla que resume las propiedades de las funciones definidas.

Regla \Postulado	A	DE	ET	IAI	PF	PD	ND
de la Proyección	×	✓	✓	✓	×	✓	×
de Condorcet	✓	×	×	✓	✓	✓	✓
de Pareto	✓	×	×	✓	✓	✓	✓
de Borda	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓
de Condorcet Ordenada	✓	✓	×	✓	×	×	✓

Note que las cuatro últimas reglas satisfacen claramente el anonimato, por consiguiente no pueden ser dictatoriales.

Notemos también que ninguna de las reglas estudiadas satisface todos los postulados a la vez. Entonces, es natural preguntarse si existe una regla de elección que sí los satisface todos al mismo tiempo. La respuesta negativa a esta pregunta la encontraremos en el capítulo siguiente.

1.5. Caracterización de reglas mayoritarias

Vamos a ubicarnos de nuevo en el caso de dos alternativas x y y y n votantes. Vamos a definir el voto mayoritario de una manera muy simple. Para ello codificamos la votación dentro del conjunto (de códigos) $C = \{-1, 0, 1\}$ de la manera siguiente: si un individuo prefiere a x vota 1, si prefiere a y vota -1 y si los candidatos le son indiferentes vota 0. Un perfil será entonces un vector de tamaño n con las entradas en el conjunto C. Así el conjunto de perfiles es C^n y la regla de mayoría simple se puede definir así:

$$f_{ms}(c) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} c_i > 0 \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} c_i = 0 \\ -1 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} c_i < 0 \end{cases}$$

La convención es que si $f_{ms}(c) = 1$ gana x; si $f_{ms}(c) = -1$ gana y y si $f_{ms}(c) = 0$ hay empate. Claramente esta es la regla de mayoría simple codificada. La pregunta es qué propiedades “racionales"debe tener una función C^n en C para ser exactamente la función f_{ms} previamente definida.

La respuesta la dio May en 1952 [37]. La primera propiedad es llamada *dominio universal* y significa que la función es total (tiene el dominio más amplio).

La segunda propiedad es el *anonimato*, la cual ya fue vista y aquí puede expresar de la manera siguiente: si el perfil c es una permutación del perfil c' entonces $f(c) = f(c')$.

La tercera propiedad es la de *neutralidad*. Para ello necesitamos una pequeña notación. Si $c = (c_1, \ldots, c_n)$ es un perfil llamamos $-c$ al perfil definido por $-c = (-c_1, \ldots, -c_n)$. Entonces la neutralidad establece que para cualquier perfil c se tiene $f(c) = -f(-c)$.

La cuarta propiedad es la *positividad*. Sea c un perfil e i un número entre 1 y n (un votante cualquiera). Para un $c \in C$ denote $c[v/i]$ el perfil obtenido a partir de c substituyendo la i-ésima coordenada de c (c_i) por v. Una función f satisface positividad si cada vez que $f(c) \geq 0$ se tiene que para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f(c[v/i])$=1 siempre que $v > c_i$.

Es relativamente sencillo ver que f_{ms} satisface esta cuatro propiedades. El teorema de May establece que en realidad son también condiciones suficientes. Más precisamente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.5.1 (May [37]) *Sea $f : C^n \longrightarrow C$. Entonces $f = f_{ms}$ ssi f satisface dominio universal, anonimato, neutralidad y positividad.*

La prueba de este teorema, dejada al lector, es un excelente ejercicio.

Observemos que de una manera parecida Fishburn en 1973 [19] caracteriza la regla de mayoría absoluta.

Capítulo 2

Imposibilidad

Aquí damos el primer teorema importante en Teoría de elección social debido a Kenneth J. Arrow [2].

Este célebre teorema nos dice que no existe una regla de elección que satisface a la vez, los siguientes postulados:

1. Dominio Estándar,
2. Explicaciones Transitivas,
3. Independencia de Alternativas Irrelevantes,
4. Pareto Débil, y
5. Ausencia de dictador.

Como parece que cada uno de estos postulados es "sensato", se tiende a pensar que una buena regla de elección debe satisfacerlos. Lo sorprendente[1] del Teorema de Arrow es que nos dice que no hay reglas completamente razonables en este sentido. Debido a esto, se hace referencia a este teorema diciendo que es imposible la existencia de una regla de elección "perfecta". Vamos a probar el Teorema de Arrow en la forma más precisa que aparece en la sección siguiente. La prueba que damos es clásica y puede ser consultada en el libro de Kelly [24] o de Taylor [50].

[1]A nosotros no deja de sorprendernos; sin embargo hay autores como Vincke [51] que piensan que no tiene nada de sorprendente.

2.1. El teorema de imposibilidad

Teorema 2.1.1 ***(Teorema de Imposibilidad de Arrow.)***
Sea f una función de elección social que satisface:

1. *Dominio Estándar,*
2. *Explicaciones Transitivas,*
3. *Independencia de Alternativas Irrelevantes, y*
4. *Pareto Débil.*

Entonces f es dictatorial.

Comenzamos definiendo ciertas propiedades respecto a algunos subconjuntos especiales del conjunto de votantes, para demostrar un par de lemas y finalmente un teorema que refleja la fortaleza de las hipótesis del Teorema de Imposibilidad.

Definición 2.1.2 *Un subconjunto S de* N*, no vacío, es **localmente decisivo para** x **contra** y, si para cada perfil u y cada agenda V si:*

i) $x \prec_i y, \forall i \in S$,

ii) $y \prec_k x, \forall k \in N \setminus S$, *y*

iii) $x \in V$,

entonces $y \notin f_u(V)$.
En tal caso, escribimos xS^*y.

Definición 2.1.3 *Un subconjunto S de N, no vacío, es **globalmente decisivo para** x **contra** y (o oligarquía de x contra y), si para cada perfil u y cada agenda V si:*

i) $x \prec_i y, \forall i \in S$,*y*

ii) $x \in V$,

entonces $y \notin f_u(V)$.
En tal caso, escribimos xSy.
*Si xSy para cualquier par de alternativas x, y, diremos simplemente que S es **decisivo** (o bien una oligarquía).*

Notemos que:

- Si xSy entonces xS^*y.
- Si f satisface Pareto Débil entonces N es decisivo.
- Si S es decisivo y $S = \{i\}$ entonces i es un dictador.

Lema 2.1.4 (Primer Resultado de Contagio) .
*Sea f una función de elección social que satisface **DE**, **ET**, **IAI** y **PD**. Entonces, si xS^*y se tiene xSz, para cualquier $z \in X$ tal que $z \notin \{x, y\}$.*

Demostración:

Sean $S \subseteq N$, $S \neq \phi$ y $x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que xS^*y.

Por DE podemos considerar $z \in X$ tal que $z \neq x$ y $z \neq y$.

Mostraremos que xSz.

Sean u un perfil y $V \in \mathcal{P}^*(X)$ tal que:

i) $x \prec_i z, \forall i \in S$, y

ii) $x \in V$.

Así tenemos,

$$u \restriction \{x, z\} = \left(\begin{array}{cc} z & \\ \underbrace{x}_{S} & \underbrace{\quad}_{N \setminus S} \end{array} \right)$$

lo cual significa que para los elementos de S, x es mejor que z y fuera de S no escribimos cómo es la relación entre x y z porque puede variar según los individuos.

Debemos ver que $z \notin f_u(V)$.

Por DE podemos considerar un perfil $u' = (\preceq'_1, \ldots, \preceq'_n)$ tal que

(a) $u \restriction_{\{x,z\}} = u' \restriction_{\{x,z\}}$,

(b) $x \prec'_i y \prec'_i z$, $\forall i \in S$, y

(c) $y \prec'_k z \quad \wedge \quad$ y $\prec'_k x, \forall k \in N \setminus S$.

$$u' \restriction_{\{x,y,z\}} = \begin{pmatrix} z & x \text{ y } z \\ y & \text{como en } u \\ \underbrace{x}_{S} & \underbrace{y}_{N \setminus S} \end{pmatrix}$$

Por PD $z \notin f_{u'}(\{y,z\})$. Luego, por ET, $y \prec_{u'} z$.

Como xS^*y entonces $y \notin f_{u'}(\{y,x\})$. Luego, por ET, $x \prec_{u'} y$.

Tenemos entonces, por transitividad, que $x \prec_{u'} z$, lo cual es equivalente a $z \notin f_{u'}(\{x,z\})$.

Por IAI y (a) tenemos que $f_u(\{x,z\}) = f_{u'}(\{x,z\})$.

Por lo tanto, $z \notin f_u(\{x,z\})$, es decir, $x \prec_u z$. De donde, $z \notin min(V, \preceq_u)$. Es decir, $z \notin f_u(V)$.

∎

Lema 2.1.5 (Segundo Resultado de Contagio) .
*Sea f una función de elección social que satisface **DE**, **ET**, **IAI** y **PD**. Entonces, si xS^*y necesariamente wSy, para cualquier $w \in X$ tal que $w \notin \{x,y\}$.*

Demostración:

Sean $S \subseteq N$, $S \neq \phi$ y $x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que xS^*y.

Consideremos $w \in X$ tal que $w \neq x$ y $w \neq y$.

Mostraremos que wSy.

Sean u un perfil y $V \in \mathcal{P}^*(X)$ tales que:

i) $w \prec_i y, \forall i \in S$,y

ii) $w \in V$.

Así,

$$u \restriction_{\{y,w\}} = \begin{pmatrix} y & \\ \underbrace{w}_{S} & \underbrace{}_{N \setminus S} \end{pmatrix}$$

Debemos ver que $y \notin f_u(V)$.

Por DE podemos considerar un perfil $u' = (\preceq'_1, \ldots, \preceq'_n)$ tal que:

(a) $u \restriction_{\{y,w\}} = u' \restriction_{\{y,w\}}$,

(b) $w \prec'_i x \prec'_i y, \forall i \in S$, y

(c) $y \prec'_k x \ \wedge \ w \prec'_k x, \forall k \in N \setminus S$.

$$u' \restriction_{\{x,y,z\}} = \left(\begin{array}{cc} y & x \\ x & y \ \wedge \ w \\ \underbrace{w}_{S} & \underbrace{\text{como en } u}_{N \setminus S} \end{array} \right)$$

Por PD $x \notin f_{u'}(\{x,w\})$. Luego, $w \prec_{u'} x$.

Como xS^*y entonces $y \notin f_{u'}(\{y,x\})$. Luego, $x \prec_{u'} y$.

Tenemos entonces, por transitividad, que $w \prec_{u'} y$, *i.e.* $y \notin f_{u'}(\{y,w\})$.

Como $f_u(\{y,w\}) = f_{u'}(\{y,w\})$, se tiene $y \notin min(V, \preceq_u)$. Por lo tanto, $y \notin f_u(V)$.

∎

Teorema 2.1.6 (Teorema General de Contagio) *Sea f una función de elección social que satisface **DE**, **ET**, **IAI** y **PD**. Entonces, si xS^*y para algún par $x, y \in X$, necesariamente wSz, para cualquier par w, z con $w \neq z$, es decir, S es decisivo.*

Demostración: Sean $S \subseteq N$, $S \neq \phi$ y $x, y \in X$ con $x \neq y$ tales que xS^*y.

Afirmación 1 *wSz, para cualquier par $w, z \in \{x, y, t\}$ y cualquier $t \in X$, $t \neq x$ y $t \neq y$.*

Consideremos $t \in X$ tal que $t \neq x$ y $t \neq y$.

Estudiaremos la agenda $\{x, y, t\} \subseteq X$.

Por el Lema 2.1.4 tenemos que xSt.

Por el Lema 2.1.5 tenemos que ySt.

Por el Lema 2.1.4 tenemos que ySx.

Por el Lema 2.1.5 tenemos que tSx.

Por el Lema 2.1.4 tenemos que tSy.

Por el Lema 2.1.5 tenemos que xSy.

Así, queda demostrada la afirmación 1.

Consideremos ahora $w, z \in X$ tal que $w \neq z$. Debemos ver que wSz.

Si w ó z es igual a x ó y se cumple lo deseado por la afirmación anterior.

En otro caso, consideramos $\{x, y, w\}$ y tenemos que wSx. Ahora, consideramos $\{w, x, z\}$ y tenemos que wSz.

∎

Ahora podemos dar la prueba del teorema de Arrow.

Demostración del teorema 2.1.1:

Por PD, N es decisivo.

Sea $\mathcal{S} := \{M \subseteq N : M \text{ es decisivo}\}$.

$\mathcal{S} \neq \phi$ porque $N \in \mathcal{S}$.

Consideremos $S \in \mathcal{S}$ tal que $|S| \leq |M|, \forall M \in \mathcal{S}$, es decir S es de tamaño minimal.

Si $|S| = 1$, entonces $S = \{i\}$ para algún $i \in N$ y el individuo i es un dictador.

Mostraremos que $|S| = 1$ por reducción al absurdo.

Supongamos que $|S| \geq 2$.

Tomemos $i \in S$ y consideremos $S \backslash \{i\} \subseteq N$.

$S \backslash \{i\} \neq \phi$ porque suponemos que $|S| \geq 2$.

Por DE consideremos la agenda $V = \{x, y, z\}$ y el perfil u tal que u restringido a V este definido así:

$$u \restriction_{\{x,y,z\}} = \left(\begin{array}{ccc} z & x & y \\ y & z & x \\ \underbrace{x}_{\{i\}} & \underbrace{y}_{S\backslash\{i\}} & \underbrace{z}_{N\backslash S} \end{array} \right)$$

Examinemos $f_u(\{y, z\})$.

Como S es decisivo entonces $z \notin f_u(\{y,z\})$. Así tenemos que $y \prec_u z$.

Veamos ahora que $x \preceq_u y$.

Por reducción al absurdo.

Supongamos que $y \prec_u x$, es decir, $x \notin f_u(\{x,y\})$.

$$u\restriction_{\{x,y\}} = \left(\begin{array}{ccc} y & x & y \\ \underbrace{x}_{\{i\}} & \underbrace{y}_{S\setminus\{i\}} & \underbrace{x}_{N\setminus S} \end{array} \right)$$

Como $x \prec_k y, \forall k \in (N\setminus S) \cup \{i\} \wedge y \prec_j x, \forall j \in S\setminus\{i\} \wedge x \notin f_u(\{x,y\})$ entonces $yD_{S\setminus\{i\}}x$.

Por el teorema general de contagio $S\setminus\{i\}$ es decisivo.

Esto contradice la minimalidad de S, es decir que $|S| \leq |M|$, $\forall M \in \mathcal{S}$.

Por lo tanto, $x \preceq_u y$.

Como $y \prec_u z \quad \wedge \quad x \preceq_u y$ entonces $x \prec_u z$. Lo que significa que $z \notin f_u(\{x,z\})$.
Ahora bien,

$$u\restriction_{\{x,z\}} = \left(\begin{array}{ccc} z & x & x \\ \underbrace{x}_{\{i\}} & \underbrace{z}_{S\setminus\{i\}} & \underbrace{z}_{N\setminus S} \end{array} \right)$$

Como $z \prec_k x, \forall k \in N\setminus\{i\}) \wedge x \prec_i z \wedge z \notin f_u(\{x,z\})$ entonces $xD_{\{i\}}z$.

Por el teorema general de contagio $\{i\}$ es decisivo.

Esto contradice la minimalidad de S, es decir que $|S| \leq |M|$, $\forall M \in \mathcal{S}$.

De esta manera queda demostrado que $|S| = 1$, es decir existe un dictador.

∎

Para otras prueba de este teorema el lector puede consultar el trabajo de Geneakoplos [20]. Una linda prueba que usa ultrafiltros para casos de perfiles lineales y poblaciones que pueden ser infinitas se puede encontrar en el trabajo de Komjáth y V. Totik [26].

Notemos que las funciones de elección social que satisfacen explicaciones transitivas pueden verse como funciones cuyo codominio es el conjunto de preórdenes totales y su dominio son simplemente perfiles. Ese tipo de funciones se llaman en la literatura *funciones de bienestar social*. Para ellas existe un teorema de imposibilidad que es en realidad equivalente al teorema 2.1.1 (el lector interesado puede ver la tesis de Bolivia Cuevas [12] para más detalles).

El caso de funciones más simples (dominio perfiles y codominio agendas) -las cuales serán estudiadas en el capítulo siguiente- es curiosamente más complejo en lo que se refiere a la imposibilidad. Para un estudio de este problema el lector puede consultar los trabajos de Cuevas y de Reny [12, 42].

Capítulo 3

Manipulabilidad

En este capítulo mostramos que casi siempre se puede manipular, en un sentido muy preciso, el resultado de una elección.

Vamos primero a definir unas funciones que modelizan procesos electorales menos complejos,llamadas reglas de voto. Para esas funciones la noción de manipulación es más sencilla de enunciar y los teoremas de manipulación tienen demostraciones relativamente simples.

La prueba que damos usa las técnicas de Makinson [33] donde abstrae el contenido combinatorio de las prueba. Es similar a la del teorema de imposibilidad del capítulo 2. Así que uno podría preguntarse si hay una equivalencia entre los teoremas imposibilidad y los teoremas de manipulabilidad. Con relación a esta pregunta, el lector interesado puede consultar la tesis de Bolivia Cuevas [12] donde se encuentra un estudio amplio sobre el tema.

3.1. Definiciones básicas

Definición 3.1.1 *Una regla de voto f es una función del tipo*

$$f : P^n \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$$

Una regla de voto le asocia a un perfil las mejores alternativas.

Comencemos por definir algunas notaciones útiles.

Definición 3.1.2 *Dado un perfil $u = (\preceq_1, \cdots, \preceq_k, \cdots, \preceq_n)$ y un preorden total $\preceq$, podemos definir un nuevo perfil $u[\preceq /k]$ como el perfil que* *resulta de reemplazar la k-ésima coordenada de u por* $\preceq$*. Más precisamente:*

$$u[\preceq /k] = (\preceq_1, \cdots, \preceq_{k-1}, \preceq, \preceq_{k+1}, \cdots, \preceq_n).$$

Ahora definamos algunas propiedades.

Un individuo i es *dictador-rv* si para todo perfil $u \in \mathsf{P}^n$ y $x, y \in X$ con $x \prec_i y$ entonces $y \notin f(u)$. Una regla de voto f es *dictatorial-rv* si existe un individuo i que sea dictador-rv.

Una regla de voto $f : \mathsf{P}^n \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ satisface *Pareto-rv* si para todo perfil u y cualesquiera $x, y \in X$ si: Para todo $i \in \mathsf{N} x \prec_i y$ entonces $y \notin f(u)$.

Una regla de voto $f : \mathsf{P}^n \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ satisface *Independencia de Alternativas Irrelevantes-rv* si para cualesquiera perfiles u y u' y cualquier par de alternativas $x, y \in X$ con $x \in f(u)$ y $y \notin f(u)$ si $\preccurlyeq_i\restriction_{\{x,y\}}=\preccurlyeq'_i\restriction_{\{x,y\}}$ para todo i entonces $y \notin f(u')$.

De particular interés son las reglas de voto llamadas deterministas: una regla de voto $f : \mathsf{P}^n \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ es *determinista* si $|f(u)|= 1$. En ese caso podemos pensar que el codominio de esas reglas es X.

Para este tipo de reglas hay una noción muy natural de manipulación:

Definición 3.1.3 *Una regla de voto determinista* $f : \mathsf{P}^n \longrightarrow X$ *es manipulable-rv si existe un individuo* i*, un perfil* u *y un preorden* $\preccurlyeq^*$ *tales que* $f(u[\preccurlyeq^* /i]) \prec_i f(u)$.

Lo que esta definición captura es que hay un individuo i el manipulador que expresando unas preferencias falsas (una mentira) $\preccurlyeq^*$ obtiene un resultado que es estrictamente mejor respecto a sus verdaderas preferencias $\preceq_i$.

Una regla de voto $f : \mathsf{P}^n \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ satisface *no imposición-rv* si para todo $x \in X$ existe u tal que $f(u) = \{x\}$. Cuando eso pasa decimos que f es *no impositiva* o que satisface la condición de Gibbard .

Un individuo i es un *dictador inclusivo-rv* (o dictador Gibbard) para una regla de voto f si para todo perfil $u \in \mathsf{P}^n$ se tiene que $\min(\preceq_i) \subseteq f(u)$. Cuando eso ocurre decimos que f es *inclusivamente dictatorial-rv.*

Un individuo i es un *dictador débil inclusivo-rv* si para todo perfil $u \in \mathsf{P}^n$ se tiene que $\min(\preceq_i) \bigcap f(u) \neq \emptyset$. Cuando eso ocurre decimos que f es *inclusivamente débil dictatorial-rv.*

3.2. Manipulación para reglas de voto primera versión

Vamos a enunciar el primer teorema que probaremos acerca de manipulación el cual es una variante del teorema de Gibbard- Satterhtwaite [21, 46]:

Teorema de Manipulabilidad de Gibbard-Satterthwaite
Sea $f : \mathsf{L}^n \longrightarrow X$ *una regla de voto determinista que satisface:*

- *No-manipulabilidad y*
- *Pareto-rv*

Entonces f *es una regla de voto dictatorial-rv.*

Con el fin de demostrar el teorema precedente, vamos a establecer algunos lemas y proposiciones que serán los ingredientes fundamentales de la prueba.

En lo sucesivo vamos a suponer que f es una regla de voto. Mas aún, vamos a suponer que f es una regla de voto determinista y los órdenes son lineales, para denotar esto usaremos $f : \mathsf{L}^n \longrightarrow X$ donde L son los órdenes lineales y X como antes. También supondremos que $|X| \geq 3$.

Definición 3.2.1 *Sean* $a, b \in X$, $a \neq b$ *y* $S \subseteq N$. *Decimos que* S *puede usar* a *para bloquear* b, *denotado* aSb, *si para todo perfil* u *en el cual* $a \prec_i b$ *para todo* $i \in S$ *se tiene que* $f(u) \neq b$. *El conjunto* S *es una oligarquía si* aSb *para cualesquiera* $a, b \in X$.

Notemos que esto fue lo que llamamos decisivo (global) de a contra b en el capítulo 2. Aquí simplemente damos las definiciones adaptadas al marco de reglas de voto deterministas. Oligarquía es exactamente lo que llamamos decisivo en el capitulo 2. Notemos que una oligarquía de un sólo elemento corresponde a la noción de dictador.

Definición 3.2.2 *Sean* $x, y \in X, x \ll y$ *si y sólo si* $x \prec y$, *y no existe* z *tal que* $x \prec z$ *y* $z \prec y$.

Definición 3.2.3 *Sea $\preccurlyeq$ un orden lineal. Si $b \ll c$ definimos $\preccurlyeq^{b,c}$ de la siguiente manera:*

- $x \prec^{b,c} y \Longleftrightarrow x \prec y \quad si\ \{x,y\} \neq \{b,c\}$
- $c \prec^{b,c} b.$

Lo único que cambia entre el orden $\prec$ y el orden $\prec^{b,c}$ es la relación entre b y c. Diremos que el orden $\prec^{b,c}$ se obtiene de $\prec$ mediante un flip *entre b y c.*

Definición 3.2.4 *Decimos que una regla de voto determinista f satisface monotonía hacia arriba si para todo perfil $u \in \mathsf{L}^n$ con $f(u) = a$, $b \ll_i c$ con $b \neq a$ se tiene que $f(u[\preccurlyeq^{b,c} /i]) = a$.*

En otras palabras monotonía hacia arriba significa que si una alternativa perdedora se mueve hacia arriba (desmejora) en el orden de algún individuo i, esto no afecta el resultado.

Ejemplo 3.2.5 *Consideremos el perfil u de la siguiente manera*

$$u = \left(\begin{array}{ccc} b & c & c \\ c & a & b \\ \underbrace{a}_{\preccurlyeq_1} & \underbrace{b}_{\preccurlyeq_2} & \underbrace{a}_{\preccurlyeq_3} \end{array} \right)$$

Aplicando la regla de Borda se tiene que $f(u) = a$. Ahora, si ponemos $\preccurlyeq_1^{c,b}$ en el individuo 1 obtenemos

$$u = \left(\begin{array}{ccc} c & c & c \\ b & a & b \\ \underbrace{a}_{\preccurlyeq_1^{c,b}} & \underbrace{b}_{\preccurlyeq_2} & \underbrace{a}_{\preccurlyeq_3} \end{array} \right)$$

De donde, por Borda nuevamente se obtiene que $f(u[\preccurlyeq^{c,b} /1]) = a$.

Lema 3.2.6 *Toda regla de voto determinista que no es manipulable satisface monotonía hacia arriba.*

Demostración: Supongamos que falla monotonía hacia arriba. Así, existen un perfil u, alternativas $x, y, v, w \in X$ y un individuo i tales que $y \neq w$, $v \neq w$, $y \ll_i x$ con $f(u) = w$ y $f(u') = v$ para $u' = u[\preccurlyeq_i^{y,x} /i]$ y $u = u'[\preccurlyeq_i'^{x,y} /i]$.

Vamos a considerar varios casos.

Caso 1: $v \prec_i w$ en el perfil u. Notemos que $f(u) = w$ y $f(u') = v$ por hipótesis, y como $v \prec_i w$ en u, eso representa claramente una situación de manipulación pues el individuo i obtiene mejores resultados mintiendo.

Caso 2: $w \prec_i' v$ en el perfil u'. Consideremos a $\preccurlyeq_i'$ como las preferencias verdaderas de i. Por hipótesis $f(u') = v$ y $f(u'[\preccurlyeq_i'^{x,y} /i]) = w$, y como $w \prec_i' v$ en u', eso representa claramente una situación de manipulación pues el individuo i obtiene mejores resultados mintiendo.

Caso 3: $w \prec_i v$ en el perfil u y $v \prec_i' w$ para el perfil u'.

Notemos que en este caso necesariamente $v = x$ y $w = y$, pero esto contradice la hipótesis de que $y \neq w$.

Por lo tanto, toda regla de votación que no es manipulable satisface monotonía hacia arriba. ∎

Notación: Sea u un perfil cualquiera, en lo sucesivo denotaremos por $u[\uparrow_c]$ al perfil en el cual se coloca a c en el nivel menos preferido (más alto) en cada preferencia individual, es decir
$u \restriction_{\{x,y\}} = u[\uparrow_c] \restriction_{\{x,y\}}$ si $c \notin \{x, y\}$ y para todo x diferente de c se tiene que $x \prec_i c$ para todo individuo i.

Vamos a suponer en adelante (durante estos lemas que nos llevarán a la prueba del primer teorema de manipulación) que $|X| = m$.

Lema 3.2.7 *Sean $f : \mathsf{L}^n \longrightarrow X$ una regla de voto que satisface monotonía hacia arriba tal que $f(u) = x$, entonces para cualquier individuo $i \in \mathsf{N}$ y cualquier orden lineal $\preccurlyeq$ tal que $x \prec x_1 \prec x_2 \prec ... \prec x_{m-1}$, se tiene $f(u[\preccurlyeq /i]) = x$.*

Demostración:

Por monotonía hacia arriba, si x_{m-1} no está en el el último lugar, se puede subir de un nivel sin alterar el resultado. Iterando este proceso se puede cambiar el orden $\preccurlyeq_i$ hasta tener a x_{m-1} en el último lugar sin alterar el resultado. Aplicamos este mismo procedimiento para llevar ahora

x_{m-2} al penúltimo lugar sin alterar el resultado. Iteramos este proceso y así obtenemos la tesis del lema. ∎

Lema 3.2.8 *Sean $f : \mathsf{L}^n \longrightarrow X$ una regla de voto que satisface monotonía hacia arriba tal que $f(u) = x$, entonces para cualquier individuo $i \in \mathsf{N}$ para el cual $y \prec_i x$ y cualquier orden lineal $\preccurlyeq$ tal que $y \prec x \prec x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_{m-2}$, se tiene $f(u[\preccurlyeq /i]) = x$.*

Demostración:

Se aplica una técnica muy similar a la del lema anterior. ∎

Lema 3.2.9 (Lema de existencia) *Sean $f : \mathsf{L}^n \longrightarrow X$ una regla de voto determinista, que satisface monotonía hacia arriba y Pareto, $S \subseteq N$ y $a, b \in X$ con $a \neq b$. Entonces aSb si existe un perfil u tal que las siguientes condiciones se cumplen:*

- *$a \prec_i b$ para todo $i \in S$*
- *$b \prec_j a$ para todo $j \in \mathsf{N} \setminus S$*
- *$f(u) = a$.*

Demostración: Sea $u = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ un perfil que satisface las hipótesis del lema.

Consideremos un perfil u' tal que aSb falla, es decir para todo $i \in S$, $a \prec'_i b$ y $f(u') = b$. Usando los lemas 3.2.7 y 3.2.8 podemos suponer que u y u' coinciden en los elementos de S. De igual manera, por el lema 3.2.8 podemos suponer que las coordenadas $\preceq_j$ de u para $j \in \mathsf{N} \setminus S$ son todas de la forma $b \prec_j a \prec_j x_1 \prec_j \cdots \prec_j x_{m-2}$.

Llamemos $I = \{j \in \mathsf{N} \setminus S : a \prec'_j b\}$. En los elementos de $(\mathsf{N} \setminus S) \setminus I$ también podemos suponer por el lema 3.2.7 que los elementos de u' y u también coinciden y son de la forma $b \prec_j a \prec_j x_1 \prec_j \cdots \prec_j x_{m-2}$. Para u' tenemos que $a \prec'_j b$ para algunos $j \in \mathsf{N} \setminus S$. Ahora definamos un perfil u'' de la manera siguiente: para $i \in \mathsf{N} \setminus I$, $\preccurlyeq''_i = \preccurlyeq'_i = \preccurlyeq_i$ y para $j \in I$, $\preccurlyeq''_j = \preccurlyeq'^{a,b}_j$. Como f satisface monotonía hacia arriba se tiene que

$f(u'') = f(u'[\preccurlyeq'^{a,b} /j]) = b$ para todo $j \in I$.

Finalmente podemos en virtud del lema 3.2.7 cambiar todos los elementos $\preccurlyeq''_j$ para $j \in I$ en los elementos $b \prec_j a \prec_j x_1 \prec_j \cdots \prec_j x_{m-2}$ y obtener el mismo resultado. Llamemos ese nuevo perfil u'''. Así tenemos $f(u''') = b$. Pero notemos que $u''' = u$, entonces $f(u''') = a$, una contradicción. ∎

Lema 3.2.10 (Lema de partición) *Sean $f : \mathsf{L}^n \longrightarrow X$ una regla de voto determinista que satisface monotonía hacia arriba y Pareto, $S \subseteq N$ y $a, b, c \in X$ alternativas distintas dos a dos. Si aSb y $S = T \cup U$ con $T \cap U = \emptyset$ entonces aTc ó cUb.*

Demostración:

Consideremos un perfil u tal que $a \prec_i b \prec_i c$ para todo $i \in T$, $c \prec_j a \prec_j b$, para todo $j \in U$ y $b \prec_k c \prec_k a$ para todo $k \in \mathsf{N} \setminus S$ y tal que para todo $x \in X \setminus \{a, b, c\}$ y para todo $i \in \mathsf{N}$ se tiene $a \prec_i x$, $b \prec_i x$ y $c \prec_i x$. La figura siguiente ilustra al perfil:

$$u = \left(\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ c & b & a \\ b & a & c \\ \underbrace{a}_{T} & \underbrace{c}_{U} & \underbrace{b}_{N \setminus S} \end{array} \right)$$

Como $a \prec_i x$, $b \prec_i x$ y $c \prec_i x$ para todo $i \in \mathsf{N}$ y para todo $x \in X \setminus \{a, b, c\}$ por Pareto se tiene que $f(u) \notin X \setminus \{a, b, c\}$. Asi $f(u) \in \{a, b, c\}$.

Por hipótesis tenemos que aSb de donde $f(u) \neq b$, de donde $f(u) = a$ ó $f(u) = c$.

Si $f(u) = a$, por el lema 3.2.9 (lema de existencia) tenemos que aTc pues para todo $i \in T$ se tiene $a \prec_i c$ y para todo $j \in \mathsf{N} \setminus T$ se tiene $c \prec_j a$.

Si $f(u) = c$, por el lema 3.2.9 (lema de existencia) tenemos que cUb pues para todo $j \in U$ se tiene $c \prec_j b$ y para todo $i \in \mathsf{N} \setminus U$ se tiene $b \prec_i c$. ∎

Definición 3.2.11 *Una regla de voto $f : \mathsf{P}^n \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ satisface unanimidad si para todo perfil u y todo $i \in \mathsf{N}$ con $min(\preceq_i) = \{x\}$ entonces $f(u) = \{x\}$.*

Proposición 3.2.12 *Toda regla de voto $f : \mathsf{P}^n \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$, total, que satisface Pareto, satisface unanimidad.*

Demostración:

Sea u un perfil tal que para todo $i \in \mathsf{N}$, $min(\preceq_i) = \{x\}$ y supongamos por el absurdo que $f(u) \neq \{x\}$. Como f es una función total tenemos que $f(u) \neq \emptyset$. Por hipótesis existe $y \in X$ con $y \neq x$ tal que $y \in f(u)$. Pero por hipótesis tenemos que $min(\preceq_i) = \{x\}$ lo que implica que $x \prec_i y$ para todo i, de donde, por Pareto, se tiene que $y \notin f(u)$, lo cual contradice la suposición que $y \in f(u)$. ∎

Lema 3.2.13 *Sea $S \subseteq N$. Para ningún par $a, b \in X$ se tiene $a\emptyset b$ si Pareto se cumple.*

Demostración:

Consideremos un perfil u de la siguiente forma

$$u = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & b & b \end{pmatrix}$$

Como f satisface Pareto, en virtud de la proposición 3.2.12 f satisface unanimidad, así $f(u) = b$. Note que para todo $i \in \emptyset$ se tiene que si $a \prec_i b$ (esto se cumple vacíamente). Ahora bien, si se cumpliera $a\emptyset b$ tendríamos $b \neq f(u)$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $a\emptyset b$ no se cumple para ningún par $a, b \in X$. ∎

Lema 3.2.14 *Sea $S \subseteq N$ y $a, b, c \in X$ alternativas distintas dos a dos. Si aSb entonces aSc y cSb.*

Demostración:

Consideremos $S = S \cup \emptyset$. Así, por el lema 3.2.10 (lema de partición) se tiene que aSc ó $c\emptyset b$ pero por el lema 3.2.13. $c\emptyset b$ no ocurre, luego se tiene que aSc.

Análogamente, poniendo $S = \emptyset \cup S$, del lema 3.2.10 (lema de partición) y del lema 3.2.13 se obtiene cSb. ∎

Lema 3.2.15 *Sea $S \subseteq N$ tal que aSb para algún par $a, b \in X$, entonces S es una oligarquía.*

Demostración:

Consideremos $x, y \in X$. Mostraremos que xSy. Para esto estudiaremos los siguientes tres casos.

Caso 1: $y \neq a$. Como aSb y $y \neq a$, tenemos que aSy en virtud del lema anterior. Nuevamente por el lema anterior como $x \neq y$ se tiene que xSy.

Caso 2: $x \neq b$. Como aSb y $x \neq b$, tenemos que xSb en virtud del lema anterior. Nuevamente por el lema anterior como $x \neq y$ se tiene que xSy.

Caso 3: $y = a$ y $x = b$. Como X tiene al menos tres elementos, consideremos $c \neq a \neq b$. Como aSb, en virtud del lema anterior se tiene que aSc. Aplicando nuevamente el lema anterior se tiene que bSc. Nuevamente por el lema anterior se llega a que bSa, es decir xSy. ∎

Lema 3.2.16 *Si S es una oligarquía y $S = T \cup U$ con $T \cap U = \emptyset$, entonces ó T ó U es una oligarquía.*

Demostración: Consideremos $a, b, c \in X$ alternativas distintas dos a dos. Como S es una oligarquía se tiene que aSb. Por el Lema 3.2.10 (lema de partición) se tiene que aTc ó cUb. Entonces se concluye usando el lema 3.2.15: si aTc se tiene que T es una oligarquía y cuando cUb se tiene que U es una oligarquía. ∎

Lema 3.2.17 *Sea $f : \mathsf{L}^n \longrightarrow X$ una regla de voto determinista que satisface Pareto. Si S es una oligarquía, entonces existe $i \in S$ tal que $\{i\}$ es una oligarquía.*

Demostración:

Por inducción en el tamaño de S. Si $|S| = 1$ el lema es evidente. Suponga que el lema es verdad para las oligarquías S tal que $|S| = k$. Veamos que vale para una oligarquía S tal que $|S| = k + 1$. Considere un elemento i se S y la partición $S = S \setminus \{i\} \cup \{i\}$. Tenemos que o bien $\{i\}$ es una oligarquía o bien $S \setminus \{i\}$ es una oligarquía. En el primer caso ya tenemos la conclusión del lema en el segundo caso aplicamos la hipótesis de inducción a $S \setminus \{i\}$ el cual tiene cardinalidad k.

∎

Como corolario del lema anterior tenemos el teorema buscado, el cual es una variante -un poco más simple- del Teorema de Manipulabilidad de Gibbard-Satterthwaite:

Teorema 3.2.18 *Sea $f : \mathsf{L}^n \longrightarrow X$ una regla de voto determinista que satisface:*

- *No-manipulabilidad y*
- *Pareto-rv*

Entonces f es una regla de voto dictatorial-rv.

Demostración: Observe que la no manipulabilidad se usó para poder probar el lema precedente. Ahora bien, por Pareto, N es una oligarquía. Así, aplicando el lema anterior tenemos que existe un singletón $\{i\}$ que es una oligarquía es decir, para todo u y todo par $a, b \in X$, si $a \prec_i b$ entonces $f(u) \neq b$ lo que indica que i es un dictador para f. ∎

Debemos destacar que a pesar de la naturaleza negativa de este resultado, en realidad resulta muy difícil manipular (ver el trabajo de Conitzer, Lang y Sandholm [11]).

3.3. Otras versiones del Teorema de Manipulabilidad de Gibbard-Satterthwaite para Reglas de Voto

Vamos a dar unas versiones un poco más generales que las del teorema 3.2.18. Comenzamos con la siguiente observación cuya prueba es evidente de la definición de dictador-rv.

Observación 3.3.1 *Si* $f : \mathsf{P}^n \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ *es una regla de voto total y dictatorial-rv con dictador* i *entonces para todo perfil* $u = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ *se tiene que* $f(u) \subseteq min(\preceq_i)$

Ahora daremos otro teorema de manipulabilidad. Por el resto de esta sección supondremos que las reglas de voto son totales.

Teorema 3.3.2 *Una regla de voto* $f : \mathsf{L}^n \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ *es no-manipulable, no-impositiva y determinista si y sólo si es dictatorial.*

Demostración: (**Si:**) Mostraremos que si f es dictatorial-rv entonces f es no-manipulable, determinista y no-impositiva.

Veamos que f es determinista. Por hipótesis f es dictatorial. Supongamos que i es dictador. Por la observación 3.3.1 $f(u) \subseteq min(\preceq_i)$. Ahora bien como el dominio de f son órdenes lineales se tiene que $|min(\preceq_i)| = 1$ de donde, como f es total, necesariamente $|f(u)| = 1$. Por lo tanto, f es determinista.

Veamos que f es no-manipulable. Consideremos un dictador i (de hecho es trivial ver que cuando hay dictador este es único). Supongamos que f es manipulable con j (el manipulador), u y $\preccurlyeq^*$ (la mentira de j) una situación de manipulación. Notemos que hay dos casos: $j = i$ y $j \neq i$.

Caso 1: $j \neq i$. Como i es dictador se tiene que $f(u) = min(\preceq_i)$. Por otra parte, para j se tiene que $f(u[\preccurlyeq^* /j]) \prec_j f(u)$ lo cual es una contradicción pues $f(u[\preccurlyeq^* /j]) = min(\preceq_i)$.

Caso 2: $j = i$. Notemos que $f(u[\preccurlyeq^* /i]) = min(\preccurlyeq^*)$ y $f(u) = max(\preccurlyeq_i)$. Supongamos que $f(u[\preccurlyeq^* /i]) = b$. Por la hipótesis de que j, u y $\preccurlyeq^*$ es una situación de manipulación se tiene que $f(u[\preccurlyeq^* /i]) \prec_i f(u)$ ó lo que es lo mismo $b \prec_i min(\preccurlyeq_i)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto f es no-manipulable.

Veamos que f es no-impositiva. Por hipótesis f es dictatorial. Supongamos que i es dictador. Por definición $f(u) = min(\preceq_i)$. Así, dado $x \in X$, basta tomar un perfil u con $min(\preceq_i) = x$, para ver que $f(u) = x$. Luego, f es no-impositiva.

(**Sólo si:**) Mostraremos que si f es no-manipulable, no-impositiva y determinista entonces es dictatorial. Para esto probaremos que f satisface la propiedad de Pareto y así podremos aplicar el Teorema 3.2.18.

Supongamos, por reducción al absurdo, que Pareto falla. Así, existe un perfil u tal que $a \prec_i b$ para todo $i \in \mathsf{N}$ pero con $f(u) = b$. Como f es no-impositiva, existe un perfil u' tal que $f(u') = a$. En virtud del lema 3.2.7, partiendo desde u' se llega a un perfil u'' de la forma

$$u'' = \begin{pmatrix} x_{m-2} & x_{m-2} & \dots & x_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ b & b & \dots & b \\ a & a & \dots & a \end{pmatrix}$$

con $f(u'') = a$.

Por otra parte, del lema 3.2.8, partiendo desde u se llega al mismo perfil a u'' y además $f(u''') = b$, lo cual es una contradicción pues f es una función. Por lo tanto, f satisface la propiedad de Pareto.

Finalmente, por el Teorema 3.2.18 f es dictatorial. ∎

Note que la parte no trivial del teorema 3.3.2 es el siguiente resultado:

Teorema 3.3.3 *Sea $f : \mathsf{L}^n \longrightarrow X$ una regla de voto determinista que satisface:*

- *No-manipulabilidad y*
- *No-imposición*

Entonces f es una regla de voto dictatorial.

La siguiente observación es útil.

Observación 3.3.4 *Toda regla de voto $f : \mathsf{P}^n \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ total que satisface unanimidad satisface no-imposición.*

Demostración: Para cada $x \in X$ consideremos un perfil u tal que $min(\preceq_i) = x$. Como f es unánime tenemos que $f(u) = \{x\}$ como queríamos. ∎

Ahora vamos a establecer el resultado que establecieron Gibbard y Satterthwaite separadamente [21, 46].

Teorema 3.3.5 (Gibbard-Satterthwaite) *Sea $f : \mathcal{P}^n \longrightarrow X$ una regla de voto determinista que satisface:*

- *No-manipulabilidad y*
- *No-imposición*

Entonces f es una regla de voto inclusivamente dictatorial-rv.

Demostración: Consideremos f', la restricción a órdenes lineales de f. Como f' es la restricción de f que es no-manipulable, se tiene que f' es no-manipulable.

Queremos probar ahora que f' es no-impositiva, para lo cual primero mostraremos que f' satisface unanimidad, pues unanimidad implica no-imposición en virtud de la proposición 3.3.4. Supongamos por reducción al absurdo que f' no satisface unanimidad, es decir que existe un perfil $u = (\preccurlyeq_1, \preccurlyeq_2, ..., \preccurlyeq_n)$ con $\preccurlyeq_i$ lineal para todo i, para el cual $min(\preceq_i) = \{x\}$ para todo i pero tal que $f'(u) \neq x$.

Como f es no-impositiva se tiene que existe un perfil $u' = (\preccurlyeq'_1, \preccurlyeq'_2, ..., \preccurlyeq'_n)$ con $\preccurlyeq'_i$ preorden total para todo i tal que $f(u') = \{x\}$.

Ahora consideramos la siguiente sucesión de perfiles: $u_0, u_1, \ldots, u_n$ definida recursivamente así: $u_0 = u$ y $u_k = u_{k-1}[\preccurlyeq'_k /k]$ desde $k = 1, \ldots, n$. Note que $u_n = u'$ así $f(u_0) \neq x$ y $f(u_n) = x$.

Luego existe un primer $k \leq n$ tal que $f(u_k) = x$. Entonces $f(u_{k-1}) = z$ con $z \neq x$. Ahora notemos que

$$f(u_{k-1}[\preccurlyeq'_k /k]) = f(u_k) = x \prec_k z = f(u_{k-1}),$$

lo cual representa una situación de manipulación (k el manipulador con mentira $\preccurlyeq'_k$ y u'_{k-1} el verdadero perfil) en contradicción con la hipótesis de que f es no-manipulable.

En consecuencia f' satisface unanimidad y por lo tanto en virtud del lema 3.3.4 es no-impositiva . Luego, como f' es no-manipulable y no-impositiva por el corolario 3.3.2 se tiene que f' es dictatorial.

Sea i un dictador para f'. Queremos ver que i es un dictador inclusivo para f. Supongamos, por reducción al absurdo, que no lo es. Así, existe un perfil u tal que $f(u) = x$ pero $x \notin min(\preceq_i)$.

Para cada k diferente de i sea $\preceq'_k$ un orden lineal tal que $min(\preceq'_i) = \{x\}$. Defina una sucesión de perfiles $u_0, \ldots, u_{n-1}$ de la manera siguiente: $u_0 = u$, desde $j = 1$ hasta $j = i - 1$ ponemos $u_j = u_{j-1}[\preceq'_j /j]$ y desde $j = i$ hasta $j = n-1$ ponemos $u_j = u_{j-1}[\preceq'_{j+1} /j+1]$. Así u_{n-1} es el perfil que se obtiene de u donde cada coordenada k diferente de i fue reemplazada por el orden lineal $\preceq'_k$. La i-ésima coordenada de u_{n-1} es $\preceq_i$, la La i-ésima coordenada de u. Afirmamos que para todo $k = 0, \ldots, n-1$, se tiene que $f(u_k) = x$. Esta afirmación puede ser vista por inducción en k. Si $k = 0$ se tiene que $f(u_0) = f(u) = x$. Suponga que $f(u_k) = x$ y veamos que $f(u_{k+1} = x)$. Si no es el caso, se tiene $f(u_{k+1}) = y$ con $y \neq x$. Note que $u_{k+1} = u_k[\preceq'_{k+1} /k + 1]$ si $k + 1 \leq i - 1$ o bien $u_{k+1} = u_k[\preceq'_{k+2} /k + 2]$ si $k + 1 \geq i$. Entonces, en el primer caso $(k + 1 \leq i - 1)$ tenemos

$$f(u_k) = x \prec'_{k+1} y = f(u_{k+1})$$

Pero esto es una situación de manipulación, pues $u_k = u_{k+1}[\preceq_{k+1} /k+1]$, así $k + 1$ es el manipulador con mentira $\preceq_{k+1}$ y su verdadera preferencia es $\preceq'_{k+1}$ (el perfil verdadero es u_{k+1}). Así llegamos a una contradicción pues f no es manipulable. En el segundo caso $(k + 1 \geq i)$ la prueba es análoga.

Sea ahora $\preceq$ un orden lineal tal que $min(\preceq) = z$ donde $z \in min(\preceq_i)$. Así $z \neq x$. Sea $u' = u_{n-1}[\preceq /i]$. Claramente $u' \in \mathsf{L}^n$, así como i es dictador para f' se tiene, $f'(u') = z$. Pero $f'(u') = f(u')$ y esto nos da una situación de manipulación para f. En efecto tenemos,

$$f(u_{n-1}[\preceq /i]) = f(u') = z \prec_i x = f(u_{n-1})$$

Así el manipulador es i con mentira $\preceq$ y sus preferencias verdaderas $\preceq_i$ (el perfil verdadero es u_{n-1}). De nuevo una contradicción pues f es no manipulable. En consecuencia i es un dictador inclusivo para f. ∎

Vamos a terminar esta sección con una versión general de manipulabilidad de la cual no daremos la prueba. El teorema presentado a continuación fue enunciado y probado por John Duggan y Thomas Schwartz en el año 1993. Dicho trabajo fue publicado en el año 2000 [16] (ver también el trabajo de Benoit [6] y de Barberà, Duta y Sen [5]). .

Antes de enunciar el teorema necesitamos unas definiciones.

Una regla de voto es *manipulable de manera optimista* si existe un individuo i, un perfil u y un orden $\preccurlyeq^*$ con $x \in f(u[\preccurlyeq^* /i])$ tales que para todo $y \in f(u)$ se tiene que $x \prec_i y$.

Una regla de voto es *manipulable de manera pesimista* si existe un individuo i, un perfil u, un orden $\preccurlyeq^*$ y $y \in f(u)$ tales que $x \prec_i y$ para todo $x \in f(u[\preccurlyeq^* /i])$.

Teorema 3.3.6 (versión general para reglas de voto)
Sea $f : \mathsf{P}^n \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ una regla de voto que satisface las dos condiciones siguientes:

- *f no es manipulable de manera optimista ni de manera pesimista;*
- *f es no impositiva*

Entonces f es una regla de voto débilmente inclusiva dictatorial-rv.

Una prueba diferente a la de Duggan-Schwartz puede encontrarse en el trabajo de Rodríguez-Álvarez [43].

Capítulo 4

Estructura e imposibilidad

Hasta el momento hemos simplemente considerado el marco más abstracto de la teoría de elección social. En este marco general las alternativas son simplemente elementos de un subconjunto, elementos que no tienen estructura o bien no se ha tomado en cuenta. Ahora bien, muchas veces las alternativas tienen estructura. Por ejemplo las alternativas pueden ser funciones que representan políticas como en teoría de decisión (ver la obra de Savage [47] o de Gilboa [22]), o bien vectores de ceros y unos que representan modelos como en la lógica de la fusión (ver el trabajo de Konieczny y Pino Pérez [27]). Cuando las alternativas tienen estructura interna ella puede ser usada para construir perfiles de manera muy natural.

En este capítulo estudiamos brevemente las alternativas sobre las cuales hay una distancia (esto está inspirado por las alternativas que vienen de la lógica, los vectores de ceros y unos). En particular nos restringiremos a ciertos perfiles que llamamos estructurados los cuales serán definidos más adelante.

Muchos de los resultados aquí expuestos aparecen en la tesis de Dubraska Salcedo [44] (también se puede consultar el trabajo de Salcedo y Pino Pérez [45]).

4.1. Perfiles Estructurados y Teorema de Arrow

Como ya dijimos, en muchas situaciones las preferencias que se consideran, y por ende los perfiles considerados, tienen cierta estructura.

Entonces cabe preguntarse si para ese tipo de perfiles el teorema de Arrow sigue siendo válido.

En esta sección vamos a estudiar ciertos perfiles estructurados y la validez del teorema de Arrow para esos perfiles.

Vamos a distinguir un subconjunto del conjunto de los perfiles, dado un conjunto de alternativas X con cierta "estructura". Tal "estructura" estará dada por una distancia definida sobre X. Para ello, recordamos la definición de una función de *distancia*.

Definición 4.1.1 *Sea X un conjunto. $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, con $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, es una función de distancia sobre X si satisface las tres propiedades siguientes:*

- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definición 4.1.2 *Sea $X = \{0, 1\}^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Definimos $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ así:*

$$d(x, z) = \# \text{ de coordenadas en que difieren } x \text{ y } z.$$

Es fácil ver que está función es una distancia. Ella es llamada distancia de Hamming.

Definición 4.1.3 *Sea $\mathbb{R}^+$ los reales no negativos. Decimos que*

$$g : \bigcup_{n \geq 1} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

es una función de agregación si satisface: $g(\overline{0}) = 0$ y $g(\overline{x}) = g(\overline{y})$ cuando $\overline{y}$ es una permutación de $\overline{x}$.

Definición 4.1.4 *Sea $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una distancia sobre X. Podemos definir ahora $d^g : X \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una "distancia"[1] entre elementos de X y subconjuntos no vacíos de X a partir de d y una función de agregación $g : \bigcup_{n \geq 1} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de la manera siguiente:*

[1] Estrictamente hablando esto no es una distancia, pero por abuso de lenguaje llamaremos a este tipo de funciones distancias.

$$d^g(x, V) = g(d(x, v_1), ..., d(x, v_n))$$

donde $V = \{v_1, ..., v_n\}$.

Notemos que como g es una función de agregación(en particular no depende del orden en que se presentan sus argumentos), d^g está bien definida.

Ejemplo 4.1.5 *Presentamos algunas de las más comunes:*

- $d^s(x, V) := \sum_{y \in V} d(x, y)$,

  donde $s = g : \bigcup_{n \geq 1} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *esta dada por* $g(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

- $d^{min}(x, V) := min\{d(x, y) : y \in V\}$,

  donde $min = g : \bigcup_{n \geq 1} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *esta dada por* $g(x_1, ..., x_n) = min\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$

- $d^{max}(x, V) := max\{d(x, y) : y \in V\}$,

  donde $max = g : \bigcup_{n \geq 1} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *esta dada por* $g(x_1, ..., x_n) = max\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$

Definición 4.1.6 *Sea* X *un conjunto de alternativas y* d *una distancia sobre* X*. Un preorden total* $\preceq$ *es* d^g-*consistente si existe* $A \in \mathcal{P}^*(X)$ *tal que*

$$x \preceq y \Longleftrightarrow d^g(x, A) \leq d^g(y, A)$$

Ejemplo 4.1.7 *Sean* $X = \{0, 1\}^3$ *y* d *la distancia de Hamming.*

- *El preorden total siguiente es* $d^{min}-$*consistente, con* $A = \{(0, 0, 0)\}$.

$$\begin{array}{ccc} & (1,1,1) & \\ (1,1,0) & (1,0,1) & (0,1,1) \\ (0,0,1) & (0,1,0) & (1,0,0) \\ & (0,0,0) & \end{array}$$

- *El preorden total siguiente es d^s-consistente, con con testigo $A = \{(0,0,0),(0,0,1)\}$.*

$$\begin{array}{c} (1,1,1)\ (1,1,0) \\ (1,0,1)\ (0,1,1)\ (0,1,0)\ (1,0,0) \\ (0,0,1)\ (0,0,0) \end{array}$$

- *El preorden total siguiente es d^s-consistente, con testigo $A = \{(0,0,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$.*

$$\begin{array}{c} (0,1,1) \\ (0,0,1)\ (1,1,1)\ (0,1,0) \\ (0,0,0)\ (1,1,0)\ (1,0,1) \\ (1,0,0) \end{array}$$

Definición 4.1.8 *Un perfil $u = (\preceq_1, \preceq_2, \ldots, \preceq_n)$ es d^g-consistente si para cada i, $\preceq_i$ es d^g-consistente.*

En [28] aparece la noción de perfil $d-$consistente. Es fácil ver que esa noción corresponde a la de perfil $d^{min}-$consistente.

Como queremos estudiar las reglas de elección restringidas a los perfiles d^g-consistentes, modificaremos la definición de algunos postulados.

Definición 4.1.9 *Una regla de elección social f satisface la propiedad de **Dominio** d^g-**consistente(D**d^g**)** si:*

i) Hay al menos tres elementos en X,

ii) Hay al menos tres elementos en N, y

iii) f está definida para cada perfil d^g-consistente.

Definición 4.1.10 *f satisface la propiedad de **Explicaciones Transitivas** d^g-**consistentes (ET**d^g**)** si para cada perfil u d^g-consistente existe un preorden total $\preceq_u$ tal que para cada agenda V, se tiene*

$$f_u(V) = min(V, \preceq_u)$$

Lo interesante es que, si modificamos la hipótesis del Teorema de Imposibilidad cambiando Dominio Estándar por Dominio d^g-consistente y Explicaciones Transitivas por Explicaciones Transitivas d^g-consistentes entonces el teorema sigue siendo válido cuando d^g satisface ciertas propiedades. En particular, la propiedad de Riqueza de la próxima definición.

Definición 4.1.11 (Propiedad de Riqueza.) *Una función de distancia $d^g : X \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisface la Propiedad de **Riqueza** si dados $x, y, z \in X$ distintos entre si, se cumplen las tres condiciones siguientes:*

(i) $\exists Y \subseteq X \left[d^g(x,Y) < d^g(y,Y) < d^g(z,Y)\right]$,

(ii) $\exists Y \subseteq X \left[d^g(x,Y) = d^g(y,Y) < d^g(z,Y)\right]$

(iii) $\exists Y \subseteq X \left[d^g(x,Y) < d^g(y,Y) = d^g(z,Y)\right]$

En tal caso, diremos que d^g es rica.

Ahora estamos listos para enunciar el Teorema de Arrow modificado:

Teorema 4.1.12 (Teorema de Imposibilidad de Arrow para perfiles d^g-consistentes)
Sean d^g una distancia rica entre elementos de X y subconjuntos no vacíos de X y f una función de elección social que satisface:

1. *Dominio d^g-consistente,*
2. *Explicaciones Transitivas d^g-consistentes,*
3. *Independencia de Alternativas Irrelevantes, y*
4. *Pareto Débil.*

Entonces f es dictatorial.

La demostración se deja como ejercicio al lector. Es similar a la prueba dada en el capítulo 2. La propiedad de riqueza permite llevar adelante las construcciones de la prueba.

4.2. Funciones de Elección Social definidas a partir de distancias

En esta sección definiremos funciones de elección a partir de distancias siguiendo las ideas presentadas en [28].

Definición 4.2.1 *Dado un conjunto A definimos $\mathcal{M}(A)$ como el conjunto formado por todos los multiconjuntos cuyos elementos están en A.*

Definición 4.2.2 *Dada la función de distancia $d^g : X \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ y h una función de agregación, definimos la distancia $d^{g,h}$ entre un elemento de X y un multiconjunto de $\mathcal{P}^*(X)$ así:*

$$d^{g,h} : X \times \mathcal{M}(\mathcal{P}^*(X)) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$d^{g,h}(x, \mu) = h(d^g(x, A_1), ..., d^g(x, A_k)),$$

donde $\mu = \{A_1, ..., A_k\}$.

Dado un perfil d^g-consistente, $u = (\preceq_1, \dots, \preceq_n)$, le asociamos $\rho_u \in \mathcal{M}(\mathcal{P}^*(X))$, llamado el conjunto de códigos[2]*, definido de la siguiente manera:*

$$\rho_u = \{A_1, \dots, A_n\},$$

donde A_i es el testigo de que $\preceq_i$ es d^g-consistente, es decir, $a \preceq_i b$ si y solamente si $d^g(a, A_i) \leq d^g(b, A_i)$.

Note que en si $g = min$ el código de un preorden total d^g-consistente es único. Pero en general, para una función de agregación cualquiera no sabemos si el código es único. Nosotros conjeturamos que para la suma, es decir $g = s$ el código es único. De todas maneras, podemos suponer que tenemos una función ρ_u que asocia a un perfil d^g-consistente un conjunto de códigos.

Ahora definimos la relación $\preceq_u^h$ asociado a u así:

$$x \preceq_u^h y \Longleftrightarrow d^{g,h}(x, \rho_u) \leq d^{g,h}(y, \rho_u)$$

Es fácil verificar que $\preceq_u^h$ es un preorden total.

[2]En [28] este conjunto es llamado el conjunto de preferencias principales pues los códigos corresponden al primer nivel en el caso en que $g = min$ que fue el único caso estudiado allí.

Finalmente definimos,

$$f^h : \mathcal{P} \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X), \ \ y$$

$$f^h_u(V) = min(V, \preceq^h_u)$$

Observe que nada más considerando $g, h \in \{max, min, s\}$ obtenemos 9 funciones de elección distintas. A continuación damos dos ejemplos con $g = min$ y h será una vez s y otra max.

Ejemplo 4.2.3 [3] *Veamos dos ejemplos. Para el primero tomamos* $\mathsf{N} = \{1, 2, 3, 4\}$*,* $X = \{0, 1\}^4$*,* d *la distancia de Hamming,*

$$g, h : \bigcup_{n \geq 1} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

dadas por $g(x_1, ..., x_n) = min\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ *y* $h(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Codifiquemos las alternativas de la siguiente manera:

$x_0 = (0, 0, 0, 0)$	$x_1 = (0, 0, 0, 1)$	$x_2 = (0, 0, 1, 0)$	$x_3 = (0, 0, 1, 1)$
$x_4 = (0, 1, 0, 0)$	$x_5 = (0, 1, 0, 1)$	$x_6 = (0, 1, 1, 0)$	$x_7 = (0, 1, 1, 1)$
$x_8 = (1, 0, 0, 0)$	$x_9 = (1, 0, 0, 1)$	$x_{10} = (1, 0, 1, 0)$	$x_{11} = (1, 0, 1, 1)$
$x_{12} = (1, 1, 0, 0)$	$x_{13} = (1, 1, 0, 1)$	$x_{14} = (1, 1, 1, 0)$	$x_{15} = (1, 1, 1, 1)$

Así, $X = \{x_0, \cdots, x_{15}\}$*. Sea* $u = (\preceq_1, \preceq_2, \preceq_3, \preceq_4)$*, tal que el conjunto de códigos asociado* $\rho_u = \{A_1, \cdots, A_4\}$ *viene dado de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{ll} A_1 = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\} & A_2 = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\} \\ A_3 = \{(0, 0, 0, 0)\} & A_4 = \{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0)\} \end{array}$$

Ilustraremos esta situación con la siguiente tabla:
Sea $V = X \setminus \{(0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0)\}$

[3] Ejemplos tomados de [28]

V	A_1	A_2	A_3	A_4	$d^{min,s}$
(0,0,0,0)	*3*	*3*	*0*	*2*	*8*
(0,0,0,1)	*3*	*3*	*1*	*3*	*10*
(0,0,1,0)	*2*	*2*	*1*	*1*	*6*
(0,0,1,1)	*2*	*2*	*2*	*2*	*8*
(0,1,0,0)	*2*	*2*	*1*	*1*	*6*
(0,1,0,1)	*2*	*2*	*2*	*2*	*8*
(0,1,1,1)	*1*	*1*	*3*	*1*	*6*
(1,0,0,0)	*2*	*2*	*1*	*2*	*7*
(1,0,0,1)	*2*	*2*	*2*	*3*	*9*
(1,0,1,1)	*1*	*1*	*3*	*2*	*7*
(1,1,0,1)	*1*	*1*	*3*	*2*	*7*
(1,1,1,1)	*0*	*0*	*4*	*1*	***5***

De la tabla es fácil ver que $f_u^s(V) = \{(1,1,1,1)\}$*, pues* $(1,1,1,1)$ *es el vector que minimiza la "distancia"* $d^{min,s}$.

Para el segundo ejemplo tomamos N*,* X*,* d *y* g *como en el ejemplo anterior. Pero*

$$h : \bigcup_{n\geq 1} (\mathbb{R}^+)^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

dada por $h(x_1, ..., x_n) = max\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$.

Consideremos $u = (\preceq_1, \preceq_2, \preceq_3, \preceq_4)$*, tal que el conjunto de códigos asociado* $\rho_u = \{A_1, \cdots, A_4\}$ *viene dado de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{ll} A_1 = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0)\} & A_2 = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0)\} \\ A_3 = \{(0,0,0,0)\} & A_4 = \{(0,1,1,0),(1,1,1,0)\} \end{array}$$

Ilustraremos esta situación con la siguiente tabla:
Sea $V = X \setminus \{(0,1,1,0),(1,0,1,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}$

	A_1	A_2	A_3	A_4	$d^{min,max}$
(0,0,0,0)	*3*	*3*	*0*	*2*	*3*
(0,0,0,1)	*3*	*3*	*1*	*3*	*3*
(0,0,1,0)	*2*	*2*	*1*	*1*	**2**
(0,0,1,1)	*2*	*2*	*2*	*2*	**2**
(0,1,0,0)	*2*	*2*	*1*	*1*	**2**
(0,1,0,1)	*2*	*2*	*2*	*2*	**2**
(0,1,1,1)	*1*	*1*	*3*	*1*	*3*
(1,0,0,0)	*2*	*2*	*1*	*2*	**2**
(1,0,0,1)	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*
(1,0,1,1)	*1*	*1*	*3*	*2*	*3*
(1,1,0,1)	*1*	*1*	*3*	*2*	*3*
(1,1,1,1)	*0*	*0*	*4*	*1*	*4*

Es fácil ver que

$$f_u^{max}(V) = \{(0,0,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,0),(0,1,0,1),(1,0,0,0)\}$$

Un punto interesante cuando se estudian estas reglas es el de saber cuando d^g es rica pues sabemos que esa va a ser una condición suficiente para que el teorema de Arrow sea satisfecho.

La sección siguiente está dedicada al estudio de la propiedad de riqueza para d^{min} y d^s cuando d es la distancia de Hamming.

4.3. Distancias Ricas y no Ricas

Consideremos $X = \{0,1\}^n$ con $n \in \mathbb{N}$ y d la distancia de Hamming.

Las siguientes observaciones y notaciones sobre d, cuyas pruebas son inmediatas de las definiciones, nos serán de mucha utilidad en lo que sigue.

Observaciones:

O1 Dado $x = (x_1, ..., x_n) \in X$ sabemos que $x_i \in \{0,1\}, \forall i \in N$.

Para cada $i \in N$ definimos

$$\overline{x_i} = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i = 1 \\ 1 & \text{si } x_i = 0 \end{cases}$$

O2 Si $d(x,y) = t$ entonces $d(\overline{x}, y) = n - t$.

O3 Para cada vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ existe un único vector $\overline{x} \in X$ tal que $d(x, \overline{x}) = n$. A saber, $\overline{x} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$.

Contrariamente a lo que podría pensarse en un primer tiempo, la distancia d^{min} no es rica. Esto es precisamente lo que nos dice el siguiente teorema:

Teorema 4.3.1 *Si d es la distancia de Hamming entonces d^{min} no es rica para todo $n \geq 3$.*

Demostración: La demostración se basa en mostrar que dados los vectores $x = (0, 0, 0, \ldots, 0)$, $y = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ y $z = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ no existe $Y \subseteq X$ tal que

$$d^{min}(x, Y) < d^{min}(y, Y) < d^{min}(z, Y) \tag{4.1}$$

Por reducción al absurdo.

Supongamos que existe $Y \subseteq X$ tal que satisface (4.1).

Afirmación 1 $y, z \notin Y$

Si $y \in Y$ o $z \in Y$ entonces $d^{min}(y, Y) = 0$ ó $d^{min}(z, Y) = 0$ respectivamente. Esto contradice que $d^{min}(x, Y) < d^{min}(y, Y)$ o bien que $d^{min}(x, Y) < d^{min}(z, Y)$ respectivamente.

Afirmación 2 $x \notin Y$

Por la afirmación 1 tenemos que $d^{min}(y, Y) > 0$, luego, por (4.1), $d^{min}(z, Y) > 1$.

Pero si $x \in Y$ entonces $d^{min}(z, Y) \leq 1$. Por lo tanto, $x \notin Y$.

Sea $w = (w_1, \ldots, w_n) \in X$. Definimos $|w|_0$ como el número de ceros que tiene w, y $|w|_1$ como el número de unos que tiene w.

Sea $w \in Y$ tal que $d(x, w) = d^{min}(x, Y)$.

Por las afirmaciones anteriores $w \neq x$, $w \neq y$ y $w \neq z$. Así, $d^{min}(x, Y) = d(x, w) = |w|_1$.

$w_1 \neq 1$, ya que de lo contrario tendríamos que $d(y, w) = |w|_1 - 1 \geq d^{min}(y, Y)$. Lo que contradice que

$$d^{min}(x, Y) < d^{min}(y, Y)$$

De manera análoga tenemos que $w_2 \neq 1$.

Por lo tanto, las coordenadas de w que tienen 1, tienen índices mayores o iguales a 3.

De donde, $d(y,w) = |w|_1 + 1$ y $d(z,w) = |w|_1 + 1$.

Como $d^{min}(x,Y) < d^{min}(y,Y)$ entonces $d^{min}(y,Y) = |w|_1 + 1$. Pero, esto contradice que

$$d^{min}(y,Y) < d^{min}(z,Y).$$

De esta manera concluye la demostración.

∎

A diferencia del teorema anterior tenemos que d^s es rica. Para demostrarlo vamos a establecer una serie de lemas que prueban por separado cada una de las propiedades de riqueza.

Lema 4.3.2 *Sean $X = \{0,1\}^n$ con $n \geq 3$, d la distancia de Hamming sobre X y $x, y, z \in X$ distintos entre sí. Entonces existe $Y \subseteq X$ tal que*

$$d^s(x,Y) < d^s(y,Y) < d^s(z,Y). \tag{4.2}$$

La demostración de este Lema consta de tres partes, que corresponden a los tres casos siguientes:

$$d(x,y) < d(x,z), \quad d(x,y) = d(x,z) \quad \text{ó} \quad d(x,y) > d(x,z)$$

Con el fin de ayudar al lector a seguir la prueba (que es una prueba por casos) presentamos a continuación, de manera esquemática y exhaustiva, el árbol de los casos analizados:

CASO 1: $d(x,y) < d(x,z)$.
CASO 2: $d(x,y) = d(x,z) = k$. Aquí consideramos dos subcasos:
2.1: $k = 1$ y **2.2**: $k > 1$; este caso 2.2, a su vez, se divide en tres subcasos:

(a) Las coordenadas en que y difiere de x son distintas a las coordenadas en que z difiere de x y $k \neq n/2$.

(b) Las coordenadas en que y difiere de x son distintas a las coordenadas en que z difiere de x y $k = n/2$.

(c) Al menos en una de las coordenadas en que y difiere de x también z difiere de x.

CASO 3: $k = d(x,z) < d(x,y) = s$. Aquí consideramos 4 subcasos:

3.1 $s = n$ y $k > \frac{n}{2}$

3.2 $s = n$ y $k = \frac{n}{2}$

3.3 $s = n$ y $k < \frac{n}{2}$ el cual, a su vez se divide en:

(a) n par

(b) n impar

3.4 $s < n$ que a su vez se divide en:

(a) Las coordenadas en que x difiere de z son distintas a las coordenadas en que x difiere de y.

(b) Al menos en una de las coordenadas en que x difiere de z también x difiere de y.

Demostración:

CASO 1: $d(x,y) < d(x,z)$. Para este caso basta tomar, $Y = \{x\}$. Así, $0 = d^s(x,Y) < d(x,y) = d^s(y,Y) < d(x,z) = d^s(z,Y)$.

CASO 2: $d(x,y) = d(x,z) = k$. Notemos que $k \neq n$. En efecto, si $k = n$ entonces necesariamente $y = z$, por **O**3. Pero, por hipótesis $y \neq z$.

CASO 2.1: $k = 1$. Necesariamente, $d(y,z) = 2$, ya que y difiere de x en una coordenada que es distinta de la única coordenada en la que difiere z de x. Sin pérdida de generalidad la situación es como está descrita por los vectores más abajo.

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a x en una coordenada distinta de la coordenada por la que difiere de y y distinta también de la coordenada por la que difiere de z. La existencia de t está garantizada porque $n \geq 3$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es como en los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} x &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ y &= (\overline{a_1}, a_2, \ldots, a_n) \\ z &= (a_1, \overline{a_2}, \ldots, a_n) \\ t &= (a_1, a_2, \ldots, \overline{a_n}) \end{aligned}$$

Tenemos que

$d(x,t) = 1$

$d(y,t) = 2$

$d(z,t) = 2$

Luego, tomamos $Y = \{x,y,t\}$ y tenemos lo deseado, pues

$d^s(x,Y) = 0 + 1 + 1 = 2$

$d^s(y,Y) = 1 + 0 + 2 = 3$

$d^s(z,Y) = 1 + 2 + 2 = 5$

CASO 2.2: $1 < k$. Aquí tenemos tres posibilidades:

(a) Las coordenadas en que y difiere de x son distintas a las coordenadas en que z difiere de x y $k \neq n/2$. Esto en particular nos dice que $2k < n$.

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a x en una coordenada distinta de las coordenadas por las que difiere de y y distinta también de las coordenadas por las que difiere de z. Tal coordenada existe porque por las hipótesis $2k < n$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es como en los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
x &= (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-k+1}, \ldots, a_n)\\
y &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1}, \ldots, a_{n-k+1}, \ldots, a_n)\\
z &= (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, \overline{a_{n-k+1}}, \ldots, \overline{a_n})\\
t &= (a_1, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}}, \ldots, a_{n-k+1}, \ldots, a_n)
\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$d(x,t) = 1$

$d(y,t) = k + 1$

$d(z,t) = k + 1$

Luego, tomando $Y = \{x, y, t\}$, se satisface (4.2), pues

$$d^s(x, Y) = 0 + k + 1 = k + 1$$
$$d^s(y, Y) = k + 0 + (k + 1) = 2k + 1$$
$$d^s(z, Y) = k + 2k + (k + 1) = 4k + 1$$

(b) Las coordenadas en que y difiere de x son distintas a las coordenadas en que z difiere de x y $k = n/2$.

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a x en una de las coordenadas por las que difiere de z, por tanto, distinta de cada coordenada por las que x difiere de y.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación está representada por los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
x &= (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n) \\
y &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n) \\
z &= (a_1, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}}, \ldots, \overline{a_{n-1}}, \overline{a_n}) \\
t &= (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}, \overline{a_n})
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que

$$d(x, t) = 1$$
$$d(y, t) = k + 1$$
$$d(z, t) = k - 1$$

Luego, tomando $Y = \{x, y, t\}$, tenemos que

$$d^s(x, Y) = 0 + k + 1 = k + 1$$
$$d^s(y, Y) = k + 0 + (k + 1) = 2k + 1$$
$$d^s(z, Y) = k + 2k + (k - 1) = 2k + (2k - 1)$$

Como $k > 1$ entonces $2k - 1 > 1$. Así, se satisface claramente (4.2).

(c) Al menos en una de las coordenadas en que y difiere de x también z difiere de x.

Sea l la cantidad de coordenadas en que tanto z como y difieren de x. Así, $l > 0$. Notemos además, que $k - l \geq 0$, pues, $k - l \geq 0$ es equivalente a $k \geq l$ y esta última desigualdad es verdadera por la definición de l. Pero además, $k \neq l$, pues de lo contrario tendríamos que $y = z$, lo cual es una contradicción. Entonces tenemos $k > l$, es decir, $k - l > 0$.

Notemos que: $d(z, y) = 2(k - l)$, porque $d(x, y) = k = d(x, z)$ y l es el número de coordenadas en que ambos y y z difieren de x.

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a x en una de las coordenadas por las que difiere de y pero no de z, y $t' \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a x en una de las coordenadas por la que difiere de z pero no de y.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación está representada por los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
x &= (a_1, \ldots, a_{k-l+1}, \ldots, a_k, a_{k+1} \ldots, a_{k+(k-l)}, \ldots, a_n) \\
y &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{k-l+1}}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1} \ldots, a_{k+(k-l)}, \ldots, a_n) \\
z &= (a_1, \ldots, \overline{a_{k-l+1}}, \ldots, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}} \ldots, \overline{a_{k+(k-l)}}, \ldots, a_n) \\
t &= (a_1, \ldots, a_{k-l+1}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1} \ldots, a_{k+(k-l)}, \ldots, a_n) \\
t' &= (\overline{a_1}, \ldots, a_{k-l+1}, \ldots, a_k, a_{k+1} \ldots, a_{k+(k-l)}, \ldots, a_n)
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que

$$
\begin{aligned}
d(x, t) &= 1 & d(x, t') &= 1 \\
d(y, t) &= k + 1 & d(y, t') &= k - 1 \\
d(z, t) &= k - 1 & d(z, t') &= k + 1
\end{aligned}
$$

Luego, tomando $Y = \{x, y, t, t'\}$, tenemos que

$$d^s(x, Y) = 0 + k + 1 + 1 = k + 2$$

$$d^s(y,Y) = k + 0 + (k+1) + (k-1) = 3k$$
$$d^s(z,Y) = k + 2(k-l) + (k-1) + (k+1) = 3k + 2(k-l)$$

Como $k > 1$, $3k > k+2$ y como $k - l > 0$, $3k + 2(k-l) > 3k$. Así, se satisface (4.2).

CASO 3: $k = d(x,z) < d(x,y) = s$

CASO 3.1: $s = n$ y $k > \frac{n}{2}$. Tenemos que $d(z,y) = n - k$ por **O**2. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$\begin{aligned} x &= (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \\ y &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}}, \ldots, \overline{a_n}) \\ z &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1} \ldots, a_n) \\ \overline{z} &= (a_1, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}} \ldots, \overline{a_n}) \end{aligned}$$

Sea $Y = \{\overline{z}\}$. Entonces tenemos

$$d^s(x,Y) = n - k$$
$$d^s(y,Y) = k$$
$$d^s(z,Y) = n$$

Como $k > \frac{n}{2}$ entonces $n - k < k$. Así, se satisface (4.2).

CASO 3.2: $s = n$ y $k = \frac{n}{2}$. Tenemos que $d(x,\bar{z}) = d(y,\bar{z}) = \frac{n}{2}$.

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a $\bar{z}$ en una de las coordenadas en que x no difiere de z.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$\begin{aligned} x &= (a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n) \\ y &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{k-1}}, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}}, \overline{a_{k+2}}, \ldots, \overline{a_n}) \\ z &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{k-1}}, \overline{a_k}, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n) \\ \overline{z} &= (a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, \overline{a_{k+1}}, \overline{a_{k+2}}, \ldots, \overline{a_n}) \\ t &= (a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \overline{a_{k+2}}, \ldots, \overline{a_n}) \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$d(x,t) = k - 1$$
$$d(y,t) = k + 1$$
$$d(z,t) = n - 1$$

Tomemos $Y = \{\overline{z}, t\}$, luego,

$$d^s(x,Y) = \frac{n}{2} + (k-1) = n - 1$$
$$d^s(y,Y) = \frac{n}{2} + (k+1) = n + 1$$
$$d^s(z,Y) = n + (n-1) = 2n - 1$$

Como $n \geq 3$ tenemos que $2n-1 > n+1$. Por lo tanto, se satisface (4.2).

CASO 3.3: $s = n$ y $k < \frac{n}{2}$.

(a) Supongamos primero que n es par.

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer $\frac{n}{2}$ cambios a x en coordenadas en que x no difiere de z, $t' \in X$ el vector que resulta de hacer $\frac{n}{2}$ cambios a x en coordenadas en que x no difiere de z, pero $t \neq t'$(la existencia de t' está garantizada porque $k < \frac{n}{2}$), y $r \in X$ el vector que resulta de hacer $\frac{n}{2} - k$ cambios a x en coordenadas en que x no difiere de z.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$x = (a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_{(n/2)-1}, a_{n/2}, a_{(n/2)+1}, \ldots, a_{(n/2)+k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n)$$
$$y = (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, \ldots, \overline{a_{(n/2)-1}}, \overline{a_{n/2}}, \overline{a_{(n/2)+1}}, \ldots, \overline{a_{(n/2)+k+1}}, \ldots, \overline{a_{n-1}}, \overline{a_n})$$
$$z = (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, \ldots, a_{(n/2)-1}, a_{n/2}, a_{(n/2)+1}, \ldots, a_{(n/2)+k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n)$$
$$t = (a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_{(n/2)-1}, a_{n/2}, \overline{a_{(n/2)+1}}, \ldots, \overline{a_{(n/2)+k+1}}, \ldots, \overline{a_{n-1}}, \overline{a_n})$$
$$t' = (a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_{(n/2)-1}, \overline{a_{n/2}}, \overline{a_{(n/2)+1}}, \ldots, \overline{a_{(n/2)+k+1}}, \ldots, \overline{a_{n-1}}, a_n)$$
$$r = (a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_{(n/2)-1}, a_{n/2}, a_{(n/2)+1}, \ldots, \overline{a_{(n/2)+k+1}}, \ldots, \overline{a_{n-1}}, \overline{a_n})$$

Así, tenemos que:

$$
\begin{array}{lll}
d(x,t) = \dfrac{n}{2} & d(x,t') = \dfrac{n}{2} & d(x,r) = \dfrac{n}{2} - k \\[2ex]
d(y,t) = \dfrac{n}{2} & d(y,t') = \dfrac{n}{2} & d(y,r) = \dfrac{n}{2} + k \\[2ex]
d(z,t) = \dfrac{n}{2} + k & d(z,t') = \dfrac{n}{2} + k & d(z,r) = \dfrac{n}{2}
\end{array}
$$

Tomando $Y = \{t, t', r\}$ tenemos:

$$d^s(x,Y) = n + \frac{n}{2} - k$$

$$d^s(y,Y) = n + \frac{n}{2} + k$$

$$d^s(z,Y) = n + \frac{n}{2} + 2k$$

Así, claramente Y satisface (4.2).

(b) Ahora supongamos que n es impar. Supongamos $k > 1$.

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer $\dfrac{n-1}{2}$ cambios a x en coordenadas en que x no difiere de z.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
x &= (a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_{(n+1)/2}, a_{((n+1)/2)+1}, \ldots, a_n) \\
y &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, \ldots, \overline{a_{(n+1)/2}}, \overline{a_{((n+1)/2)+1}}, \ldots, \overline{a_n}) \\
z &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, \ldots, a_{(n+1)/2}, a_{((n+1)/2)+1}, \ldots, a_n) \\
t &= (a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_{(n+1)/2}, \overline{a_{((n+1)/2)+1}}, \ldots, \overline{a_n})
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que:

$$d(x,t) = \frac{n-1}{2}$$

$$d(y,t) = \frac{n-1}{2} + 1$$

$$d(z,t) = \frac{n-1}{2} + k$$

Como $k > 1$ entonces $d(z,r) > d(y,r)$. Por lo tanto, basta tomar $Y = \{t\}$ para que se cumpla (4.2).

Supongamos ahora que $k = 1$

Estudiamos dos posibilidades: $n = 3$ y $n \geq 5$

Si $n = 3$ entonces, consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a x en una de las coordenadas en que x no difiere de z, $t' \in X$ el punto que resulta de hacer un cambio en la otra coordenada en que x no difiere de z.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$\begin{aligned}
x &= (a_1, a_2, a_3) \\
y &= (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}) \\
z &= (\overline{a_1}, a_2, a_3) \\
\overline{z} &= (a_1, \overline{a_2}, \overline{a_3}) \\
t &= (a_1, a_2, \overline{a_3}) \\
t' &= (a_1, \overline{a_2}, a_3)
\end{aligned}$$

Así, tenemos que:

$$d(x,t) = 1 \qquad d(x,t') = 1$$

$$d(y,t) = 2 \qquad d(y,t') = 2$$

$$d(z,t) = 2 \qquad d(z,t') = 2$$

Tomando $Y = \{\overline{z}, t, t'\}$ tenemos:

$$d^s(x,Y) = 2 + 1 + 1$$

$$d^s(y,Y) = 1 + 2 + 2$$

$$d^s(z,Y) = 3 + 2 + 2$$

De donde es claro que se satisface (4.2).

Ahora, si $n \geq 5$ entonces consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a x en una de las coordenadas en que x no difiere de z, $t' \in X$ un vector con las mismas condiciones de t, $t' \neq t$(esto es posible porque $n \geq 3$), y $r \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a $\overline{z}$ en una de las coordenadas distintas a la única en que z y y coinciden. La existencia de r (diferente tanto de t como de t') está garantizada porque $n \geq 5$ (si $n = 3$ entonces r coincide con t ó t').

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
x &= (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n) \\
y &= (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \ldots, \overline{a_n}) \\
z &= (\overline{a_1}, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n) \\
\overline{z} &= (a_1, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \ldots, \overline{a_n}) \\
t &= (a_1, \overline{a_2}, a_3, a_4, \ldots, a_n) \\
t' &= (a_1, a_2, \overline{a_3}, a_4, \ldots, a_n) \\
r &= (a_1, a_2, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \ldots, \overline{a_n})
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que:

$d(x, t) = 1$	$d(x, t') = 1$	$d(x, r) = n - 2$
$d(y, t) = n - 1$	$d(y, t') = n - 1$	$d(y, r) = 2$
$d(z, t) = 2$	$d(z, t') = 2$	$d(z, r) = n - 1$

Tomando $Y = \{\overline{z}, t, t', r\}$, se puede ver fácilmente que:

$$d^s(x, Y) = 2n - 1$$

$$d^s(y, Y) = 2n + 1$$

$$d^s(z, Y) = 2n + 3$$

Así, Y satisface (4.2).

CASO 3.4**:** $s < n$. Hay dos posibilidades:

(a) Las coordenadas en que x difiere de z son distintas a las coordenadas en que x difiere de y.

Supongamos que s es impar.

Notemos que, como $1 \leq k < s$ y suponemos s impar entonces $s \geq 3$. Luego, $\frac{s-1}{2} \geq 1$.

Consideremos entonces $t \in X$, el vector que resulta de hacer $\frac{s-1}{2}$ cambios a x en coordenadas en que difiere de y, $t' \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a y en una de las coordenadas en que difiere de x, y $t'' \in X$ el vector que resulta de hacer $\frac{s+1}{2}$ cambios a x en coordenadas en que difiere de y, y no de z.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$x = (a_1, .., a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, .., a_{k+((s-1)/2)}, a_{k+((s+1)/2)}, .., a_{k+s}, a_{k+s+1}, .., a_n)$$
$$y = (a_1, .., a_k, \overline{a_{k+1}}, \overline{a_{k+2}}, .., \overline{a_{k+((s-1)/2)}}, \overline{a_{k+((s+1)/2)}}, .., \overline{a_{k+s}}, a_{k+s+1}, .., a_n)$$
$$z = (\overline{a_1}, .., \overline{a_k}, a_{k+1}, a_{k+2}, .., a_{k+((s-1)/2)}, a_{k+((s+1)/2)}, .., a_{k+s}, a_{k+s+1}, .., a_n)$$
$$t = (a_1, .., a_k, \overline{a_{k+1}}, \overline{a_{k+2}}, .., \overline{a_{k+((s-1)/2)}}, a_{k+((s+1)/2)}, .., a_{k+s}, a_{k+s+1}, .., a_n)$$
$$t' = (a_1, .., a_k, a_{k+1}, \overline{a_{k+2}}, .., \overline{a_{k+((s-1)/2)}}, \overline{a_{k+((s+1)/2)}}, .., \overline{a_{k+s}}, a_{k+s+1}, .., a_n)$$
$$t'' = (a_1, .., a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, .., a_{k+((s-1)/2)}, \overline{a_{k+((s+1)/2)}}, .., \overline{a_{k+s}}, a_{k+s+1}, .., a_n)$$

Así, tenemos que:

$$\begin{array}{lll} d(x,t) = \frac{s-1}{2} & d(x,t') = s-1 & d(x,t'') = \frac{s+1}{2} \\ d(y,t) = \frac{s+1}{2} & d(y,t') = 1 & d(y,t'') = \frac{s-1}{2} \\ d(z,t) = k + \frac{s-1}{2} & d(z,t') = k+s-1 & d(z,t'') = \frac{s+1}{2} + k \end{array}$$

Tomando $Y = \{x, t, t', t''\}$ tenemos:

$$d^s(x,Y) = s + (s-1) = 2s - 1$$

$$d^s(y,Y) = s + (s+1) = 2s + 1$$

$$d^s(z,Y) = s + (s-1) + 4k = 2s + (4k-1)$$

Como $k \geq 1$ entonces $4k \geq 4$. Así, Y satisface claramente (4.2).

Si s es par entonces

consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a y en una de las coordenadas en que difiere de x, y $t' \in X$ el vector que resulta de hacer $\frac{s}{2}$ cambios a x en coordenadas en que difiere de y.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$x =$
$(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots, a_{k+(s/2)}, a_{k+(s/2)+1}, \ldots, a_{k+s}, a_{k+s+1}, \ldots, a_n)$
$y =$
$(a_1, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}}, \overline{a_{k+2}} \ldots, \overline{a_{k+(s/2)}}, \overline{a_{k+(s/2)+1}}, \ldots, \overline{a_{k+s}}, a_{k+s+1}, \ldots, a_n)$
$z =$
$(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots, a_{k+(s/2)}, a_{k+(s/2)+1}, \ldots, a_{k+s}, a_{k+s+1}, \ldots, a_n)$
$t =$
$(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \overline{a_{k+2}} \ldots, \overline{a_{k+(s/2)}}, \overline{a_{k+(s/2)+1}}, \ldots, \overline{a_{k+s}}, a_{k+s+1}, \ldots, a_n)$
$t' =$
$(a_1, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}}, \overline{a_{k+2}} \ldots, \overline{a_{k+(s/2)}}, a_{k+(s/2)+1}, \ldots, a_{k+s}, a_{k+s+1}, \ldots, a_n)$

Así, tenemos que:

$$d(x,t) = s - 1 \qquad d(x,t') = \frac{s}{2}$$

$$d(y,t) = 1 \qquad d(y,t') = \frac{s}{2}$$

$$d(z,t) = k + s - 1 \qquad d(z,t') = \frac{s}{2} + k$$

Tomando $Y = \{x, t, t'\}$ tenemos:

$$d^s(x,Y) = (s-1) + \frac{s}{2}$$

$$d^s(y,Y) = s + 1 + \frac{s}{2}$$

$$d^s(z,Y) = s + \frac{s}{2} + 3k - 1$$

Como $k \geq 1$ entonces $3k \geq 3$, luego, $3k > 2$. Así, $d^s(y,Y) < d^s(z,Y)$. Por lo tanto esa elección de Y satisface (4.2).

(b) Al menos en una de las coordenadas en que x difiere de z también x difiere de y.

Llamemos l la cantidad de coordenadas en que tanto z como y difieren de x y r es el entero que satisface la ecuación siguiente

$$n = k + s - l + r,$$

es decir, r es el número de coordenadas en que los tres vectores x, y y z coinciden.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$\begin{aligned} x &= (a_1, \ldots, a_{k-l}, a_{k-l+1}, \ldots, a_k, a_{k+1} \ldots, a_{(k-l)+s}, a_{(k-l)+s+1}, \ldots, a_n) \\ y &= (a_1, \ldots, a_{k-l}, \overline{a_{k-l+1}}, \ldots, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}} \ldots, \overline{a_{(k-l)+s}}, a_{(k-l)+s+1}, \ldots, a_n) \\ z &= (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{k-l}}, \overline{a_{k-l+1}}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1} \ldots, a_{(k-l)+s}, a_{(k-l)+s+1}, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

Veamos que basta tomar $Y = \{x, \overline{z}\}$.

Sabemos que:

$$\begin{aligned} d(x,x) &= 0 & d(x,\overline{z}) &= n - k \\ d(y,x) &= s & d(y,\overline{z}) &= n - d(y,z) \\ d(z,x) &= k & d(z,\overline{z}) &= n \end{aligned}$$

Como $d(x,y) = s$, $d(x,z) = k$ y son l las coordenadas en que ambos y y z difieren de x, es decir en esas coordenadas ambos coinciden entonces $d(y,z) = (s-l) + k - l$, es decir, $d(y,z) = s + k - 2l$. Luego, $d(y,\overline{z}) = r + l$.

Por lo tanto,

$d^s(x,Y) = s + r - l$

$d^s(y,Y) = s + r + l$

$d^s(z,Y) = s + r + (2k - l)$

Como $l < k$, $l < 2k - l$ y por lo tanto $d^s(y,Y) < d^s(z,Y)$, y así, Y satisface (4.2). ∎

Lema 4.3.3 *Sean $X = \{0,1\}^n$ con $n \geq 3$, d la distancia de Hamming sobre X y $x, y, z \in X$ distintos entre sí. Entonces existe $Y \subseteq X$ tal que*

$$d^s(x,Y) = d^s(y,Y) < d^s(z,Y) \tag{4.3}$$

La demostración de este Lema consta de dos partes, a saber(por la desigualdad triangular):

$$d(x,y) < d(x,z) + d(y,z) \quad \text{ó} \quad d(x,y) = d(x,z) + d(y,z)$$

Demostración:

CASO 1. $d(x,y) < d(x,z) + d(y,z)$.

Basta tomar $Y = \{x,y\}$, puesto que

$d^s(x,Y) = 0 + d(x,y)$
$d^s(y,Y) = d(x,y) + 0$
$d^s(z,Y) = d(x,z) + d(y,z)$

de donde claramente se satisface (4.3).

CASO 2. $d(x,y) = d(x,z) + d(y,z)$.

Pongamos $d(x,z) = k$ y $d(y,z) = r$.

Por la hipótesis, las k coordenadas en que difieren x de z es un subconjunto de las coordenadas en que difiere x de y.

Tenemos que:

$d(x,\overline{z}) = n - k$

$d(y, \overline{z}) = n - r$

$d(z, \overline{z}) = n$

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer k cambios a x de la siguiente manera: $k-1$ cambios en coordenadas en que difiere tanto de y como de z y un cambio en una de las coordenadas en que difiere de y, pero no de z.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
x &= (a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots, a_{k+r}, a_{k+r+1} \ldots, a_n) \\
y &= (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}}, \overline{a_{k+2}} \ldots, \overline{a_{k+r}}, a_{k+r+1} \ldots, a_n) \\
z &= (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots, a_{k+r}, a_{k+r+1} \ldots, a_n) \\
t &= (a_1, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}}, a_{k+2} \ldots, a_{k+r}, a_{k+r+1} \ldots, a_n)
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que

$d(x, t) = k$

$d(y, t) = r$

$d(z, t) = 2$

Por lo tanto, basta tomar $Y = \{\overline{z}, t\}$. Pues así,

$$d(x, Y) = d(y, Y) = n < n + 2 = d(z, Y).$$

∎

Lema 4.3.4 *Sean $X = \{0, 1\}^n$ con $n \geq 3$, d la distancia de Hamming sobre X y $x, y, z \in X$ distintos entre sí. Entonces existe $Y \subseteq X$ tal que*

$$d^s(x, Y) < d^s(y, Y) = d^s(z, Y) \tag{4.4}$$

Demostración:

Pongamos $k = d(x, y)$ y $r = d(x, z)$.

CASO 1: Las coordenadas en las que x difiere de y son distintas a las coordenadas en las que x difiere de z.

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio a y en una de las coordenadas en que y difiere de x, y $t' \in X$ el vector que resulta de hacer un cambio en z en una de las coordenadas en que z difiere de x.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$x = (a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+r}, a_{k+r+1} \ldots, a_n)$

$y = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+r}, a_{k+r+1} \ldots, a_n)$

$z = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}}, \overline{a_{k+2}} \ldots, \overline{a_{k+r}}, a_{k+r+1}, \ldots, a_n)$

$t = (a_1, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots, a_{k+r}, a_{k+r+1}, \ldots, a_n)$

$t' = (a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \overline{a_{k+2}}, \ldots, \overline{a_{k+r}}, a_{k+r+1} \ldots, a_n)$

Así, tenemos que:

$d(x,t) = k - 1$ $\qquad$ $d(x,t') = r - 1$

$d(y,t) = 1$ $\qquad$ $d(y,t') = k + r - 1$

$d(z,t) = r + k - 1$ $\qquad$ $d(z,t') = 1$

Tomando $Y = \{t, t'\}$ tenemos que

$$d^s(x,Y) = (r-1) + (k-1)$$

$$d^s(y,Y) = r + k$$

$$d^s(z,Y) = r + k$$

De donde claramente Y satisface (4.4).

CASO 2: Al menos una coordenada en que x difiere de y coincide con alguna coordenada en que x difiere de z.

Llamemos l la cantidad de coordenadas en que x difiere tanto de y como de z a la vez. Así, tenemos que $l > 0$.

Consideremos $t \in X$ el vector que resulta de hacer $r - l$ cambios a x en coordenadas en que x difiere de z pero no de y, y $t' \in X$ el vector que resulta de hacer $k-l$ cambios a x en coordenadas en que x difiere de y pero no de z.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la situación es la siguiente:

$$x = (a_1, \ldots, a_{k-l-1}, a_{k-l}, a_{k-l+1} \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+r-l}, a_{k+r-l+1}, \ldots, a_n)$$
$$y = (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{k-l-1}}, \overline{a_{k-l}}, \overline{a_{k-l+1}} \ldots, \overline{a_k}, a_{k+1}, \ldots, a_{k+r-l}, a_{k+r-l+1}, \ldots, a_n)$$
$$z = (a_1, \ldots, a_{k-l-1}, a_{k-l}, \overline{a_{k-l+1}} \ldots, \overline{a_k}, \overline{a_{k+1}}, \ldots, \overline{a_{k+r-l}}, a_{k+r-l+1}, \ldots, a_n)$$
$$t = (a_1, \ldots, a_{k-l-1}, a_{k-l}, a_{k-l+1} \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}}, \ldots, \overline{a_{k+r-l}}, a_{k+r-l+1}, \ldots, a_n)$$
$$t' = (\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{k-l-1}}, \overline{a_{k-l}}, a_{k-l+1} \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+r-l}, a_{k+r-l+1}, \ldots, a_n)$$

Así, tenemos que:

$$d(x,t) = r-l \qquad d(x,t') = k-l$$
$$d(y,t) = k+r-l \qquad d(y,t') = l$$
$$d(z,t) = l \qquad d(z,t') = r+k-l$$

Tomando $Y = \{t, t'\}$ tenemos que

$$d^s(x,Y) = (r-l) + (k-l)$$
$$d^s(y,Y) = r+k$$
$$d^s(z,Y) = r+k$$

Como $l > 0$ entonces $(r-l)+(k-l) < r+k$. Así, Y satisface (4.4).

∎

Como corolario inmediato de estos tres lemas tenemos lo siguiente:

Teorema 4.3.5 *Sean $X = \{0,1\}^n$ con $n \geq 3$, y d la distancia de Hamming sobre X. Entonces d^s es rica.*

En realidad 3 es el mínimo entero tal que la distancia d^s es rica de manera no trivial cuando d es la distancia de Hamming. Observe que cuando $n = 1$ no hay sino dos puntos en X y por lo tanto la distancia es trivialmente rica. Pero si $n = 2$ se pierde la propiedad de riqueza como lo establece el teorema siguiente:

Teorema 4.3.6 *Sean $X = \{0,1\}^2$ y d la distancia de Hamming sobre X. Entonces d^s no es rica.*

Basta mostrar que d^s no se satisface la condición $i)$ de la definición 4.1.2. En efecto, sean $x = (0,0)$, $y = (1,0)$ y $z = (0,1)$. Mostraremos que no existe $Y \subseteq X$ tal que

$$d^s(x,Y) < d^s(y,Y) < d^s(z,Y) \tag{4.5}$$

Demostración:

Razonamos por reducción al absurdo.

Supongamos que existe $Y \subseteq X$ tal que satisface (4.5).

Pongamos $w = (1,1)$. Así, $X = \{x, y, z, w\}$.

Es fácil verificar que Y no puede ser un singletón.

Ahora veremos que ningún subconjunto de X de dos elementos puede ser un subconjunto de Y, suponiendo que Y satisface la condición $i)$.

Los posibles subconjuntos de dos elementos de X son:

$$\{y,z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{x,w\}, \{y,w\}, \{z,w\}$$

Analicemos cada caso:

- $\{y,z\} \subseteq Y$

  Sabemos que $d(y,z) + d(y,y) = d(z,y) + d(z,z)$. Además, tanto x como w son equidistantes de y y de z. Así, si alguno de estos vectores formara parte o no de Y entonces no se satisface que

  $$d^s(y,Y) < d^s(z,Y)$$

  Por lo tanto, $\{y,z\} \not\subseteq Y$.

- $\{x, y\} \subseteq Y$

  Sabemos que $d(x, x) + d(x, y) = d(y, x) + d(y, y)$.

  Por el caso anterior $z \notin Y$.

  Por otro lado, como $d(x, w) > d(y, w)$ entonces $w \notin Y$, ya que si no $d^s(x, Y) > d^s(y, Y)$.

  Por lo tanto, $\{x, y\} \nsubseteq Y$.

- $\{x, z\} \subseteq Y$

  Sabemos que $d(x, x) + d(x, z) = d(z, x) + d(z, z)$.

  Por el caso anterior $y \notin Y$.

  Por otro lado, como $d(x, w) > d(z, w)$ entonces $w \notin Y$, ya que si no $d^s(x, Y) > d^s(z, Y)$.

  Por lo tanto, $\{x, z\} \nsubseteq Y$.

  Solo falta verificar qué pasa cuando $\{x, w\} = Y$, $\{y, w\} = Y$ ó $\{z, w\} = Y$. Pues, notemos que no podemos agregar a Y uno ni dos vectores más de X, por los casos anteriores.

  Veamos que ninguno de estos casos es posible. En efecto,

  - $\{x, w\} = Y$

    $$d(x, \{x, w\}) = 0 + 3$$
    $$d(y, \{x, w\}) = 1 + 1$$
    $$d(z, \{x, w\}) = 1 + 1$$

    Esto contradice (4.5).

  - $\{y, w\} = Y$

    $$d(x, \{y, w\}) = 1 + 3$$
    $$d(y, \{y, w\}) = 0 + 1$$
    $$d(z, \{y, w\}) = 2 + 1$$

    Esto contradice (4.5).

  - $\{z, w\} = Y$

    $$d(x, \{z, w\}) = 1 + 3$$
    $$d(y, \{z, w\}) = 2 + 1$$
    $$d(z, \{z, w\}) = 0 + 1$$

Esto contradice (4.5).

■

Finalmente, mostraremos que en general el conjunto de los perfiles d^g-consistentes es un subconjunto propio del conjunto de todos los perfiles. Como corolario del teorema que mostraremos a continuación.

La proposición siguiente son observaciones que expresan una simetría de la estructura de los hipercubos dados por la distancia de Hamming en $\{0,1\}^n$.

Proposición 4.3.7 *Sea d la distancia de Hamming. Entonces se cumple:*

O4 *Para cada par $x, y \in X$ $d^s(x, X) = d^s(y, X)$. Más precisamente, para cualquier $x \in \{0,1\}^n$ se tiene*

$$d(x, X) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot i \tag{4.6}$$

En particular, si $n = 3$ entonces, $d^s(x, X) = 12$, para cualquier $x \in X$.

O5 *Si $d^s(x, A) = d^s(y, A)$, $A \subset X$ y $x, y \in X$ entonces $d^s(x, X \setminus A) = d^s(y, X \setminus A)$.*

Demostración: Para probar O4 basta ver que la equación (4.6) se cumple. Pero observe que para un vector x fijo hay exactamente $\binom{n}{i}$ vectores a distancia i de x. De allí es inmediato (4.6).

Para probar O5 nos servimos de O4. En efecto, suponga que $d(x, A) = d(y, A)$ entonces

$$\begin{aligned} d(x, X \setminus A) &= \left[\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot i\right] - d(x, A) \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot i\right] - d(y, A) \\ &= d(y, X \setminus A) \end{aligned}$$

∎

Teorema 4.3.8 *Sean $X = \{0,1\}^3$ y d la distancia de Hamming sobre X. Entonces para cada $A \subseteq X$ no vacío, existen $y_1, y_2 \in X$, $y_1 \neq y_2$ tales que*

$$d^s(y_1, A) = d^s(y_2, A) \tag{4.7}$$

Demostración: Sea $A \subseteq X$ no vacío.

Hay 8 casos posibles, que corresponden a la cardinalidad de A: $|A| = i$ para $i = 1, \ldots, 8$.

El caso en que la cardinalidad es 8 es decir $A = X$, se deduce inmediatamente de **O**4 de la proposición 4.3.7.

Por **O**5 de la proposición 4.3.7, basta ver los casos en que la cardinalidad está entre 1 y 4 inclusives.

$|A| = 1$. Es decir, $A = \{(a_1, a_2, a_3)\}$.

Tomando $y_1 = (\overline{a_1}, a_2, a_3)$ y $y_2 = (a_1, \overline{a_2}, a_3)$ se satisface (4.7).

$|A| = 2$. En este caso, $A = \{a, b\}$.

Tomando $y_1 = a$ y $y_2 = b$ se satisface (4.7).

$|A| = 3$. Luego, $A = \{a, b, c\}$.

Subcaso 1. Uno de los tres vectores equidista de los otros dos.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $d(a,b) = d(a,c)$.

Luego, $\begin{array}{rcl} d^s(b,A) & = & d(b,a) + d(b,b) + d(b,c) \\ d^s(c,A) & = & d(c,a) + d(c,b) + d(c,c) \end{array}$

Así, tomando $y_1 = b$ y $y_2 = c$ se satisface (4.7).

Subcaso 2. Ninguno de los vectores equidista de los otros dos. Es decir,

$$d(a,b) \neq d(a,c) \ \wedge \ d(a,b) \neq d(c,b) \ \wedge \ d(a,c) \neq d(c,b)$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$d(a,b) = 1 \ \wedge \ d(b,c) = 2 \ \wedge \ d(a,c) = 3$$

y que la situación es como la de los siguientes vectores siguiente:

$$a = (a_1, a_2, a_3)$$
$$b = (\overline{a_1}, a_2, a_3)$$
$$c = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$$

Consideremos $y_1, y_2 \in X$ los únicos dos vectores que están a distancia 1 de a y al mismo tiempo a distancia 1 de b. Luego, por la observación **O**2, $d(y_1, c) = d(y_2, c) = 2$. Entonces claramente,

$$d(y_1, A) = 1 + 1 + 2 = d(y_2, A)$$

$|A| = 4$. Dividiremos este caso en subcasos mutuamente excluyentes. Usaremos la simetría del cubo para hacer el razonamiento más simple.

Subcaso 1 Existe $a \in A$ tal que $\overline{a} \in A$.

Pongamos $A = \{a, \overline{a}, b, c\}$ y tomemos $y_1 = b,\ y_2 = c.$.

Así, tenemos los siguiente:

$$\begin{array}{rcll} d^s(y_1, A) & = & d(b,a) + d(b,\overline{a}) + d(b,b) + d(b,c) & \\ & = & n + d(b,c) & (\text{por } \mathbf{O}2) \\ d^s(y_2, A) & = & d(c,a) + d(c,\overline{a}) + d(c,b) + d(c,c) & \\ & = & n + d(c,b) & (\text{por } \mathbf{O}2) \end{array}$$

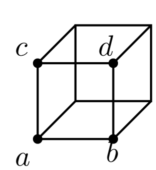
De donde, claramente se satisface (4.7).

Subcaso 2. No existe $a \in A$ tal que $\overline{a} \in A$. Es decir que $d(x, y) < 3$, para cualquier par $x, y \in A$. Pongamos $A = \{a, b, c, d\}$.

A su vez, en este subcaso, tenemos tres posibilidades mutuamente excluyentes:

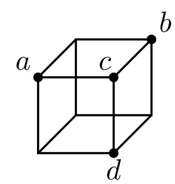
- Los cuatro puntos en la misma cara del cubo.

  Sin pérdida de generalidad, por la simetría del cubo, podemos suponer que la situación es como en la figura siguiente:



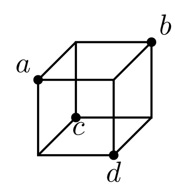
es decir, $d(a,b) = d(a,c) = d(b,d) = d(c,d) = 1$ y $d(a,d) = d(b,c) = 2$.
Tomando $y_1 = a$ y $y_2 = b$ se satisface (4.7).

- Tres puntos en una cara.
Sin pérdida de generalidad, por la simetría del cubo, podemos suponer que la situación es como en la figura siguiente:



es decir, $d(a,c) = d(b,c) = d(c,d) = 1$ y $d(a,b) = d(a,d) = d(b,d) = 2$.
Tomando $y_1 = d$ y $y_2 = b$ se satisface (4.7).

- Dos puntos en una cara.
Sin pérdida de generalidad, por la simetría del cubo, la única situación posible es como en la figura siguiente:



es decir, $d(a,c) = d(b,c) = d(c,d) = d(a,b) = d(a,d) = d(b,d) = 2$.
Tomando $y_1 = a$ y $y_2 = b$ se satisface (4.7).

∎

Como corolario inmediato del resultado precedente obtenemos:

Corolario 4.3.9 *Ningún orden lineal de* $\{0,1\}^3$ *es* d^s*-consistente.*

A su vez esto nos dice lo siguiente:

Corolario 4.3.10 *La clase de perfiles* d^s*-consistentes es una clase propia de la clase de todos los perfiles.*

Capítulo 5

Levantamientos y manipulabilidad

En este capítulo damos una noción general y muy natural de manipulabilidad de funciones de elección social basadas en los levantamientos de preferencias sobre alternativas a conjuntos de alternativas.

Es bastante claro que la naturaleza de las funciones de elección social y la de los esquemas de voto son diferentes. Sin embargo uno podría pensar que un esquema de voto g podría estar generado por una función de elección social f de la manera siguiente $g(u) = x$ iff $f(u, X) = \{x\}$. Ahora bien, la clase de funciones de elección social que genera esquema de votos en el sentido anterior es bastante restrictiva pues impone la ausencia de empates cuando la agenda es el conjunto de todas las alternativas.

Una generalización del teorema de Gibbard-Satterthwaite a funciones de elección social no parece tan directa. En cualquier caso tenemos que definir de manera precisa lo que significa manipular. Hay varios trabajos en este sentido (ver el libro de Taylor [50] muy completo concerniendo la manipulación). Nosotros adoptaremos aquí un punto de vista que consiste en la extensión de preferencias sobre alternativas a preferencias sobre conjuntos de alternativas; ya estas ideas aparecen en la la tesis de maestría de Leal [29] (ver también el trabajo de Pino Pérez y Leal [41]). Notemos que estas ideas se han aplicado a la manipulabilidad en la fusión lógica (ver el trabajo de Mata [34])

Restringiéndose a la clase de funciones de elección social que satisfacen explicaciones transitivas uno podría imaginar métodos para evaluar una situación de manipulación. En este caso podemos identificar una función de elección social f con una función de *bienestar social* $\hat{f} : \mathsf{P}^n \longrightarrow \mathsf{P}$. La función $\hat{f}$ está definida por $u \mapsto \preceq_u$ donde $\preceq_u$ es el único preorden total que satisface $f_u(V) = \text{máx}(V, \preceq_u)$ el cual existe por explicaciones transitivas. Abusando de notación identificamos f y $\hat{f}$. Con esta identificación en mente podemos decir que una situación de manipulación es un triple $k, u, \preceq$ (k el manipulador, u el perfil que se va a manipular y $\preceq$ la mentira de k) tal que $f(u[\preceq /k])$ es *estrictamente mejor para* k que $f(u)$. Ahora el problema es que necesitamos relaciones entre preferencias para dar pleno sentido a la frase anterior en particular debemos expresar qué significa que una preferencia es mejor para el individuo k que otra. De hecho se necesita una relación $\sqsubseteq^{\preceq_k}$ sobre preferencias tal que $\preceq \sqsubseteq^{\preceq_k} \preceq'$ signifique que la preferencia $\preceq$ es mejor, relativa a $\preceq_k$, que $\preceq'$. Aunque este tipo de enfoque parece prometedor no será explorado aquí debido a la dificultad de definir una tal relación $\sqsubseteq^{\preceq_k}$ de manera natural. Notemos que la relación que se puede construir usando la distancia de Kemeny[1] d_K de la manera siguiente: $\preceq \sqsubseteq^{\preceq_k} \preceq'$ ssi $d_K(\preceq, \preceq_k) < d_K(\preceq, \preceq_k)$ no captura de manera clara ni natural la idea de que el resultado obtenido sea mejor para el individuo k, es decir no captura intuitivamente la idea de manipulación.

Para nosotros una situación de manipulabilidad tendrá en cuenta todos los ingredientes de una función de elección social. Así una situación de manipulabilidad será un quadruple $k, u, \preceq, V$ donde $k, u, \preceq$ son como antes y V es una agenda tal que $f_{u[\preceq/k]}(V)$ es mejor $f_u(V)$, relativo a una extensión natural (levantamiento) de las preferencias de k a los subconjuntos de alternativas.

5.1. Levantamientos

Transferir la información de preferencias sobre puntos a preferencias (parciales) sobre conjuntos de puntos de una manera racional es una tarea antigua. En teoría de decisión comenzó hace muchos años [48, 49]. Quizás la manera más común, cuando X es finito, es a través una probabilidad p defined on X, la cual se extiende aditivamente a los subconjuntos de X.

[1] La distancia de Kemeny entre dos conjuntos es el cardinal de la diferencia simétrica. Kemeny usó esto para medir proximidad entre dos preórdenes totales [25] vistos como los conjuntos de pares que están en relación.

Así, se puede definir lo que se llama un relación de plausibilidad probabilista sobre los subconjuntos (eventos) de X de la manera siguiente: $E_1 \sqsubseteq E_2$ ssi $p(E_1) \geq p(E_2)$.

Nosotros veremos otras maneras de proceder en donde se usa solamente la naturaleza ordinal de la la relación de preferencia sobre las alternativas. Quizás una de las maneras puramente ordinales de proceder remonta a Shackle [48, 49] (propuesta también bajo diferentes formas por Lewis, Zadeh, Dubois, Spohn, Halpern, etc.). Ella se llama *medida de posibilidad comparativa* la cual corresponde exactamente a nuestro levantamiento $\sqsubseteq_\Pi$ más abajo definido.

Primero veamos la noción precisa de levantamiento:

Definición 5.1.1 *Una función $\preceq \mapsto \sqsubseteq_\preceq$ que envía una preferencia sobre X, $\preceq$, en una preferencia parcial $\sqsubseteq_\preceq$, sobre $\mathcal{P}^*(X)$, se llama levantamiento ssi para todo par $x, y \in X$ se cumple:*

$$x \preceq y \iff \{x\} \sqsubseteq_\preceq \{y\}$$

Así si $\preceq \mapsto \sqsubseteq_\preceq$ es un levantamiento, el preorden parcial[2] $\sqsubseteq_\preceq$ es una "extensión"del preorden total $\preceq$. Destaquemos que muchos levantamientos han sido estudiados y caracterizados por Barberà, Bossert y Pattanaik [4] (ver también el trabajo de Bossert, Pattanaik y Xu [8]). Ellos llaman la propiedad que define un levantamiento la *propiedad de extensión*.

Más adelante veremos que los levantamientos que satisfacen las dos propiedades siguientes son interesantes:

Dominancia simple 1 $\quad x \prec y \implies \{x, y\} \sqsubset_\prec \{y\}$

Dominancia simple 2 $\quad x \prec y \implies \{x\} \sqsubset_\prec \{x, y\}$

donde $\sqsubset_\prec$ denota la relación estricta asociada a $\sqsubseteq_\prec$.

Estas propiedades ya han sido estudiadas en la literatura, particularmente por Barberà et al. in [4], trabajo en el que muchos levantamientos naturales son caracterizados axiomáticamente. Es de hacer notar que entre las propiedades que caracterizan muchos levantamientos se encuentran las propiedades anteriores de Dominancia simple.

[2]Un preorden parcial es una relación reflexiva y transitiva.

Veamos ahora algunos ejemplos de levantamientos. El primero que introducimos es bastante natural: el levantamiento posibilista $\sqsubseteq_\Pi$ definido como sigue: sea $\preceq$ un preorden total sobre X, sean A y B elementos de $\mathcal{P}^*(X)$, entonces

$$A \sqsubseteq_\Pi B \Longleftrightarrow \exists a \in min(A, \preceq) \wedge \exists b \in min(B, \preceq) \text{ tal que } a \preceq b$$

La relación $\sqsubseteq_\Pi$ asociada a $\preceq$, es, de hecho, la posibilidad comparativa asociada con la "medida de posibilidad"$\preceq$ (ver, por ejemplo, [14, 15]). Ella extiende de manera natural las preferencias sobre los elementos de X expresadas por $\preceq$, a preferencias sobre $\mathcal{P}^*(X)$ expresadas por $\sqsubseteq_\Pi$. El significado de $A \sqsubseteq_\Pi B$ es el siguiente: A es preferido a B si los mejores elementos de A (relativos a $\preceq$) son preferidos o indiferentes a los mejores elementos de B (relativos a $\preceq$); o bien, más gráficamente en la representación por niveles de $\preceq$, si los mejores elementos de A están en un nivel más bajo o igual al nivel en que aparecen los elementos de B.

Ahora definimos una variante del levantamiento leximax[3] (ver los trabajos de Bossert et al. y Barberà et al. [8, 4] y de Dubois y Fargier [13]). En esta variante, los conjuntos más precisos serán preferidos. Llamaremos entonces esta versión el levantamiento leximax-preciso. Supongamos que $|X| = n$ y defina al conjunto $V\downarrow$ como todos los vectores de talla menor o igual a n tales que se cumple:

1. Las componentes de esos vectores son elementos de X.

2. No hay componentes repetidas.

3. Las componentes están ordenadas de manera creciente por $\preceq$. Esto es, si $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_k) \in V\downarrow$ entonces para todo i tal que $1 \leq i \leq k-1$, se tiene $a_i \preceq a_{i+1}$.

Dados $\vec{a}$, $\vec{a}' \in V\downarrow$ de longitud m, definimos la siguiente relación:

$$\vec{a} \equiv \vec{a}' \Leftrightarrow a_i \sim a_i', \quad \forall i = 1, \cdots, m.$$

[3]Observe que en teoría de decisión suelen denotar las relaciones de preferencia $\preceq$ al revés, es decir por el símbolo $\succeq$. Así, cuando una alternativa x es tan buena o mejor que otra y, lo cual es denotado $x \preceq y$, suele ser denotado en teoría de decisión $x \preceq y$. Con esa notación se entiende mejor el nombre del levantamiento.

La longitud de un vector $\vec{a}$ se denota $|\vec{a}|$. Ahora definimos $\preceq^{LP}_{max}$ sobre $V\downarrow$ de la manera siguiente:

$$\vec{a} \preceq^{LP}_{max} \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \equiv \vec{b} \text{ ó} \\ \exists k \leq min\{|\vec{a}|, |\vec{b}|\}, \text{ tal que } \forall i < k \ a_i \sim_s b_i \text{ y } a_k \prec b_k \text{ or} \\ |\vec{a}| < |\vec{b}| \text{ and } \forall i \in \{1, \cdots, |\vec{a}|\}, \ a_i \sim b_i. \end{cases}$$

Sea $A \in \mathcal{P}^*(X)$ y suponga que $|A| = k$. El conjunto de vectores en $V\downarrow$ de longitud k con componentes en A será denotado $R(A)$, es decir

$$R(A) = \{\vec{a} \in V\downarrow\colon\ |\vec{a}| = k \text{ y las componentes de } \vec{a} \text{ están en } A\}.$$

Definimos $\sqsubseteq^{LP}_{max}$, el levantamiento leximax-preciso, sobre $\mathcal{P}^*(X)$ de la manera siguiente:

$$A \sqsubseteq^{LP}_{max} B \Leftrightarrow \forall \vec{b} \in R(B)\ \exists \vec{a} \in R(A)\ \vec{a} \preceq^{LP}_{max} \vec{b}$$

Note que esta definición no es el levantamiento leximax corriente; por ejemplo cuando el levantamiento leximax-preciso asociado al orden inverso de los números naturales ($m \preceq n$ ssi $m \geq n$), el vector $(4, 3, 2)$ es preferido (leximax-preciso) al vector $(4, 3, 2, 1)$, así el conjunto $\{2, 3, 4\}$ es leximax-preciso preferido al conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

Es fácil ver que $\sqsubseteq_{\Pi}$ y $\sqsubseteq^{LP}_{max}$ son preórdenes totales sobre $\mathcal{P}^*(X)$.

Otro levantamiento considerado en muchos dominios, pero particularmente en la semántica de los lenguajes de programación es el llamado *orden de Egli-Milner* [17, 38]. Se define de la manera siguiente:

$$A \sqsubseteq^{EM}_{\preceq} B \Leftrightarrow \forall x \in B\ \exists y \in A\ y \preceq x \text{ and } \forall x \in A\ \exists y \in B\ x \preceq y$$

Este levantamiento es un preorden parcial.

La siguiente proposición es importante y la prueba sencilla se deja como ejercicio al lector:

Observación 5.1.2 *Los levantamientos $\sqsubseteq^{LP}_{max}$ y $\sqsubseteq^{EM}_{\preceq}$ satisfacen las propiedades Dominancia simple 1 y 2. El levantamiento $\sqsubseteq_{\Pi}$ no satisface las propiedades Dominancia simple 1 ni 2.*

Observación 5.1.3 *Hay muchas maneras* naturales *de definir levantamientos. Como ya dijimos un gran número de levantamientos han sido* *caracterizados en [4]. Brams y Fishburn [9] estudian el problema de extender preferencias sobre candidatos a conjuntos de candidatos en el contexto de reglas de voto aprobatorio. El problema de hallar nociones "correctas" de levantamientos es bien importante en diferentes áreas. Aquí veremos que podemos tener una teorema de manipulabilidad para todos los levantamientos que satisfacen Dominancia simple 1 y 2.*

5.2. Manipulabilidad para funciones de elección social

Comencemos con la definición precisa de manipulabilidad:

Definición 5.2.1 *Sea $f : \mathcal{P}^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ una función de elección social. La función f es manipulable (en relación a un levantamiento $\preceq \mapsto \sqsubseteq_{\preceq}$) ssi existen k, $\preceq$, u, y V tales que*

$$f_{u[\preceq/k]}(V) \sqsubset_{\preceq_k} f_u(V).$$

Es decir el individuo k al votar con la mentira $\preceq$ obtiene un resultado mejor en relación al levantamiento[4] de sus verdaderas preferencias que cuando vota con sus verdaderas preferencias ($\preceq_k$).

Definición 5.2.2 *Una función de elección social f satisface* Dominio Estándar Fuerte *(DEF) si satisface Dominio estándar y para todo $x \in X$ existe un perfil u tal que para todo y, $f_u(\{x, y\}) = \{x\}$.*

Esta propiedad significa que para cualquier candidato x hay un perfil u tal que para toda agenda binaria V (es decir $|V| = 2$) que contiene a x el resultado es x, en otras palabras, u hace que x sea el ganador contra cualquier otro candidato.

Es interesante notar que la propiedad de Pareto y la propiedad de Dominio Estándar, juntas implican la condición de Dominio Estándar Fuerte. Para ver esto basta tomar un perfil u tal que para todo individuo i, la alternativa x es la más preferida, es decir, $min(\preceq_i) = \{x\}$. Así, para todo individuo i y cualquier alternativa y diferente de x se tiene $x \prec_i y$. Entonces por la propiedad de Pareto $y \notin f_u(\{x, y\})$ y, necesariamente, por la propiedad de Dominio Estándar, $f_u(\{x, y\}) = \{x\}$.

[4]Esta noción de manipulabilidad a través de levantamientos ha sido aplicada en la fusión lógica [34].

Definición 5.2.3 (Dictador Débil (DD)) *Una función de elección social f tiene un dictador débil k si para todo $x \in X$, existe $\preceq^x$ tal que para todo $y \in X$, y todo perfil u se tiene $x \in f_{u[\preceq^x/k]}(\{x, y\})$.*

En contraste con la noción de dictador, que es una noción excluyente (en el sentido que una alternativa y no pertenecerá al resultado -es excluida- si en la agenda hay un x estrictamente preferido a y por el dictador) la noción de dictador débil es incluyente (en el sentido que el dictador puede dar una preferencia que obliga a que x esté en el resultado). Claramente si i es un dictador, entonces i es un dictador débil. Para ver esto, tome $\preceq^x$ un preorden total tal que x es el único elemento minimal. Entonces, es fácil ver que, $f_{u[\preceq^x/i]}(\{x, y\}) = \{x\}$, para cualquier $y \in X$.

El lema siguiente será útil en la prueba del teorema 5.2.5.

Lema 5.2.4 *Sea f be a función de elección social que satisface explicaciones transitivas (ET) y la propiedad de dominio estándar fuerte (DEF) Entonces para cualquier x, existe un perfil u tal que $f_u(X) = \{x\}$.*

Demostración: Sea x una alternativa y tome u tal que para todo y se tiene $f_u(\{x, y\}) = \{x\}$ (la existencia de u está garantizada por DEF). Puesto que f satisface ET, para cualquier agenda $V \in \mathcal{P}^*(X)$, $f_u(V)$ está determinado por un único $\preceq_u$ de la manera siguiente

$$f_u(V) = min(V, \preceq_u)$$

Afirmamos que, por la escogencia de u, $min(X, \preceq_u) = \{x\}$. Razonemos por el absurdo y supongamos que no es el caso. Entonces existe y tal que $y \preceq_u x$; por lo tanto $min(\{x, y\}, \preceq_u) \neq \{x\}$, *i.e.* $f_u(\{x, y\}) \neq \{x\}$, lo que contradice la escogencia de u. ∎

Ahora estamos listos para enunciar y demostrar nuestro teorema de manipulabilidad para funciones de elección social (ver [41]).

Teorema 5.2.5 *Sea $f : \mathcal{P}^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ una función de elección social que satisface dominio estándar fuerte (DEF) y explicaciones transitivas (ET). Sea $\preceq \mapsto \sqsubseteq_{\preceq}$ un levantamiento que satisface las propiedades de Dominancia simple 1 y 2. Entonces, relativo a ese levantamiento, f es manipulable o f tiene un dictador débil.*

Demostración: Sea $f : \mathsf{P}^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ una función de elección social que satisface DEF y ET. Sea $\leq^*$ un orden lineal sobre X fijo de aquí en adelante en esta prueba.

Defina $g : \mathsf{P}^n \longrightarrow X$ por la siguiente ecuación:

$$g(u) = min(f_u(X), \leq^*). \tag{5.1}$$

Claramente g es un esquema de voto determinista. Por el lema 5.2.4 se tiene que g es no impositiva (y por supuesto total). Así, por el teorema 3.3.5, g tiene un dictador incluyente-rv o bien g es manipulable.

Ahora, como tenemos esas dos alternativas para g, será suficiente probar las siguientes afirmaciones:

Afirmación 2 *Si g tiene un dictador incluyente-rv, entonces f tiene un dictador débil.*

Demostración: Suponga que g tiene un dictador incluyente-rv, digamos k. Entonces, para cualquier $x \in X$, existe $\preceq_x \in P$ tal que para cualquier $u \in \mathsf{P}^n$ se tiene

$$g(u[\preceq_x /k]) = x.$$

Basta tomar $\preceq_x$ con $\{x\} = min(\preceq_x)$. Pero entonces, por definición, $x = min(f_{u[\preceq_x/k]}(X), \leq^*)$. Luego, $x \in min(X, \preceq_{u[\preceq_x/k]})$. Necesariamente, $x \in min(\{x, y\}, \preceq_{u[\preceq_x/k]})$, es decir $x \in f_{u[\preceq_x/k]}(\{x, y\})$. Por lo tanto k es un dictador débil para f. ∎

Afirmación 3 *Si g es manipulable entonces f es manipulable.*

Demostración: Supongamos g manipulable. Entonces existe una situación de manipulación $u \in \mathsf{P}^n$, $k \in N$, y $\preceq \in P$ tal que

$$g(u[\preceq /k]) \prec_k g(u). \tag{5.2}$$

Sean x y y alternativas que cumplen $g(u[\preceq /k]) = \{x\}$ y $g(u) = \{y\}$. Para terminar la prueba de la afirmación, es decir que f es manipulable, bastaría ver lo siguiente:

$$f_{u[\preceq/k]}(\{x,y\}) \sqsubset_{\preceq_k} f_u(\{x,y\}). \tag{5.3}$$

Note que $f_{u[\preceq/k]}(\{x,y\}) \neq \{y\}$. Si no fuera así, por Explicaciones Transitivas,tendríamos $y \prec_{u[\preceq/k]} x$ y por lo tanto $x \notin min(X, \preceq_{u[\preceq/k]})$. De nuevo por Explicaciones Transitivas, $x \notin f_{u[\preceq/k]}(X)$ y por lo tanto $x \neq min(f_{u[\preceq/k]}(X), \leq^*)$,*i.e.* $x \neq g(u[\preceq /k])$, una contradicción. Como $g(u) = y$, se puede ver, con un razonamiento análogo al precedente, que $f_u(\{x,y\}) \neq \{x\}$.

De esta manera, según la imagen de $f_{u[\preceq/k]}(\{x,y\})$ y de $f_u(\{x,y\})$ tenemos los siguientes casos:

(a) $f_{u[\preceq/k]}(\{x,y\}) = \{x\}$ (c) $f_u(\{x,y\}) = \{y\}$

(b) $f_{u[\preceq/k]}(\{x,y\}) = \{x,y\} \wedge x <^* y$ (d) $f_u(\{x,y\}) = \{x,y\} \wedge y <^* x$

El caso (b) y (d) al mismo tiempo es imposible. El resto de los casos, *i.e.* (a) & (c), (a) & (d) y (b) & (c) son posibles. Vamos a examinarlos. Comencemos con el caso (a) & (d). Para ver que (5.3) es verdad, basta ver que $\{x\} \sqsubset_{\preceq_k} \{x,y\}$. Por definición de x y de y y la desigualdad (5.2), $x \prec_k y$. Entonces, por Dominancia Simple 2, se tiene $\{x\} \sqsubset_{\preceq_k} \{x,y\}$.

Ahora examinemos el caso (a) & (c). De nuevo, por definición de x y de y y la desigualdad (5.2), $x \prec_k y$. Entonces por la propiedad de extensión, $\{x\} \sqsubset_{\preceq_k} \{y\}$, *i.e.* (5.3) se verifica.

Finalmente en el caso (b) & (c), como $x \prec_k y$ se tiene por Dominancia Simple 1, $\{x,y\} \sqsubset_{\preceq_k} \{y\}$, *i.e.* se verifica de nuevo (5.3).

Así hemos probado que f es manipulable. ∎

De los dos afirmaciones que preceden se deduce el teorema de manera directa. ∎

Observemos que si $f : P^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ es una función de elección social que satisface Dominio Estándar Fuerte (DEF) y Explicaciones Transitivas (ET), Entonces f tiene un dictador débil o bien f es manipulable con respecto a los levantamientos leximax y de Egli-Milner.

Terminemos esta sección con un ejemplo que ilustra los resultados previos.

Ejemplo 5.2.6 *Sean $X = \{x, y, z\}$ y $N = \{1, 2, 3\}$. Sea $f : P^3 \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ la regla de Borda. Sea u el perfil siguiente:*

$$u = \begin{pmatrix} & x & y \\ z & y & z \\ xy & z & x \end{pmatrix}$$

Para ese perfil se tiene $r_u(x) = 2$, $r_u(y) = 3$ y $r(z) = 2$.

Al perfil u, viene asociada la preferencia global $\preceq_u$

$$\preceq_u = \begin{matrix} y \\ xz \end{matrix}$$

así, $f_u(X) = \{x, z\}$. Note que esta función no genera una regla de voto determinista g mediante la ecuación $g(u) = f_u(X)$. Pero con la ayuda de un orden lineal $\leq^*$ sobre X podemos podemos definir una regla de voto determinista g poniendo $g(u) = min(f_u(X), \leq^*)$. Es fácil ver que g es una regla de voto total no impositiva. Así, por el teorema 3.3.5, g es manipulable. De hecho si $z <^* y <^* x$ y u es como antes se tiene $g(u) = min(\{x, z\}, \leq^*) = z$. Considere u' el perfil u donde la primera coordenada ha sido modificada:

$$u' = \begin{pmatrix} z & x & y \\ y & y & z \\ x & z & x \end{pmatrix}$$

Es fácil chequear que $f_{u'}(\{x, y, z\}) = \{x\}$. Así, $g(u') = x$. Ahora bien, si denotamos por $\preceq'$ the relation satisfying $x \prec' y \prec' z$, tenemos $u' = u[\preceq' /1]$. Pero en el perfil u (las verdaderas preferencias) se tiene $x \prec_1 z$, luego

$$g(u[\preceq' /1]) = g(u') = x \prec_1 z = g(u)$$

Por lo tanto, la tripleta 1, u y $\preceq'$ es una situación de manipulación para g. Esto es el individuo 1 mintiendo obtiene un mejor resultado.

Observe que casi los mismos datos ilustran el teorema 5.2.5, es decir, $1, u, \preceq', \{x, z\}$ es una situación de manipulación para f con respecto a cualquier levantamiento $\preceq \mapsto \sqsubset_{\preceq}$ que satisface Dominancia Simple 1 y 2, ya que

$$f_{u[\preceq'/1]}(\{x, z\}) = \{x\} \sqsubset_{\preceq_1} \{x, z\} = f_u(\{x, z\})$$

Una observación interesante es que los levantamientos de un preorden parcial para los cuales se aplica el teorema 5.2.5, no necesariamente son preórdenes totales. De hecho pueden ser preórdenes parciales como el levantamiento de Egli-Milner. El hecho de que esto ocurra debe conectarse con trabajos recientes en elección social en los cuales se consideran preferencias que son preórdenes parciales en vez de preórdenes totales (ver por ejemplo el trabajo de Pini, Rossi, Venable y Walsh [40]).

5.3. El teorema de Barberà-Kelly

El teorema 5.2.5 está muy relacionado con el teorema de Barberà-Kelly [3, 23] (Teorema 5.2.1 en [50]). De hecho es una variante.

Para poder enunciar el teorema de Barberà-Kelly necesitamos algunas nociones para una función de elección social $f : \mathsf{P}^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$:

Quasitransitividad: Dado u defina $\preceq_u$ poniendo $x \preceq_u y$ ssi $x \in f(u, \{x, y\})$. La función f es quasitransitiva si la relación estricta $\prec_u$ asociada a $\preceq_u$ es transitiva.

No imposición por pares: f es no impositiva por pares si para cada par de alternativas x, y existe un perfil u tal que $f(u, \{x, y\}) = \{x\}$.

Manipulabilidad por dominancia débil: f es manipulable por dominancia débil para la agenda V si existe un perfil u, un individuo i y unA preferencia $\preceq^*$ tal que $\forall x \in f(u[\preceq^* /i], V)\ \forall y \in f(u, V)$, $x \preceq_i y$ y $\exists x \in f(u[\preceq^* /i], V)\ \exists y \in f(u, V)$, $x \prec_i y$.

Oligarquía por pares: f oligárquica por pares si existe S (la oligarquía) un subconjunto de N tal que para cada par $\{x, y\} \subset X$ se tiene:

$$f(u, \{x, y\}) = \begin{cases} \{x\}, & \text{if } \forall i \in S\ x \prec_i y; \\ \{y\}, & \text{if } \forall i \in S\ y \prec_i x; \\ \{x, y\}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Ahora podemos enunciar el teorema de Barberà-Kelly:

Teorema 5.3.1 *Sea $f : P^n \times \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ una función de elección social tal que:*
(i) f es quasitransitiva;

(ii) f es no impositiva por pares;
(iii) f es no manipulableen el sentido de dominancia débil para agendas de dos elementos.
Entonces f es oligárquica por pares.

Observe que Explicaciones transitivas implica la propiedad de quasi-transitividad; Dominio Estándar Fuerte implica la propiedad de no imposición por pares; la noción de no manipulabilidad via levantamientos que satisfacen las condiciones de dominancia Simple 1 y 2 implica la no manipulabilidad en el sentido de dominancia débil para agendas de dos elementos. Por lo tanto, en virtud del teorema de Barberà-Kelly, una función de elección social que satisface las hipótesis del teorema 5.2.5 es oligárquica por pares. Sea S una tal oligarquía. Observe que cualquier elemento i en la oligarquía S es un dictador débil. Así, el teorema 5.2.5 es de hecho un corolario del teorema 5.3.1. Pero la prueba dada aquí, en la sección anterior, es directa.

Capítulo 6

Distancias y racionalización

Ante el Teorema de Imposibilidad de Arrow y La Paradoja del Voto, uno quisiera definir nuevas Reglas de Voto de modo que estas reflejen con más fidelidad las preferencias de los votantes y que siempre nos den un ganador resultante. Podríamos ver cada perfil de preferencias como una aproximación a una especie de perfil consensual. Bajo esta perspectiva, el ganador para un perfil de preferencias dado, es el candidato más preferido en el perfil de consenso "mas cercano".

Hay situaciones en las que pareciera obvio cual candidato es el que más gusta entre los votantes. Por ejemplo, si todos los votantes ponen al mismo candidato de primero, ese debería ser el ganador. Ya esa propiedad la llamamos *unanimidad*. Otra situación interesante es la de los perfiles para los cuales existe un candidato gana cada vez que compita directamente contra otro candidato. Ya vimos que un tal candidato se llama *Ganador de Condorcet* y a este tipo de perfiles se les conoce como perfiles de *Consenso de Condorcet*.

Para muchos perfiles no siempre hay un consenso obvio, podríamos solventar este problema modificando las preferencias de los votantes. Entonces un buen resultado de la elección sería la de un perfil de consenso obtenido del perfil dado haciendo la menor cantidad de cambios posibles.

Así, podemos formalizar esta idea con una noción de *distancia*: dado un perfil, identificamos el perfil de consenso más cercano y hacemos ganador a la alternativa ganadora en este perfil de consenso.

Cuando una regla de voto que pueda ser descrita en estos términos diremos que es *racionalizada a través de distancias*: ellas pueden ser definidas describiendo una noción apropiada de consenso y de distancia.

Los resultados que aparecen en este capítulo son investigación reciente debida a Elkind, Faliszewski y Slinko [18] (para un estudio en profundidad y extendido se puede consultar la tesis de Anthonny Arias [1]).

6.1. Preliminares

Recordemos la definición de distancia (ver definición 4.1.1)

Definición 6.1.1 *Dado un conjunto A no vacío. Una función $d : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ es una distancia sobre X si:*

1. $d(x,y) = 0$ *si, y sólo si,* $x = y$ *(Identidad de indiscernibles)*
2. $d(x,y) = d(x,y)$ *(Simetría)*
3. $\forall z \in X, d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(Desigualdad triangular)*

Definición 6.1.2 *Consideremos d como arriba.*

- *Si d satisface 2 y 3, ésta será llamada Pseudodistancia*
- *Si d satisface 1 y 3, ésta será llamada Cuasidistancia*

Si consideramos P el conjunto de todos los preórdenes totales sobre un conjunto X, podemos considerar una distancia $d : \mathsf{P} \times \mathsf{P} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ como una distancia entre las preferencias de dos votantes; por ejemplo una tal d puede ser la del siguiente ejemplo

Ejemplo 6.1.3 *La distancia trivial (o drástica):*

- $d(\succ_i, \succ_j) = 0$ *si* $i = j$
- $d(\succ_i, \succ_j) = 1$ *si* $i \neq j$.

Note que cualquier distancia d sobre las preferencias de los votantes sobre un conjunto de candidatos X, puede extenderse a una distancia $\hat{d} : \mathsf{P}^n \times \mathsf{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ entre perfiles. Si $u = (\preceq_1, ..., \preceq_n)$ y $u' = (\preceq'_1, ..., \preceq'_n)$ definimos $\hat{d}(u,u') = \sum_{i=1}^n d(\preceq_i, \preceq'_i)$.

De hecho se tiene la siguiente proposición cuya prueba, bastante directa, se deja en ejercicio al lector.

Proposición 6.1.4 *Sea N un conjunto de votantes con $|N| = n$, X un conjunto de candidatos, P el conjunto de todos de preórdenes totales sobre X. Si d es una distancia sobre P, entonces $\hat{d}$ es una distancia sobre P^n.*

Definición 6.1.5 *Sea N un conjunto de votantes con $|\mathsf{N}| = n$, X un conjunto de candidatos, P el conjunto de todos los preórdenes totales sobre X y $\mathcal{E}$ una clase de Perfiles. Sea d una distancia entre perfiles y g una Regla de Voto tal que para todo perfil $u \in \mathcal{E}$, $g(u) \neq \emptyset$ (es decir $\mathcal{E}$ está contenido en el dominio de g). Si $x \in X$, definimos el rango de x en u, denotado $r_u(x, d)$ de la manera siguiente: si el conjunto $\{u' \in \mathcal{E} : x \in g(u')\}$ es vacío ponemos $r_u(x, d) = \infty$ si no ponemos*

$$r_u(x, d) = \text{mín}\{d(u, u') : u' \in \mathcal{E} \ y \ x \in g(u')\}$$

Es decir, la mínima distancia entre u y un perfil $u' \in \mathcal{E}$ que contiene a x.

El conjunto de los (u, d)-ganadores, denotado $W_{(\mathcal{E},g,d)}(u)$, lo definimos como de la manera siguiente:

$$W_{(\mathcal{E},g,d)}(u) = \{x \in X : r_u(x, d) \ \textit{es minimal}\}$$

Observe que también podemos definir el conjunto de los $(u, d)-ganadores$ como

$$W_{(\mathcal{E},g,d)}(u) = \bigcup_{u' \in min(u)} g(u')$$

donde $min(u) = \{u' \in \mathcal{E} : d(u, u') \text{ es minimal}\}$

Definición 6.1.6 *Una regla de voto f es $(\mathcal{E}, g, d)$-racionalizable si*

$$f(u) = W_{(\mathcal{E},g,d)}(u)$$

es decir,

$$\forall a \, (a \in f(u) \Longleftrightarrow a \in W_{(\mathcal{E},g,d)}(u))$$

Los perfiles en $\mathcal{E}$ corresponden a perfiles de *consenso* entre los votantes para una manera de elegir, es decir cuando existe un alternativa que es claramente vista de manera colectiva, como mejor que cualquier otra alternativa. Hay varias formas de formalizar esta intuición. A $\mathcal{E}$ se le llamará *clase de consenso*. Como dijimos al principio del capítulo hay varias clases naturales de consenso. Dado un perfil u, diremos que u es *fuertemente unánime* si $\preceq_i = \preceq_j \;\; \forall\, i \in N$; denotaremos el conjunto de todos los perfiles fuertemente unánimes por $\mathcal{S}$. Diremos que u es *unánime* si existe un candidato $x \in X$ tal que que $x \in min(\preceq_i)\ \forall\ i \in N$; denotaremos el conjunto de todos los perfiles unánimes por $\mathcal{U}$. Otra clase de consenso está dada por los perfiles que tienen un Ganador de Condorcet, denotamos el conjunto de tales perfiles por $\mathcal{C}$.

Usaremos las definiciones 6.1.5 y 6.1.6 suponiendo que $\mathcal{E}$ es una clase de consenso $\mathcal{U}$ o $\mathcal{C}$. En tal caso, asumimos que la regla g nos da como ganadores a los ganadores del consenso, por lo que omitiremos a g de la notación a menos que sea necesario especificar la g utilizada. Así, cuando una regla de voto f es distancia-racionalizable a través de una clase de consenso diremos que f es $(\mathcal{E}, d)$-racionalizable. Se puede definir reglas *pseudodistancia-racionalizables* y *cuasidistancia-racionalizables* de manera análoga.

6.2. Reglas de Rango

Ahora vamos a definir reglas que generalizan la regla de Borda. Para simplificar vamos a considerar perfiles lineales.

Sea N el conjunto de votantes con $|N| = n$, $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ el conjunto de candidatos con $|X| = m$. Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ un vector en $\mathbb{R}^m$ tal que $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_m$. Una Regla de Rango $f_\alpha : L^n \longrightarrow \mathcal{P}^*(X)$ se define de la siguiente manera:
sea $u = (\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ un perfil de preferencias lineales en L^n. La idea es que un candidato $x_j \in X$ recibe α_k puntos por cada votante que lo ponga en la posición k. Más formalmente, denotamos por $\preceq_i^j$ la posición en la que el votante i puso al candidato x_j. Diremos que el α-rango de un candidato x_j viene dado por $r_\alpha(x_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{\preceq_i^j}$ y será un ganador si su rango es maximal. Es decir,

$$x_j \in f_\alpha(u) \Longleftrightarrow r_\alpha(x_j) \geq r_\alpha(x_k) \forall\ k = 1, ..., m.$$

Vamos a considerar algunas Reglas de Rango importantes.
Regla de Borda:
Ésta corresponde al vector $\alpha = (m-1, m-2, ..., 0)$. En esta regla un

candidato recibe tantos puntos como el número de candidatos que tiene por arriba, ganan los candidatos con la mayor cantidad de puntos.

Ejemplo 6.2.1 *Sea* $X = \{a, b, c\}$ *y* $|N| = 3$*, consideremos el siguiente perfil:*

$$u = \begin{pmatrix} c & a & b \\ b & c & c \\ a & b & a \end{pmatrix}$$

Entonces $r_\alpha(a) = 4, r_\alpha(b) = 3$ *y* $r_\alpha(c) = 2$*. Así* $f_\alpha(u) = \{a\}$*.*

Regla de Pluralidad:

El vector correspondiente es $(1, 0, 0, ..., 0)$. En esta regla cada elector vota por el candidato de su preferencia, ganan los candidatos con mayor cantidad de votos.

Ejemplo 6.2.2 *Sea* $X = \{a, b, c\}$ *y* $|N| = 3$*, consideremos el siguiente perfil:*

$$u = \begin{pmatrix} c & a & c \\ b & c & a \\ a & b & b \end{pmatrix}$$

Entonces $r_\alpha(a) = 1, r_\alpha(b) = 2$ *y* $r_\alpha(c) = 0$*. Así* $f_\alpha(u) = \{b\}$*.*

Veto:

El vector correspondiente es $(1, 1, ..., 1, 0)$. Cada elector veta al candidato que menos le guste, ganan los candidatos que hayan sido vetados por la menor cantidad de electores.

Ejemplo 6.2.3 *Sea* $X = \{a, b, c\}$ *y* $|N| = 4$*, consideremos el siguiente perfil:*

$$u = \begin{pmatrix} a & b & b & c \\ b & c & a & a \\ c & a & c & b \end{pmatrix}$$

Entonces $r_\alpha(a) = 3, r_\alpha(b) = 2$ *y* $r_\alpha(c) = 3$*. Así* $f_\alpha(u) = \{a, c\}$*.*

k-aprobación:

El vector correspondiente es $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$. Donde $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 1$ y $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = ... = \alpha_m = 0$. Cada elector vota por k candidatos de su preferencia, los ganadores serán aquellos con la mayor cantidad de votos.

Ejemplo 6.2.4 *Sea* $X = \{a, b, c, d\}$*,* $|N| = 4$ *y sea* $\alpha = (1, 1, 0, 0)$*. Consideremos el siguiente perfil:*

$$u = \begin{pmatrix} d & c & a & b \\ c & b & c & d \\ a & a & d & c \\ b & d & b & a \end{pmatrix}$$

Entonces $r_\alpha(a) = 3, r_\alpha(b) = 2, r_\alpha(c) = 1$ *y* $r_\alpha(d) = 2$*. Así* $f_\alpha(u) = \{a\}$*.*

Observación 6.2.5 *Cualquier vector* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ *puede ser usado para definir una pseudodistancia* d_α *sobre votantes con preferencias sobre* X*, con* $|X| = m$*.*

Sea $i, j \in N$*. Definimos*

$$d_\alpha(\succ_i, \succ_j) = |\alpha_{\succ_i^1} - \alpha_{\succ_j^1}| + |\alpha_{\succ_i^2} - \alpha_{\succ_j^2}| + ... + |\alpha_{\succ_i^m} - \alpha_{\succ_j^m}|$$

Dejamos al lector la verificación del hecho que d_α es una pseudodistancia:

Si α es un vector tal que $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}\, \forall i = 1, ..., m-1$, diremos que α es *no degenerado*. Las distancias y rangos correspondientes se dirán no generados también. De hecho si α es un vector no degenerado, entonces d_α es una distancia, es decir, también se cumple 1 de la definición de distancia (la identidad de indiscernibles). La verificación de este hecho se deja como ejercicio al lector.

Veremos que algunas reglas de rango son racionalizables a partir de distancia y otra no. Además veremos que las reglas de rango son incompatibles con la regla de Condorcet.

Lema 6.2.6 *Para cualesquiera* m *números reales* $a_1, a_2, ..., a_m$ *tal que* $\sum_{i=1}^m a_i = 0$*, y* $a_1 = x \geq 0$*, entonces* $\sum_{i=1}^m |a_i| \geq 2x$*.*

Demostración:

Como $a_1 = x$ y $a_1 + a_2 + ... + a_m = 0$, entonces $a_1 = -(a_2 + a_3 + ... + a_m) = x \geq 0$, así

$$\begin{aligned} x &= |a_2 + a_3 + ... + a_m| \\ &\leq |a_2| + |a_3| + ... + |a_m| \\ &= \sum_{i=2}^{m} |a_i| \end{aligned}$$

Luego, sumando x a ambos lados, obtenemos que $a_1 + \sum_{i=2}^{m} |a_i| \geq 2x$.

$\blacksquare$

Teorema 6.2.7 *Para cada vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ y un perfil $u \in \mathsf{P}^n$ ($|X| = m$). Un candidato $x_j \in X$ es un ganador de u de acuerdo a f_α si, y sólo si x_j es un $(\mathcal{U}, \hat{d}_\alpha)$-ganador de u.*

Demostración:

Sea $x_j \in X$ y consideremos $i \in N$ un votante que pone a x_j en la posición k de sus preferencias, es decir, $\preceq_i^j = k$. Considere $h \in N$ tal que h pone a x_j de primero entre sus preferencias, $\preceq_h^j = 1$.

Tenemos que $\sum_{l=1}^{m} \alpha_{\preceq_i^l} = \sum_{l=1}^{m} \alpha_{\preceq_h^l}$ pues ambas sumatorias son la suma de los elementos del vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$. Luego, $\sum_{l=1}^{m}(\alpha_{\preceq_i^l} - \alpha_{\preceq_h^l}) = 0$. Por otra parte, tenemos que $\alpha_{\preceq_h^j} - \alpha_{\preceq_i^j} = \alpha_1 - \alpha_k$.

Usando el lema 6.2.6, como $d(\preceq_i, \preceq_h) = \sum_{l=1}^{m} |\alpha_{\preceq_i^l} - \alpha_{\preceq_h^l}|$, tenemos que $d(\preceq_i, \preceq_h) \geq 2(\alpha_1 - \alpha_k)$. Por otra parte consideremos el orden de preferencia $\preceq_i^*$ que se obtiene intercambiando en $\preceq_i$ a x_j con el candidato que está en la primera posición. Entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} d_\alpha(\preceq_i, \preceq_i{}^*) &= |\alpha_{\preceq_i^1} - \alpha_{\preceq_i^{1*}}| + ... + |\alpha_{\preceq_i^m} - \alpha_{\preceq_i^{m*}}| \\ &= |\alpha_1 - \alpha_k| + |\alpha_k - \alpha_1| \\ &= 2(\alpha_1 - \alpha_k). \end{aligned}$$

Así, la $d_\alpha - distancia$ entre $\preceq_i$ y la más cercana preferencia que pone a x_j de primero es exactamente $2(\alpha_1 - \alpha_k)$, en consecuencia la $\hat{d}_\alpha - distancia$ desde u hasta el perfil unánime en el que todos los votantes ponen a x_j de primero, es exactamente $\sum_{i=1}^{n} 2(\alpha_1 - \alpha_{\preceq_i^j})$.

Como el rango de x_j en f_α es $\sum_{i=1}^n \alpha_{\preceq_i^j}$, se tiene que $x_j \in f_\alpha(u)$ ssi para cualquier $k \neq j$ se tiene $\sum_{i=1}^n \alpha_{\preceq_i^j} \geq \sum_{i=1}^n \alpha_{\preceq_i^k}\dot{}$Pero observe que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \alpha_{\preceq_i^j} \geq \sum_{i=1}^n \alpha_{\preceq_i^k} &\iff -\sum_{i=1}^n \alpha_{\preceq_i^j} \leq -\sum_{i=1}^n \alpha_{\preceq_i^k} \\
&\iff -2\sum_{i=1}^n \alpha_{\preceq_i^j} \leq -2\sum_{i=1}^n \alpha_{\preceq_i^k} \\
&\iff 2\sum_{i=1}^n \alpha_1 - 2\sum_{i=1}^n \alpha_{\preceq_i^j} \leq 2\sum_{i=1}^n \alpha_1 - 2\sum_{i=1}^n \alpha_{\preceq_i^k} \\
&\iff 2\sum_{i=1}^n (\alpha_1 - \alpha_{\preceq_i^j}) \leq 2\sum_{i=1}^n (\alpha_1 - \alpha_{\preceq_i^k}) \\
&\iff x_j \in W(u, d_\alpha)(u).
\end{aligned}
$$

∎

El corolarion del resultado anterior es que para todo vector α no degenerado f_α es racionalizable a partir de la distancia $\hat{d}_\alpha$. Ahora bien en general no será el caso que f_α es distancia racionalizable, como veremos en la proposición siguiente.

Proposición 6.2.8 *Cualquier Regla de Voto definida por un vector α tal que $\alpha_1 = \alpha_2$ no es distancia racionalizable con respecto a la clase de consenso $\mathcal{U}$.*

Demostración: Suponga que α es tal que $\alpha_1 = \alpha_2$. Suponga que f_α una es racionalizable. Considere un perfil u y $x_1, x_2 \in X$ tal que $\preceq_i^1 = 1$ y $\preceq_i^2 = 2$ $\forall i \in X$. Tenemos que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{\preceq_i^1} = \sum_{i=1}^n \alpha_{\preceq_i^2} \geq \sum_{i=1}^n \alpha_{\preceq_i^k} \ \ \forall k = 1, ..., m$$

Luego, $x_1, x_2 \in f_\alpha(u)$. Por otra parte, $u \in \mathcal{U}$ por lo tanto el perfil más cercano a u para cualquier distancia es él mismo y deberíamos tener $f_\alpha(u) = g(u)$. Ahora bien, como g es la regla de unanimidad,

$g(u) = \{x_1\}$, lo cual es una contradicción pues $x_2 \notin g(u)$. Por lo tanto, f_α no es distancia-racionalizable. ∎

Antes de probar que las reglas de rango no son Condorcet consistentes, es decir que no siempre dan el ganador de Condorcet cuando existe, vamos a ver el siguiente lema cuya prueba es sencilla.

Lema 6.2.9 *Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ y $\beta = (\alpha_1 - \alpha_m, \alpha_2 - \alpha_m, ..., \alpha_m - \alpha_m)$, entonces $f_\alpha = f_\beta$*

Demostración:

Veamos que $x \in f_\alpha(u) \Longleftrightarrow x \in f_\beta(u)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
x_j \in f_\alpha(u) &\Longleftrightarrow r_\alpha(x_j) \geq r_\alpha(x_k)\, \forall k = 1, ..., m \\
&\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\preceq_i^j} \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\preceq_i^k}\, \forall k = 1, ..., m \\
&\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{\preceq_i^j} - \alpha_m) \geq \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{\preceq_i^k} - \alpha_m)\, \forall k = 1, ..., m \\
&\Longleftrightarrow r_\beta(x_j) \geq r_\beta(x_k)\, \forall k = 1, ..., m \\
&\Longleftrightarrow x_j \in f_\beta(u).
\end{aligned}$$

∎

La proposición siguiente se debe a Moulin [39].

Proposición 6.2.10 ([39]) *Las Reglas de Rango no son Condorcet consistentes, es decir, para cualquier Regla de Rango f existe un n y un perfil $u \in \mathcal{P}^n$ tal que $f(u) = \{x\}$, u tiene Ganador de Condorcet x', pero $x \neq x'$.*

Demostración: **[Esbozo (hacemos el caso $|X| = 3$)]**

Sea $X = \{a, b, c\}$, $|N| = 7$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Consideremos el siguiente perfil:

$$u = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ b & c & b & a \\ a & b & c & c \\ c & a & a & b \end{pmatrix}$$

Donde los números indican el número de votantes con esa preferencia. Así en el perfil anterior hay 3 votantes con la preferencia de la primera columna, dos votantes con la preferencia de la segunda columna, etc.

Es fácil verificar que c es el ganador de Condorcet. Si una Regla de Rango es tal que $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ entonces a será el ganador para esa regla.

$$\begin{array}{rcl} r_\alpha(a) & = & 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ & > & 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ & = & r_\alpha(c) \\ & > & \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 \\ & = & r_\alpha(b) \end{array}$$

Vemos que el lema también se cumple incluso si α_1, α_2 y α_3 no forman una sucesión estrictamente decreciente.
Sea $X = \{a, b, c\}$, $|N| = 17$

$$u = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 4 \\ c & b & c & a \\ b & a & a & c \\ a & c & b & b \end{pmatrix}$$

Para este perfil se puede verificar fácilmente que a es el ganador de Condorcet. Sin embargo, vamos a ver que a no gana para cualquier Regla de Rango. Usando el lema 6.2.9, asumamos que $\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$ y $\alpha_1 > 0$. Entonces tenemos $r_\alpha(a) = 6\alpha_1 + 7\alpha_2$ y $r_\alpha(b) = 8\alpha_1 + 6\alpha_2$. Si $\alpha_1 = \alpha_2$, claramente $r_\alpha(a) < r_\alpha(b)$. Ahora suponga que $\alpha_1 > \alpha_2$

Notemos que:

$$\begin{array}{rcl} 6\alpha_1 + 7\alpha_2 & = & 6(\alpha_1 - \alpha_2) + 13\alpha_2 \\ & < & 8(\alpha_1 - \alpha_2) + 14\alpha_2 \\ & = & 8\alpha_1 + 6\alpha_2 \end{array}$$

La desigualdad es estricta pues $\alpha_1 - \alpha_2 > 0$ y $\alpha_2 \geq 0$.

∎

Proposición 6.2.11 *Ninguna Regla de Rango es racionalizable con respecto a la clase de consenso $\mathcal{C}$*

Demostración: Sea f_α una Regla de Rango, usando la proposición 6.2.10, existe un perfil u tal que $f(u) = \{x\}$, u tiene como ganador de Condorcet x' y $x' \neq x$. Consideremos ahora una distancia entre perfiles d. Luego $r_u(x') = 0$. Y como x' es el único ganador de Condorcet, tenemos que $W_{(\mathcal{C},d)}(u) = \{x'\}$. Así, como $f(u) \neq W_{(\mathcal{C},d)}(u)$, concluimos que f no es racionalizable. ∎

Bibliografía

[1] A. Arias, “Funciones de elección social racionalizables a partir de distancia”, Tesis de Licenciatura, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2011.

[2] J. K. Arrow, “Social Choice and Individual Values", 2nd ed., Wiley, New York, 1963.

[3] S. Barberà, Manipulation of social choice mechanisms that do not leave ‘too much’ to chance, *Econometrica*, 45 (1977), 1573–1588.

[4] S. Barberà, W. Bossert, P. K. Pattanaik, Ranking sets of objects. In *Handbook of utility theory* S. Barberà, P.J. Hammond, C. Seidl, Eds. Kluwer Publisher, 2004.

[5] S. Barberà, B. Dutta and A. Sen, Strategyproof Social Choice Correspondences, *Journal of Economic Theory*, 101 (2001), 374–394.

[6] J.-P. Benoit, Strategic manipulation in voting games when lotteries and ties are permitted, *Journal of Economic Theory*, 102 (2002), 421–436.

[7] J.-C. de Borda, Mémoire sur les elections par scrutin, *Mémoires de l’Academie Royale des Sciences* année 1781, pp. 657-665. Traducido al inglés en 1953 por A. de Grazia: Mathematical derivation of an election system, *Isis* 44:42-51.

[8] W. Bossert, P.K. Pattanaik, and Y. Xu, Ranking opportunity sets: an axiomatic approach, *Journal of Economic Theory* 63, (1994), 326–345.

[9] S. J. Brams and P. C. Fishburn, Voting procedures, In *Handbook of Social Choice and Welfare* Volume 1, Eds. K. J. Arrow, A. K. Sen and K. Suzumura, Pages 173-236, Springer, 2002.

[10] J. M. Condorcet, M. Essai sur l'application de l'analyse à la probabilitité des décisions rendues à la pluralité des voix. De L'Imprimerie royale, Paris, 1785.

[11] V. Conitzer, J. Lang and T. Sandholm, How many candidates are needed to make elections hard to manipulate?, in: *Proceedings of the Ninth Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK 2003)*, Bloomington, Indiana, USA, 2003, pp 201-214.

[12] B. Cuevas, "Equivalencia entre el Teorema de Imposibilidad de Arrow y el Teorema de Manipulabilidad de Gibbard-Satterthwaite", Tesis de Licenciatura, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2012.

[13] D. Dubois and H. Fargier, A Unified framework for order-of-magnitude confidence relations, in: *Proceedings of the Twentieth Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-04)*, Arlington, Virginia, USA, 2004, pp. 138-145.

[14] D. Dubois, J. Lang and H. Prade, Possibilistic logic, in: D.M. Gabbay, et al. (Eds.), "Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming", Vol. 3, Oxford University Press, Oxford, UK, 1994, pp. 439-513.

[15] D. Dubois and H. Prade, Possibilistic logic: a retrospective and prospective view, *Fuzzy Sets and Systems*, 144 (2004) 3-23.

[16] J. Duggan and T. Schwartz, Strategic manipulability without resoluteness or shared beliefs: Gibbard-Satterthwaite generalized, *Social Choice and Welfare*, 17 (2000), 85-93.

[17] H. Egli, *A Mathematical Model for Nondeterministic Computations*, ETH, Tecnical Report, Zurich, 1975.

[18] E. Elkind, P. Faliszewski, A. Slinko, *On Distance Rationalizability of Some Voting Rules*. TARK, 2009.

[19] P. Fishburn, *The Theory of Social Choice* Princeton Universaity Press, 1973.

[20] J. Geneakoplos, Three brief proofs of arrow's impossibility theorem. Cowles Foundation http://cowles.econ.yale.edu/P/au/DINDEX.htm, (Discussion Paper No. 1123RRR), June 2001.

[21] P. A. Gibbard, Manipulations of voting schemes: A general result, *Econometrica*, 41 (1973), 587-602.

[22] I. Gilboa, *Theory of Decision under Uncertainty.* Cambridge University Press, 2009.

[23] J. S. Kelly, Strategy-proofness and social choice functions without single-valuedness, *Econometrica*, 45 (1977), 439-446.

[24] J. S. Kelly, "Social Choice Theory: An Introduction", Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[25] J. G. Kemeny, Mathematics without Numbers, *Daedalus*, 88 (1959), 577-591.

[26] P. Komjáth and V. Totik, Ultrafilters, *American Mathematical Monthly*, 115 (2008) 33-44.

[27] S. Konieczny and R. Pino Pérez, Logic based merging, *J. Philos. Logic*, 40(2):239–270, 2011.

[28] J. Franklin Leal, "Posibilidad e imposibilidad en la Teoría de Elección Social", Tesis de Licenciatura, Universidad de Los Andes, 2003.

[29] J. Franklin Leal, "Manipulabilidad en la Teoría de Elección Social", Tesis de Maestría, Universidad de Los Andes, 2005.

[30] The Mac Tutor History of Mathematics archive, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Borda.html

[31] The Mac Tutor History of Mathematics archive, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Condorcet.html

[32] The Mac Tutor History of Mathematics archive, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Voting.html

[33] D. Makinson, Combinatorial versus decision-theoretic components of impossibility theorems, *Theory and Decision*, 40 (1996), 181-190.

[34] A. Mata, "Manipulabilidad en la Fusión Lógica", Tesis de Licenciatura, Universidad de Los Andes, 2007.

[35] A. Mata, "Sobre la fusión de estados epistémicos", Tesis de Maestría, Universidad de Los Andes, 2010.

[36] A. Mata and R. Pino Pérez, Logic based fusion of epistemic states, *ECSQARU 2011*, **LNAI** 6717, pp. 398-409, 2011.

[37] K. O. May, A set of independent, necessary and sufficient conditions for simple majority decision, *Econometrica*, 20 (1952), 680-684.

[38] R. Milner, Processes: A mathematical model of computing agents, in *Logic Colloquium 1973*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[39] H. Moulin, *Axioms of Cooperative Decision Making*. 1988.

[40] M. S. Pini, F. Rossi, K. B. Venable, T. Walsh, Aggregating partially ordered preferences, *J. Logic and Computation*, 19 (2009), 475-502.

[41] R. Pino Pérez and J. Leal, A notion of manipulability based on lifting preferences., *Notas de Matemática* Vol.3(1) - N^o 252, 2007 (http://www.saber.ula.ve/handle/123456789/22772)

[42] P.J. Reny, Arrow's theorem and the Gibbard-Satterthwaite theorem: a unified approach, *Economics Letters*, 70 (2001) 99-105.

[43] C. Rodríguez-Álvarez, On the Manipulation of Social Choice Correspondences, *Social Choice and Welfare*, (2007) 29:175-199.

[44] D. Salcedo, "Teorema de Arrow para Perfiles Estructurados", Tesis de Licenciatura, Universidad de Los Andes, 2008.

[45] D. Salcedo and R. Pino Pérez, Distances, structured profiles and Arrow's theorem, *Notas de Matemática* Vol.4(1) - N^o 263, 2008 (http://www.saber.ula.ve/handle/123456789/29571)

[46] M. A. Satterthwaite, Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: Existence and CorrespondenceAlberto Quintero Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions, *Journal of Economic Theory* 10 (1975), 187-217.

[47] L. J. Savage, *The Foundations of Statistics*, (Second edition) Dover, New York, 1972.

[48] G. L. S. Shackle, On the meaning and measure of uncertainty, *Metroeconomica*, 5 (1953), 97-115.

[49] G. L. S. Shackle, "Uncertainty in Economics and Other Reflections", Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1955.

[50] A. D. Taylor, "Social Choice and the Mathematics of Manipulation", Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2005.

[51] P. Vincke, Arrow's theorem is not a surprising result, *European Journal of Operational Research*, 10 (1982), 22-25.

Índice de símbolos

Índice alfabético

Índice de autores

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela.

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela
http://amv.ivic.gob.ve