XXIX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA–VENEZUELA 2016

Métodos variacionales en dinámica lagrangiana

Una invitación al problema de N cuerpos

Ezequiel Maderna
Universidad de la República, Uruguay
emaderna@cmat.edu.uy

MÉRIDA, 5 AL 9 DE SEPTIEMBRE DE 2016

XXIX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana. La XXIX Escuela Venezolana de Matemáticas recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Banco Central de Venezuela, el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) y Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA).

2010 Mathematics Subject Classification:

©Ediciones IVIC
Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
Rif: G-20004206-0

Métodos variacionales en dinámica lagrangiana
Ezequiel Maderna

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas
Preprensa e impresión: Gráficas Lauki C. A.
Depósito legal Ifxxxxxxxxxxxxxx
ISBN xxx-xxx-xxx-xxx-x
Caracas, Venezuela
2016

A la memoria de Jorge Lewowicz (1937–2014)

Índice general

II

Prólogo

El problema clásico de n cuerpos consiste en describir la evolución de un conjunto finito de *masas puntuales* que se encuentran sometidas, de acuerdo con las leyes de Newton, a fuerzas de atracción gravitacionales. Resulta claro que este problema surge del el afán de los matemáticos del siglo diecisiete – que en aquella época difícilmente se distinguían de los físicos y los astrónomos – por comprender el origen y predecir el movimiento de los planetas que componen nuestro sistema solar. La pregunta *¿Caerá algún día la Luna sobre la Tierra?* es un típico ejemplo de una larga lista de preguntas imposibles de obviar. Debemos tener claro que el modelo matemático que abordaremos, tal como lo planteara Isaac Newton en sus *Principia Mathematica* en 1687, no deja de ser una aproximación al fenómeno que pretende explicar. Por ejemplo, el hecho de considerar que las masas (digamos planetas) están concentradas en puntos, o aún en formas elipsoidales, es de por si una simplificación importante. La observación muestra que en realidad los cuerpos celestes tienen formas geométricas irregulares, y más aún, la distribución de la masa en su interior no es ni uniforme ni constante. Como bien sabemos, en el caso de nuestro planeta, la materia que lo compone se encuentra mayoritariamente fluctuando en su interior de acuerdo a una dinámica compleja. Tampoco considera el modelo newtoniano otras fuerzas que actúan sobre los cuerpos, como el viento solar, por citar una de ellas.

Voy a dar tres razones por las cuales considero importante estudiar el problema puramente matemático.

La primera de ellas, es que los errores provocados por las simplificaciones mencionadas, no son realmente apreciables en el comportamiento que se puede observar de los planetas, aún en escalas de tiempo relativamente grandes. Para ilustrar esta afirmación, recordemos el descubrimiento del planeta Neptuno en 1846. Como es sabido, en aquel momento muchos astrónomos se encontraban especialmente dedicados a la determinación de la trayectoria de Urano, planeta que había sido reconocido como tal gracias a la observación mediante telescopio en 1781. Su movimiento observado, difería significativamente de la predicción que se desprendía del modelo newtoniano. Pero en lugar de asumir que Urano constituía un notorio contraejemplo a la ley de gravitación universal, la mayoría de los expertos se inclinaron rápidamente por considerar la posibilidad de que una fuerza de atracción no estimada, desconocida, proveniente de un punto más lejano, fuera responsable de la anomalía. Gracias a sofisticados cálculos de la pluma (literalmente) del astrónomo francés *Urbain Le Verrier* fue posible determinar en junio de 1846 la ubicación aproximada que debía tener la masa ignorada. Tres meses más tarde, apuntando su telescopio hacia esa minúscula región del cielo, el alemán Johann Galle logra observar por primera vez a Neptuno, el planeta más alejado del Sol, cuya masa es diecisiete veces mayor a la de la Tierra, y a menos de un grado de distancia de la posición estimada. Hoy podemos afirmar con total precisión que la Luna se está alejando de la Tierra a razón de tres metros y medio por año, y deducir que un momento del pasado se produjo una colisión entre ambos cuerpos. También podemos afirmar gracias a los cálculos actuales y a la utilización de computadoras, que muy probablemente nuestro planeta entre en colisión con Venus, dentro de algunos miles de millones de años... o que sufriremos una era glaciar dentro de aproximadamente trescientos mil años. El lector pensará con razón que estas magnitudes temporales son excesivamente grandes en relación a la vida de un ser humano, incluso con la de nuestra especie. Sin embargo, el análisis del problema de n cuerpos también resulta fundamental a la hora de diseñar viajes espaciales. Vale la pena recordar que en el año 2011 se envió una sonda espacial a Júpiter que, luego de recorrer una órbita compleja, llegó exactamente como previsto a su destino en julio de este año. No caben dudas sobre la utilidad práctica que siempre ha tenido y que tendrá en el futuro el estudio del problema de los n cuerpos.

La segunda razón para estudiar el problema matemático es la riqueza de los enfoques con los que ha sido atacado a lo largo de la historia. Para empezar, la propia formulación del modelo de gravitación de Newton se encuentra íntimamente ligada a la formalización de la teoría del *cálculo* *infinitesimal* asi como de la noción de *ecuación diferencial*. Es claro que estos conceptos fundamentales de la matemática surgieron y se fueron consolidando a medida que se desarrollaban los modelos matemáticos de la física, y muy particularmente los de la mecánica celeste. Otra vez, podríamos abundar en ejemplos de teorías y métodos matemáticos cuyos orígenes radican en el estudio del problema de los n cuerpos. Veamos uno simple y bien conocido como lo es el *método de variación de constantes*, que usualmente es utilizado para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. Consiste en hallar primero la solución general de la correspondiente ecuación homogénea, luego sustituir las constantes de integración por funciones del tiempo, y deducir entonces una ecuación auxiliar que deben satisfacer estas nuevas variables para que la nueva expresión verifique la ecuación no homogénea. Sin embargo, lo que no es tan conocido, es que esta idea la introdujo Lagrange en su intento – luego continuado sin éxito por Poisson – de establecer la estabilidad del sistema solar: si despreciamos la fuerza ejercida sobre la Tierra por los demás planetas, es decir asumiendo que se encuentra atraída por el Sol, es posible demostrar que las soluciones de la ecuación reducida cumplen las leyes de Kepler, en particular todas las trayectorias son necesariamente curvas cónicas, y que por lo tanto están determinadas por algunas constantes. La idea de Lagrange consistió en suponer que el movimiento real, es decir la solución de la ecuación diferencial que tiene en cuenta la atracción que sufre la Tierra por los demás planetas, puede expresarse al igual que una órbita kepleriana, pero sustituyendo las constantes por funciones del tiempo. Con esta suposición es posible hallar una ecuación diferencial auxiliar que deben satisfacer las nuevas variables. Probar la estabilidad de la órbita de la Tierra equivale de esta forma a probar que las soluciones de esta nueva ecuación no admiten grandes variaciones (lo cual sabemos que es falso). Aunque el método no resultó fructífero para el problema de los n cuerpos, es claro que la idea constituyó un avance notable para el estudio de muchas otras ecuaciones diferenciales. Desde Newton hasta nuestros días muchos de los más célebres matemáticos han estudiado el problema. En la lista no pueden faltar *Euler, Clairaut, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Jacobi, Liapunov, Bruns, Poincaré, Sundman, Painlevé, Moulton, Chazy, Levi-Civita, Birkhoff, Sitnikov, Alexeiev, Kolmogorov, Arnold, Siegel y Moser* por sus imortantes aportes. La formulación lagrangiana de la mecánica, la teoría del caos en sistemas dinámicos, o la célebre teoría KAM no hubiesen surgido sin la motivación primordial de comprender la dinámica del modelo newtoniano. Obviamente no pretendemos ser exaustivos.

Finalmente, la tercera de las razones es que, sorprendentemente, todos estos avances de la matemática no han logrado dilucidar las interrogantes más elementales que desafían a quienes intentan estudiar el problema de los n cuerpos. En un artículo publicado en 2012, Albouy, Cabral y Santos [ACS] confeccionan una extensa lista de problemas abiertos, y describen además cuales son, en cada uno de ellos, los resultados parciales que se conocen hasta la fecha. *¿Son la órbitas periódicas densas en el conjunto de las acotadas?*, *¿De cuántas formas podemos disponer los cuerpos para obtener una órbita de equilibrio relativo?. En caso de producirse una colisión, ¿las posiciones de los cuerpos tienen direcciones asintóticas? Si el momento de inercia es constante, ¿las distancias entre los cuerpos se mantiene constante? para 4 cuerpos, ¿existen soluciones maximales que terminan en tiempo finito sin que necesariamente ocurra una colisión de algunos? ¿Cuán grande es el conjunto de condiciones iniciales para las cuales la solución determinada está definida para todo el futuro?* son preguntas sobre las que no contamos aún con respuestas satisfactorias.

En el texto que sigue, nos interesaremos particularmente en los métodos variacionales. Como veremos, la formulación variacional de la mecánica caracteriza a las soluciones de las ecuaciones de Newton por propiedades de minimización. Estas propiedades, también conocidas como *principios variacionales*, o *principios de mínima acción*, permiten tratar a todos los problemas mecánicos de forma geométrica. Por ejemplo, el principio de Hamilton, del cuál deduciremos las ecuaciones de Euler-Lagrange, permite tratar las soluciones de los sistemas mecánicos como si fueran geodésicas de una superficie. Sin embargo, en el caso del problema de los n cuerpos, la utilización de las técnicas variacionales resultó muy atenuada por mucho tiempo, y la razón es muy simple: debido a la no compacidad del espacio, y a la presencia de singularidades, el flujo local engendrado por las leyes de Newton no es completo. Sumado a esto, como veremos, fácilmente se pueden construir trayectorias en las cuales se producen colisiones y con acción lagrangiana finita. En consecuencia, el método estándar para construir soluciones minimizantes de la acción presenta un gran problema, y es que *a priori* las curvas que se obtienen mediante la minimización pueden contener colisiones, y por lo tanto no corresponderse con movimientos reales. Esta dificultad aparece muy claramente expresada en el artículo de Poincaré de 1896 titulado *Sur les solutions péridoques et le principe de moindre action* [Po1]. Cien años más tarde *Christian Marchal* logró eliminar esta dificultad, al probar en 1998 que *toda las curvas que verifican el principio de mínima acción en el problema de n cuerpos no admiten colisiones en los instantes de tiempo interiores de su dominio* [Mar]. Este teorema abrió una enorme brecha a través de la cual se logró establecer la existencia de una inmensa variedad de soluciones periódicas. En el 2000, Chenciner y Montgomery publican un notable artículo [ChM], en el cual se demuestra, para el problema plano de tres cuerpos con masas iguales, la existencia de una órbita periódica llamada *figura del ocho*, en la cual los tres cuerpos se persiguen perpetuamente recorriendo sin chocarse una curva cerrada y con una sola autointersección. Estas órbitas periódicas particulares, en las que todos los cuerpos comparten la trayectoria, se denominan hoy *órbitas coreográficas.* Hasta ese entonces, el único ejemplo conocido de este tipo de órbitas era el descubierto por Lagrange en 1772 que consiste en tres cuerpos de igual masa, que conforman un triángulo equilátero en todo momento, y se desplazan sobre una circunferencia. Desde entonces el llamado *método directo* del cálculo de variaciones permitió establecer la existencia de diversos tipos de órbitas periódicas, planas o espaciales, con cantidades arbitrarias de cuerpos. Ferrario y Terracini establecen en 2004, utilizando la idea de Marchal, que tanto la figura del ocho como la órbita de Lagrange se obtienen variacionalmente mediante un mismo procedimiento geométrico [FT]. Por otra parte, el teorema de Marchal también permitió excluir la existencia de ciertas órbitas. Permite probar por ejemplo, que no existen óbitas definidas para todo tiempo pasado y futuro que minimicen la acción entre cualquiera de sus puntos.

Tengo la convicción de que esta gran puerta que abre el teorema de Marchal conducirá inevitablemente a la comprensión más profunda de este colosal problema de la matemática. Por esta razón, y también por una razón estética, creo importante su especial difusión.

Ezequiel Maderna
Montevideo, agosto 2016

Capítulo 1

El problema de n cuerpos

1.1. Ecuaciones de Newton

El modelo newtoniano de gravitación se expresa mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Estas ecuaciones rigen la evolución de un conjunto finito de puntos en un espacio euclídeo. Cada uno de estos puntos, denominados cuerpos, tiene asociado un número real positivo, su masa. Más precisamente, sea E un espacio vectorial real con producto interno, y n números reales $m_1, m_2, \ldots, m_n > 0$. Si las posiciones de los cuerpos son designadas $r_1, r_2 \ldots, r_n \in E$, entonces las ecuaciones son

$$m_i \, \ddot{r}_i = \mathrm{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathrm{F}_{ij}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ donde F_{ij} es la fuerza ejercida por el j-ésimo cuerpo sobre el i-ésimo, y solamente depende de las posiciones y de las masas de dichos cuerpos:

$$\mathrm{F}_{ij} = \frac{m_i \, m_j}{\| \, r_j - r_i \, \|^2} \; \mathbf{u}_{ij}$$

siendo $\mathbf{u}_{ij} \in E$ es el vector unitario que apunta, desde la posición r_i hacia la posición r_j. Es decir,

$$\mathbf{u}_{ij} = \frac{r_j - r_i}{\| \, r_j - r_i \, \|}$$

Usualmente esto se expresa diciendo que la fuerza que ejerce un cuerpo sobre otro es *una fuerza atractiva, proporcional al producto de las masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.* En la literatura del tema más próxima a la física, suele aparecer además una constante multiplicando cada segundo miembro de las ecuaciones. Es la llamada constante de *Cavendish*, y es responsable de que las soluciones de las ecuaciones concuerden fielmente con la realidad observada en el cielo, cuando se utilizan las unidades de medida del sistema métrico decimal. Su valor es

$$\mathcal{G} = 6{,}672 \times 10^{-11}\, m^3\, kg^{-1}\, s^{-2}$$

Para el estudio matemático esta constante es prescindible, ya que basta con elegir una nueva unidad de tiempo para que la nueva constante de proporcionalidad sea $\mathcal{G}' = 1$. Del mismo modo, si por alguna razón resultase conveniente, podemos cambiar la unidad de medida de la masa, para que la masa total del sistema valga $M = m_1 + \cdots + m_n = 1$.

Para terminar de entender el modelo, debemos aclarar cuales son las situaciones en las cuales se aplica. No caben dudas de que hay una única restricción: *la ley newtoniana de gravitación solamente cobra sentido cuando todos los cuerpos ocupan posiciones diferentes.* En otras palabras, el dominio del sistema de ecuaciones es el abierto

$$\Omega = \{\, x = (r_1, \ldots, r_n) \in E^n \mid r_i \neq r_j \text{ para todo } i \neq j \,\}$$

La estructura geométrica de este abierto es relativamente simple: en lo que sigue llamaremos *configuraciones* a los elementos

$$x = (r_1 \ldots, r_n) \in E^n$$

y *configuraciones con colisión* a las configuraciones en las cuales al menos dos cuerpos ocupan la misma posición. Si para cada $i < j$ definimos el subespacio

$$\Delta_{ij} = \{\, x = (r_1 \ldots, r_n) \in E^n \mid r_i = r_j \,\}$$

entonces el dominio de las ecuaciones puede escribirse

$$\Omega = E^n \setminus \Delta$$

$$\Delta = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{ij}$$

y es por lo tanto el complemento de una unión de subespacios, cada uno de ellos de codimensión igual a $\dim E$. En particular Ω, es denso en el espacio E^n de todas las configuraciones. También es posible describir la topología de este abierto. En el caso del *problema colineal*, es decir cuando $\dim E = 1$, se tiene que Ω tiene exactamente $n!$ componentes conexas, siendo cada una de ellas contráctil. Si $\dim E \geq 2$, el abierto Ω formado por las configuraciones sin colisiones es conexo, y es además simplemente conexo cuando $\dim E \geq 3$. Es posible describir sus grupos de homología de grado superior mediante secuencias exactas, aunque no haremos uso de esta herramienta. El lector interesado podrá consultar el clásico artículo [FaN] *Configuration spaces* motivado por el estudio de los grupos de trenzas (*braid groups*).

El modelo newtoniano es determinista. Las fuerzas que intervienen son funciones analíticas de las posiciones, y por lo tanto el conocimiento exacto de las posiciones y velocidades de los cuerpos en un instante dado determina completamente toda la evolución futura y pasada del movimiento. Las ecuaciones verifican las hipótesis del teorema de Picard de existencia y unicidad de soluciones, lo cual nos permite expresar esta determinación de la siguiente forma.

Proposición 1.1. *Dados una configuración $x_0 = (q_1, \ldots, q_n) \in \Omega$, es decir sin colisiones, un vector arbitrario $v = (v_1, \ldots, v_n) \in E^n$, y un instante $t_0 \in \mathbb{R}$, existe una única función diferenciable*

$$\begin{array}{rcl} x : I & \to & \Omega \\ t & \mapsto & x(t) = (r_1(t), \ldots, r_n(t)) \end{array}$$

definida en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ y que verifica

1. *$t_0 \in I$, $r_i(t_0) = q_i$ y $\dot{r}_i(t_0) = v_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.*
2. *$x(t)$ es una solución de las ecuaciones de Newton.*
3. (maximalidad) *Toda otra función que verifique las dos condiciones anteriores es una restricción de x a un subintervalo de I.*

El intervalo maximal $I = I(t_0, x_0, v_0)$ no siempre es todo $\mathbb{R}$. Un ejemplo muy sencillo muestra que una solución puede terminar en tiempo finito: basta considerar dos masas, dispuestas en un instante inicial en reposo, sobre dos puntos distintos del espacio. Inmediatamente se concluye que al cabo de un tiempo finito, ambos cuerpos se encuentran en un punto intermedio. El flujo que generan las ecuaciones no es completo. Como veremos, el estudio de las órbitas que terminan en tiempo finito juega un rol fundamental en el estudio de la dinámica del problema de n cuerpos. Estos instantes finales, se denominan usualmente singularidades de las soluciones. En el caso de tres cuerpos, sólo es posible que se produzca una singularidad mediante una colisión de dos de ellos (colisión binaria) o por la colisión simultánea de los tres cuerpos, es decir una colisión triple o total. Una prueba de este teorema puede hallarse en el libro de Siegel y Moser [SiM] y fue establecido en 1895 por *Paul Painlevé*, quien además conjeturó, en sus célebres *Lecciones de Estocolmo sobre la teoría analítica de las ecuaciones diferenciales* [Pve], la existencia para más de tres cuerpos, de otros tipos de singularidades, hoy denominadas *pseudocolisiones*.

Definición. *Si $x : (a,b) \to \Omega$ es una solución maximal del problema de n cuerpos definida hasta un tiempo $b < +\infty$ decimos que la solución presenta una* **singularidad** *en $t = b$. Distinguimos dos casos:*

1. *Si existe el límite*
$$\lim_{t \to b} x(t) = c \in E^n$$
es decir, cuando cada cuerpo tiende a una posición límite en E, decimos que $t = b$ es una singularidad real de la solución, o que en $t = b$ se produce una **colisión**.

2. *en caso contrario, es decir si alguno de los cuerpos no tiende a una posción límite cuando $t \to b$, decimos que en $t = b$ se produce una* **pseudocolisión**.

Para justificar esta denominación, vamos a verificar que si una solución maximal termina en un tiempo finito, en el cuál las posiciones de todos los cuerpos convergen, entonces la configuración límite necesariamente debe ser una configuración de colisión $c \in \Delta$, es decir un configuración en la cual al menos dos cuerpos ocupan la misma posición. Supongamos que la solución $x = (r_1, \ldots, r_n)$ está definida en el intervalo (a,b), que $r_i(t) \to z_i \in E$ cuando $t \to b$, y que $z_{ij} = \| z_i - z_j \| > 0$ para todo $i \neq j$. Pero entonces, dado $\varepsilon < b - a$ podemos hallar una constante $\delta > 0$ tal

que $r_{ij}(t) > \delta$ para todo $t \in [\,b-\varepsilon, b)$. Consecuentemente las fuerzas que actúan pueden acotarse uniformemente en este intervalo. Por integración se obtiene también una cota uniforme para las velocidades de los cuerpos en el mismo intervalo. Esto reduce la suposición a un absurdo, porque implica que la gráfica de la solución maximal no escapa, cuando $t \to b$, de un compacto contenido en $\mathbb{R} \times \Omega \times E^n$.
En una publicación de 1908 [Zei], el astrónomo sueco *Hugo von Zeipel* demostró un teorema fundamental para el estudio de las singularidades. Estableció que, si las posiciones de los cuerpos están acotadas en un intervalo previo a una singularidad, entonces la singularidad es debida a una colisión. Consecuentemente, en una pseudocolisión, al menos uno de los cuerpos debe tener una trayectoria no acotada. Este fenómeno hizo dudar seriamente de la existencia de pseudocolisiones, ya que en pocas palabras, implicarían un *viaje al infinito en tiempo finito!*

Sin embargo, en 1992 *Jeff Xia* logró demostrar la existencia órbitas con pseudocolisiones, para el problema espacial de 5 cuerpos, es decir, en el caso $E = \mathbb{R}^3$ y $n = 5$ [Xi2]. Existen también ejemplos de pseudocolisiones en el problema plano pero con mayor cantidad de cuerpos interactuando. El caso de cuatro cuerpos se mantiene abierto hasta el día de hoy.

1.2. Potencial newtoniano

Veamos ahora que nuestro sistema de ecuaciones es *conservativo*, es decir que las fuerzas que actúan son las derivadas parciales de un función.

Definición. *El* **potencial newtoniano** *del problema de n cuerpos con masas $m_1, \ldots, m_n$ es la función positiva*

$$\begin{aligned} U : \Omega \; &\to \; (0, +\infty) \\ x \; &\mapsto \; U(x) = \sum_{i<j} \frac{m_i\, m_j}{r_{ij}} \end{aligned}$$

donde $x = (r_1, \ldots, r_n) \in \Omega$ es una configuración, y $r_{ij} = \|\, r_i - r_j \,\|$ designa la distancia en E entre i-ésimo y el j-ésimo cuerpo.

El potencial newtoniano es una función homogénea de grado -1. Es decir, se tiene que para todo $\lambda > 0$ que

$$U(\lambda x) = U(\lambda r_1, \ldots, \lambda r_n) = \lambda^{-1}\, U(x)$$

Además, puesto que su valor solamente depende de las distancias mutuas entre los cuerpos que componen la configuración, resulta evidente que es invariante por la acción de las isometrías del espacio E sobre el espacio de configuraciones Ω. Más precisamente, si $g \in O(E)$ es una transformación ortogonal, entonces cualquiera sea la configuración $x \in \Omega$ y cualquiera sea el vector $u \in E$ se verifica

$$U(g \cdot x + \delta(u)) = U(g(r_1) + u, \ldots, g(r_n) + u) = U(x)$$

Proposición 1.2. *Las ecuaciones de Newton del problema de n cuerpos se escriben también de la siguiente forma:*

$$m_i \, \ddot{r}_i = \frac{\partial U}{\partial r_i}(r_1, \ldots, r_n)$$

Demostración. Observemos en primer lugar que, si $r_a \neq r_b$ designan dos elementos de nuestro espacio euclídeo E, entonces se tiene que

$$\frac{\partial \, r_{ab}}{\partial r_a} = \frac{\partial \parallel r_a - r_b \parallel}{\partial r_a} = \frac{(r_a - r_b)}{\parallel r_a - r_b \parallel}$$

y por lo tanto si $x \in \Omega$

$$\frac{\partial U}{\partial r_i}(x) = \sum_{j \neq i} m_i \, m_j \, \frac{\partial}{\partial r_i} \, (r_{ij}^{-1}) = - \sum_{j \neq i} \frac{m_i \, m_j}{(r_{ij})^2} \, \frac{(r_i - r_j)}{r_{ij}} = \mathrm{F}_i$$

como queríamos probar. □

Damos ahora un notación más sintética de las ecuaciones. Con este fin, comenzamos por introducir un producto interno en E^n.

Definición (producto interno de las masas). *Dados $x, y \in E^n$,*

$$x = (r_1, \ldots, r_n) \; , \quad y = (s_1, \ldots, s_n)$$

definimos su producto

$$\langle \, x \, , \, y \, \rangle = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \langle r_i, s_i \rangle_E$$

Veamos la primera aplicación importante de esta definición. Dada una configuración $x \in \Omega$, y un vector arbitrario $y = (s_1, \ldots, s_n)$ de E^n, podemos aplicar el diferencial del potencial en x al vector y. Obtenemos

$$\begin{aligned} d_x U(y) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial U}{\partial r_i}(x), s_i \right\rangle_E \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left\langle \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial r_i}(x), s_i \right\rangle_E \end{aligned}$$

Por otra parte, el campo de gradientes del potencial newtoniano respecto al producto interno de las masas, es el único campo de vectores ∇U en Ω que satisface

$$d_x U(y) = \langle \, \nabla U(x) \, , \, y \, \rangle$$

en todo punto $x \in \Omega$ y para todo vector $y \in E^n$. Concluimos entonces que

$$\nabla U(x) = \left(\frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial r_1}(x), \ldots, \frac{1}{m_n} \frac{\partial U}{\partial r_n}(x) \right)$$

lo cual prueba la siguiente proposición:

Proposición 1.3. *Las ecuaciones de Newton del problema de n cuerpos se escriben también de la siguiente forma:*

$$\ddot{x} = \nabla U(x)$$

Si denotamos (x, v) a los elementos de $T\Omega = \Omega \times E^n$ entonces el sistema resulta equivalente a la ecuación diferencial de primer orden

$$(\dot{x}, \dot{v}) = (v, \nabla U(x))$$

El producto interno de las masas permite además escribir sintéticamente otras cantidades fundamentales para el estudio de la dinámica de las soluciones. En lo que sigue denotaremos

$$|\, v \,| = \langle \, v \, , \, v \, \rangle^{1/2}$$

la norma inducida en E^n por el producto interno de las masas.

Definición (momento de inercia). *Dado un punto $A \in E$, se define el momento de inercia de una configuración $x = (r_1, \ldots, r_n) \in E^n$ respecto al punto A como la cantidad positiva*

$$I_A(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \| \, r_i - A \, \|^2$$

Cuando $A = 0$ es el origen del espacio E, omitiremos el subíndice y escribiremos

$$I(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \| \, r_i \, \|^2 = \langle \, x \, , \, x \, \rangle = | \, x \, |^2$$

El momento de inercia (respecto al origen) de una configuración mide su tamaño. Para que esta cantidad sea pequeña, es necesario que todos los cuerpos se encuentran cercanos al origen, y para que sea grande, es necesario que alguno de los cuerpos se encuentre en una posición alejada del origen. Vale la pena observar que el potencial newtoniano, por el contrario, toma valores pequeños sólo si todas las distancias entre los cuerpos son grandes, y toma valores grandes cuando al menos un par de ellos se encuentran suficientemente cercanos.

Antes de pasar a la sección siguiente veremos que el momento de inercia respecto del centro de masas es de especial interés. En primer lugar, porque puede expresarse en términos de las distancias entre los vectores, mediante una fórmula conocida como *identidad de Leibnitz*. Por otra parte, como veremos, una vez reducido el centro de masas al origen, su variación a lo largo de las trayectorias jugará un rol muy importante en la descripción cualitativa de la dinámica. Finalmente, conociendo el momento de inercia respecto del centro de masas podemos calcular fácilmente el momento de inercia respecto de cualquier otro punto.

Definición (centro de masas). *Definimos el* centro de masas *de una configuración $x \in E^n$ como el baricentro ponderado por las masas de las posiciones de los respectivos cuerpos. Más precisamente, si denotamos $M = m_1 + \cdots + m_n$ la masa total del sistema, entonces podemos definirlo como la función lineal*

$$\begin{aligned} G : E^n \quad &\to \quad E \\ x = (r_1, \ldots, r_n) \quad &\mapsto \quad G(x) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \, r_i \end{aligned}$$

Es útil recordar la siguiente propiedad elemental que cumple el centro de masas: si descomponemos en clases el conjunto de los cuerpos que conforman cierta configuración x, digamos en k subconjuntos disjuntos y no vacíos, entonces el centro de masas de la configuración es exactamente el centro de masas de una configuración de k cuerpos, con posiciones en los respectivos centros de masas de cada clase, y masas iguales a las masas totales de casa clase. Es decir, si para cada $j = 1, \ldots, k$ llamamos M_j la suma de las masas de los cuerpos en la clase j, y G_j el centro de masas de los cuerpos que la componen, entonces se tiene

$$G(x) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{k} M_j \, G_j = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{k} M_j \left(\frac{1}{M_j} \sum_{i \in I_j} m_i \, r_i \right)$$

donde I_j designa el conjunto de índices de los cuerpos en la clase j.

Proposición 1.4 (fórmula de Steiner). *Sea x una configuración de masa total M, y $G = G(x)$ su centro de masas. Dado $A \in E$ un punto arbitrario se tiene que*

$$I_A(x) = M \, \| G - A \|^2 \; + \; I_G(x)$$

Demostración. Sea $x = (r_1, \ldots, r_n)$ la configuración. Si escribimos

$$r_i - A = (r_i - G) + (G - A)$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} I_A(x) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\| r_i - G \|^2 + 2 < r_i - G, G - A >_E + \| G - A \|^2 \right] \\ &= I_G(x) \, + \, 2 < \sum_{i=1}^{n} m_i \, (r_i - G) \, , \, G - A \, >_E \, + M \, \| G - A \|^2 \end{aligned}$$

y la fórmula se deduce entonces del hecho que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \, (r_i - G) \; = \; MG - MG \; = \; 0$$

□

Utilizando la fórmula de Steiner podemos obtener una expresión para el momento de inercia respecto al centro de masas en terminos de las distancia mutuas.

Proposición 1.5 (fórmula de Leibnitz). *Sea* $x = (r_1, \ldots, r_n) \in E^n$ *una configuración,* $G = G(x)$ *su centro de masas, y* M *su masa total. Denotando* $r_{ij} = \| r_i - r_j \|$ *se verifica*

$$I_G(x) \;=\; \frac{1}{M} \sum_{i<j} m_i\, m_j\, r_{ij}^2$$

Demostración. Aplicamos en primer lugar la fórmula de Steiner para calcular el momento de inercia de la configuración respecto a cada una de las posiciones de los cuerpos. Se obtienen las igualdades

$$I_{r_i}(x) = M \, \| r_i - G \|^2 + I_G(x)$$

para $i = 1, \ldots, N$. Multiplicando por la correspondiente masa cada una de las igualdades resulta

$$\sum_{j=1}^{n} m_i\, m_j\, r_{ij}^2 = M\, m_i \; \| r_i - G \|^2 + m_i\, I_G(x).$$

Sumando todas estas igualdades se obtiene

$$2 \sum_{i<j} m_i\, m_j\, r_{ij}^2 = M \sum_{i=1}^{n} m_i \; \| r_i - G \|^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) I_G(x) = 2M\, I_G(x)$$

$\square$

1.3. Simetrías y cantidades conservadas

En general, toda información que dispongamos sobre la estructura de una ecuación diferencial se traduce en propiedades de las soluciones. Por ejemplo, la autonomía de las ecuaciones implica que las soluciones son trasladables y en el tiempo. Análogamente, como las fuerzas solamente dependen de las posiciones, las soluciones son reversibles. Se verifica inmediatamente que si $x(t)$ es una solución, entonces tanto $y(t) = x(t{+}a)$ para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$, como $z(t) = x(-t)$, definen soluciones en los intervalos en los que la expresión tiene sentido. Basta observar que se verifica

$$\ddot{y}(t) = \ddot{x}(t+a) = \nabla U(x(t+a)) = \nabla U(y(t)$$

$$\ddot{z}(t) = \ddot{x}(-t) = \nabla U(x(-t)) = \nabla U(z(t))$$

Otra información que disponemos sobre el potencial newtoniano es que es homogéneo e invariante por la acción del grupo de isometrías de E. Esto implica la existencia de nuevas transformaciones en el conjunto de las soluciones, que enunciamos a continuación. Recordemos que la función U es homogénea de grado -1 y por lo tanto su gradiente es un campo homogéneo de grado -2. Denotermos $\delta : E \to E^n$ la inclusión canónica $\delta(u) = (u, \ldots, u)$.

Proposición 1.6. *Sea $x : (0, T) \to \Omega$ una solución.*

1. *Para cualquier $g \in O(E)$ y par de vectores $u, v \in E$,*

$$x_{g,u,v}(t) = g \cdot x(t) + \delta(u + tv)$$

define otra solución sobre el mismo intervalo $(0, T)$.

2. *Cualquiera sea $\lambda > 0$ la función*

$$x_\lambda(t) = \lambda\, x(\,\lambda^{-3/2}\, t)$$

es también una solución definida sobre el intervalo $(0, \lambda^{3/2} T)$.

Demostración. Para probar la primera afirmación observamos primero que $\dot{x}_{g,u,v}(t) = g \cdot \dot{x}(t) + \delta(v)$, y que entonces

$$\ddot{x}_{g,u,v}(t) = g \cdot \ddot{x}(t) = g \cdot \nabla U(x(t))$$

Por otra parte, se tiene también que

$$\nabla U(x_{g,u,v}(t)) = \nabla U(g \cdot x(t) + \delta(u + tv)) = g \cdot \nabla U(x(t))$$

lo cual concluye la prueba. Para probar la segunda, calculamos

$$\begin{aligned} \ddot{x}_\lambda(t) &= \lambda^{-2}\, \ddot{x}(\,\lambda^{-3/2}\, t) \\ &= \lambda^{-2}\, \nabla U(x(\,\lambda^{-3/2}\, t)) \\ &= \lambda^{-2}\, \nabla U(\,\lambda^{-1} x_\lambda(t)) \\ &= \nabla U(x_\lambda(t)) \end{aligned}$$

□

Vamos a definir ahora funciones definidas en el espacio de fases, es decir en el fibrado tangente $T\Omega = \Omega \times E^n$ que se mantienen constantes a lo largo de las órbitas de nuestro sistema. Estas funciones auxiliares nos permiten estudiar cualitativamente las soluciones, y permiten en general reducir el problema al estudio de una ecuación en un espacio de dimensión menor. Si bien la teoría general de la reducción ha sido enormemente desarrollada, en este texto no haremos un análisis muy exaustivo de estos procedimientos. En nuestro problema ellas son:

- la *función energía*, cuya conservación se debe a que las fuerzas que actúan derivan de un potencial.
- el *momento lineal*, al cual se conserva como consecuencia de la anulación de la suma de todas las fuerzas que actúan.
- el *momento angular*, que es conservado debido a la propiedad de las fuerzas newtonianas F_{ij} de ser colineales con los vectores de posiciones relativas $r_i - r_j$.

En particular estas cantidades serán preservadas si tomamos en lugar del potencial newtoniano cualquier otra función que dependa únicamente de las distancias entre los cuerpos. No es difícil probar que estos potenciales mantienen las características mencionadas.

Conservación de la energía

Es muy común encontrar en un libro de física la definición siguiente, digamos para simplificar, en el contexto del estudio del movimiento de una masa puntual m: *una fuerza F es conservativa cuando existe una función V tal que* $F = -\nabla V$. Si el sistema está regido por la ecuación de Newton $m\ddot{x} = F(x)$ entonces se prueba inmediatamente que la cantidad

$$\frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2(t) + V(x(t)) = h$$

es constante cuando $x(t)$ representa un movimiento real de la masa. Al primer término se le llama energía cinética de la masa en el instante t, y a la función V se le llama energía potencial. Si una aumenta, la otra disminuye. Si conocemos el valor de h, podemos concluir que la partícula nunca se encontrará en las regiones en que $V(x) > h$.

Veamos ahora como se definen estas cantidades en nuestro problema. En primer lugar, definimos la *energía potencial* en nuestro espacio de configuraciones sin colisión Ω como la función $V(x) = -U(x)$, donde U es el potencial newtoniano, o la *función de fuerzas* como la denominaba Lagrange. Por otra parte, definimos la energía cinética de un sistema de partículas en movimiento, como la suma de la energía cinética de cada una de ellas.

Definición (energía cinética). *Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in E^n$ definimos su* energía cinética *a la cantidad no negativa*

$$T(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \, \| \, v_i \, \|^2$$

Usualmente se llama también energía cinética a la función definida en el fibrado tangente de E^n utilizando el hecho de que el mismo es trivial. Es decir, el fibrado tangente es exactamente $E^n \times E^n$, y abusando de la notación escribiremos $T(x, v) = T(v)$.

Utilizando el producto interno de las masas podemos escribir

$$T(v) = \frac{1}{2} \, | \, v \, |^2 = \frac{1}{2} \langle \, v \, , \, v \, \rangle$$

Definición (función de energía). *Definimos la energía mecánica, o energía total, como la función en el espacio de fases $H : \Omega \times E^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$H(x, v) = T(v) - U(x)$$

Proposición 1.7. *Si $x(t)$ es una solución del problema de n cuerpos entonces la cantidad $h = H(x(t), \dot{x}(t))$ es constante y se denomina constante de energía de la solución.*

Demostración. Basta con derivar la función del tiempo $H(x(t), \dot{x}(t))$.

$$\dot{h} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \langle \, \dot{x} \, , \, \dot{x} \, \rangle - \frac{d}{dt} U(x) = \langle \, \ddot{x} \, , \, \dot{x} \, \rangle - \langle \, \nabla U(x) \, , \, \dot{x} \, \rangle = 0$$

$\square$

Concluimos que cada órbita en el espacio de fases está confinada a los conjuntos de nivel de la función H. En nuestro caso, dado que el potencial newtoniano no tiene puntos críticos, se deduce que todos los niveles de energía son subvariedades diferenciables, aunque no son compactas. Sin embargo, es fácil ver que los niveles de energía correspondientes a valores $h < 0$ se proyectan sobre una región acotada del espacio de configuraciones, y podemos concluir que, en toda solución con energía negativa, las trayectorias de los cuerpos se mantienen acotadas.

Conservación del momento lineal

El *momento lineal* o la *cantidad de movimiento* es otra función que como la energía cinética depende solamente de las velocidades de los cuerpos. En cambio, esta función toma como valores en el espacio E, y por lo tanto su conservación permite reducir el problema en tantos grados de libertad como dimensiones tenga el espacio.

Definición (momento lineal). *El momento lineal o la cantidad de movimiento es la función $P : E^n \to E$ definida por*

$$v = (v_1, \ldots, v_n) \;\mapsto\; P(v) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i$$

Al igual que la energía cinética, podemos considerar esta función definida en el espacio de fases escribiendo $P(x, v) = P(v)$.

Proposición 1.8. *Si $x(t)$ es una solución del problema de n cuerpos entonces la cantidad vectorial $p = P(x(t), \dot{x}(t))$ es constante.*

Demostración. Derivando se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i\, \dot{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i\, \ddot{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \mathrm{F}_{ij} \;=\; \frac{1}{2} \sum_{i<j} (\mathrm{F}_{ij} + \mathrm{F}_{ji}) \end{aligned}$$

y la prueba se deduce del *principio de acción y reacción*, que en nuestro caso se expresa por la ecuación $\mathrm{F}_{ij} + \mathrm{F}_{ji} = 0$ para todo $i \neq j$. $\square$

Vemos ahora como la conservación del momento lineal y la invariancia por traslaciones establecida en la proposición 1.6 (1) permiten reducir el problema al estudio de movimientos cuyas configuraciones permanecen en un subespacio de $E_0^n \subset E^n$ de codimensión igual a la dimensión de E. Por lo tanto, si $d = \dim E$, de esta reducción se obtiene una disminución de $2\,d$ grados de libertad en el estudio de la ecuación en el espacio de fases. Si S es un subespacio de E^n, y $x : (a,b) \to S$ es una solución, entonces también se tiene que $v(t) = \dot{x}(t) \in S$ para todo $t \in (a,b)$.

Dada una solución $x : (a,b) \to \Omega$ definimos $G(t) = G(x(t))$ la trayectoria del centro de masas. Inmediatamente constatamos que

$$\dot{G} = \frac{d}{dt}\,G(x(t)) = \frac{P(\dot{x}(t))}{M}$$

donde M es la masa total del sistema. Como ya sabemos, el momento lineal se conserva a lo largo de las trayectorias, y podemos conluir que $G(t)$ tiene un movimiento rectilíneo uniforme en el espacio E. Es decir, existe un vector $v_0 \in E$ tal que para cualquier $t_0 \in (a,b)$ se cumple

$$G(x(t)) = G_0 + (t - t_0)\,v_0$$

para todo $t \in (a,b)$, donde $G_0 = G(x(t_0))$.

Definimos ahora el **movimiento interno** de la solución x mediante la expresión

$$y(t) = x(t) - \delta(G(x(t)))$$

donde $\delta : E \to E^n$ es la inclusión diagonal dada por $\delta(u) = (u, \dots, u)$. Las trayectorias del movimiento interno quedan definidas entonces como las posiciones relativas de los cuerpos que se desplazan en la solución x respecto al centro de masas en cada instante, es decir, si escribimos $x = (r_1, \dots, r_n)$, y $y = (s_1, \dots, s_n)$,

$$s_i(t) = r_i(t) - G(x(t)) = r_i(t) - (G_0 + (t - t_0)v_0)$$

para todo $i = 1, \dots, n$ y para todo $t \in (a,b)$. Conforme a la invariancia por traslaciones uniformes (proposición 1.6 (1)) podemos afirmar que $y : (a,b) \to E^n$ es una nueva solución al problema de n cuerpos, pero con la particularidad de verificar

$$G(y) = G(x - \delta(G(x))) = G(x) - G(\delta(G(x))) = G(x) - G(x) = 0$$

ya que claramente se cumple $G \circ \delta = id_E$. Es decir, hemos probado que el movimiento interno de toda solución es una nueva solución con centro de masas constante en el origen. En términos de mecánica newtoniana, no hemos hecho otra cosa que cambiar de *referencial inercial*.

La reducción del momento lineal consiste en estudiar los movimientos internos de las soluciones, es decir las soluciones tales el centro de masas se mantiene siempre en el origen. Llamamos *configuraciones centradas en el origen* a las que forman el subespacio de

$$E_0^n = \ker G = \{\, x \in E^n \ \mid\ G(x) = 0 \,\}$$

Es interesante notar que este subespacio no es ni más ni menos que el complemento ortogonal, respecto al producto interno de las masas, del espacio de configuraciones de *colisión total* $\operatorname{im}\delta = \Delta_T \subset \Delta$. Es decir, se tiene que $\ker G = (\operatorname{im}\delta)^{\perp}$. A las curvas contenidas en este espacio las llamamos *curvas centradas en el origen* , *soluciones centradas* cuando además verifican las ecuaciones de Newton. En la mayoría de los artículos dedicados al problema de n cuerpos se suele hacer esta reducción desde un principio, y considerar únicamente soluciones centradas. Las curvas centradas verifican $m_1 r_1 + \cdots + m_n r_n = 0$ y por lo tanto cuando son diferenciables verifican también $m_1 \dot r_1 + \cdots + m_n \dot r_n = 0$. Las ecuaciones de Newton son consideradas entonces en el abierto

$$\Omega_0 = \Omega \cap E_0^n$$

y el espacio de fases reducido es entonces $T\Omega_0 = \Omega_0 \times E_0^n$. Conviene destacar que para estas soluciones, las fórmulas de Steiner y de Leibnitz permiten una expresión particularmente útil para la energía cinética y la energía total en términos de las posiciones y velocidades relativas de los cuerpos y del momento lineal.

Proposición 1.9. *Sea $x : (a,b) \to \Omega$ una solución de energía h del problema de n cuerpos, M la masa total del sistema, v_G la velocidad del centro de masas, $x_0 : (a,b) \to \Omega_0$ su movimiento interno y h_0 su energía. Entonces se verifica:*

1.

$$U(x) = U(x_0)\ , \quad T(\dot x) = \frac{1}{2}\, M\, \|\, v_G \,\|^2 + T(\dot x_0)$$

2.
$$h = h' + \frac{1}{2}\, M \,\|\, v_G \,\|^{\,2}$$

3.
$$h' = \frac{1}{M}\, \sum_{i<j}\, m_i\, m_j\, \left(\frac{1}{2}\, \|\, \dot{\mathbf{s}}_{ij} \,\|^{\,2} \; + \; \frac{1}{s_{ij}} \right)$$

donde $x_0 = (s_1, \ldots, s_n)$, $\mathbf{s}_{ij} = s_i - s_j$ *y* $s_{ij} = \|\, \mathbf{s}_{ij} \,\|$.

Conservación del momento angular

Veremos ahora que existe una función definida en $E^{\,n} \times E^{\,n}$, a valores en el álgebra exterior $\Lambda^2(E)$, que es constante a lo largo de las órbitas del problema de n cuerpos. Recordamos que $\Lambda^k(E)$ es el espacio de los k-tensores alternados en E. El lector que no esté familiarizado con estos conceptos del álgebra multilineal podrá consultar la sección *Algebraic Preliminaries* del libro de Spivak ([Spi] §4.1, p.75). De su conservación resultan $\binom{d}{2} = d(d-1)/2$ integrales independientes, donde $d = \dim E$.

Definición (momento angular). *El* momento angular *es la función*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} :\, E^{\,n} \times E^{\,n} & \to & \Lambda^2(E) \\ (x, v) = (\,(r_1, \ldots, r_n)\,,\,(v_1, \ldots, v_n)\,) & \mapsto & \mathcal{C}(x, v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i \wedge v_i \end{array}$$

Observamos que para el caso colineal, es decir cuando $\dim E = 1$, el momento angular es nulo y carece por tanto de interés. En el caso plano, podemos identificar el momento angular con un número real, una vez elegida una orientación del plano. En el caso espacial, los bivectores de E, es decir los elementos de $\Lambda^2(E)$ se identifican naturalmente una vez orientado el espacio con el propio espacio E, y obtenemos entonces tres integrales independientes tomando por ejemplo las coordenadas del momento angular respecto a un base de E.

Proposición 1.10. *Si $x(t)$ es una solución del problema de n cuerpos entonces la cantidad vectorial $c = \mathcal{C}(x(t), \dot{x}(t))$ es constante.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\dot c = \frac{d}{dt}\,\mathcal{C}(x(t),\dot x(t)) &= \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i(t)\wedge \ddot r_i(t)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} r_i(t)\wedge \mathrm{F}_{ij}\\
&= \sum_{i<j} (r_i - r_j)\wedge \mathrm{F}_{ij}
\end{aligned}$$

y la prueba se obtiene observando que todos los términos en la última suma son nulos, puesto que para cada par i, j la fuerza F_{ij} es colineal con la posición relativa $r_i - r_j$. □

1.4. El problema de Kepler

Sobre la dimensión del espacio

El problema de Kepler es el *problema de dos cuerpos*. Podemos suponer que el espacio en el que se mueven los cuerpos es un plano. Hasta el momento no hemos dicho nada sobre la dimensión del espacio E en el cual se mueven los cuerpos. Observemos que aunque la dimensión del espacio sea enorme, incluso infinita, toda solución del problema de n cuerpos transcurre en un subespacio de dimensión a lo sumo $2n$. En efecto, dadas las n posiciones iniciales y las n velocidades iniciales, si llamamos S al espacio generado por estos $2n$ vectores, entonces todas las fuerzas que intervienen están contenidas en este espacio, y podemos concluir que todos los cuerpos se mantendrán en el subespacio S. Por otra parte, si reducimos el centro de masas al origen, entonces la posición de cada cuerpo está en el espacio generado por los restantes $(n-1)$ y lo mismo ocurre con las velocidades. Concluimos que los cuerpos deben mantenerse en un subespacio de dimensión $2n-2$. Esto explica que el movmiento de dos cuerpos con centro en el origen sea plano. Por la misma razón, si estudiamos el problema de tres cuerpos, será suficiente suponer que la dimensión del espacio es 4. No es difícil construir órbitas periódicas de tres cuerpos contenidas en $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, con dos masas iguales recorriendo con velocidad uniforme y en posiciones opuestas una circunferencia de $\mathbb{R}^2 \times \{\,0\,\}$ centrada en el origen, y la tercera masa manteniendo un movimiento circular uniforme sobre una circunferencia contenida en $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ también centrada en el origen. Es claro que esta órbita no está contenida en ningún subespacio de dimensión 3 de $\mathbb{R}^4$. Sin embargo, un simple ejercicio de álgebra lineal permite demostrar que en el problema espacial de tres cuerpos, si el momento angular de una solución es nulo, entonces los cuerpos evolucionan en un plano fijo.

Leyes de Kepler

Johannes Kepler (1571-1630) fue un matemático y astrónomo alemán que dedicó la mayor parte de su vida a estudiar el movimiento de los (seis) planetas conocidos en su época. A partir del año 1600 empezó a colaborar con el astrónomo danés *Tycho Brahe*, gracias a lo cual tuvo acceso a una cantidad muy importante de observaciones sistemáticas de las posiciones de los planetas, que eran mucho más precisas que las que disponía *Copérnico*. En su obra *Astronomia Nova* publicada en 1609 postuló sus famosas tres leyes que describen con enorme precisión el movimiento de los planetas. Como veremos seguidamente, las mismas se deducen de la ley de gravitación universal formulada por Newton casi 80 años más tarde, si despreciamos la interacción mutua entre los diferentes planetas, es decir, si consideramos el problema de dos cuerpos formado por el planeta y el Sol. Estas tres leyes afirman que:

1. *(Primera ley de Kepler) Los planetas tienen movimientos elípticos alrededor del Sol, estando éste situado en uno de los dos focos que contiene la elipse.*

2. *(Segunda ley de Kepler) Las áreas barridas por los radios de los planetas son proporcionales al tiempo que tardan en recorrer el perímetro de dichas áreas.*

3. *(Tercera ley de Kepler) Los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son proporcionales al cubo de las correpondientes distancias promedio al Sol.*

Reducción al problema de un centro atractivo

Asumimos $\dim E = 2$. Sean $m_1, m_2 > 0$ las masas de los dos cuerpos cuyas posiciones serán designadas r_1 y r_2 respectivamente. Dado que el centro de masas es el origen durante el movimiento, obtenemos la ecuación $m_1\, r_1(t) + m_2\, r_2(t) = 0$ para todo t en el que esté definida la solución. Por lo tanto, basta con conocer la ley horaria de uno de los cuerpos para conocer la del otro. Por ejemplo, si las masas son iguales, se obtiene $r_2(t) = -r_1(t)$ mientras dure la evolución. En general tenemos

$$r_2 = -\frac{m_1}{m_2}\, r_1$$

y por lo tanto, si llamamos r a la posición relativa de la primera masa respecto de la segunda, es decir

$$r = r_1 - r_2 = r_1 + \frac{m_1}{m_2}\, r_1 = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) r_1$$

vemos que resolver el problema de Kepler se reduce a determinar $r(t)$. Las ecuaciones de Newton se escriben

$$\ddot{r}_1 = \frac{m_2}{\|\, r_1 - r_2 \,\|^2}\, \frac{r_2 - r_1}{\|\, r_1 - r_2 \,\|}$$

$$\ddot{r}_2 = \frac{m_1}{\|\, r_1 - r_2 \,\|^2}\, \frac{r_1 - r_2}{\|\, r_1 - r_2 \,\|}$$

Restando la segunda ecuación a la primera se deduce que $r(t)$ satisface la *ecuación de Kepler*

$$\ddot{r} \;=\; -\,(m\,\rho^{-3})\; r \tag{1.1}$$

donde hemos denotado m a la masa total $m_1{+}m_2$ y $\rho = \|\, r \,\|$ la distancia entre los cuerpos. Es claro que el dominio de la ecuación de Kepler es $E \setminus \{\, 0 \,\}$. Por otra parte, el segundo miembro de la ecuación deriva del potencial homogéneo $U_\kappa(r) = m\,\rho^{-1}$. En otras palabras, debemos estudiar el movimiento de un cuerpo de masa unitaria, que se desplaza en el plano privado del origen po la acción de una fuerza *central, invariante por rotaciones y conservativa.* Es un ejercicio instructivo verificar que cualquier par de estas tres características implica la restante.

Antes de continuar nuestro estudio del problema de dos cuerpos vamos a destacar una característica notable de la ecuación de Kepler. Se distingue dentro una vasta familia de problemas de fuerzas centrales, junto con la ecuación de un oscilador armónico, por gozar de la siguiente propiedad: *todas sus órbitas acotadas no rectilíneas son periódicas.*

Teorema (Bertrand, 1873 [Alb], p.79)**.** *Si $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función analítica tal que todas las soluciones acotadas no rectilíneas de la ecuación $\ddot{r} = \varphi(\rho)\, r$, donde $\rho = \| r \|$, son periódicas. Entonces o bien φ es no negativa en cuyo caso la fuerza siempre es repulsiva y no hay órbitas acotadas, o bien*

$$\varphi(\rho) = -k\, \rho^{\alpha}$$

con $k > 0$ y $\alpha = 0$ o $\alpha = -3$.

Continuando con el estudio del problema de dos cuerpos, escribimos la ecuación de Kepler, así como sus integrales primeras, en coordenadas cartesianas. Denotando $r = (x, y)$ tenemos que $\rho^2 = x^2 + y^2$ y la ecuación es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\ddot{x} = -m\rho^{-3} x \ , \quad \ddot{y} = -m\rho^{-3} y \ . \tag{1.2}$$

De acuerdo a la fórmula de Leibnitz a las velocidades (proposición 1.9) tenemos que la energía cinética y el potencial newtoniano a lo largo de una solución valen

$$T = \frac{1}{2m}\, m_1\, m_2\, \| \dot{r} \|^2 \ , \quad U = \frac{m_1\, m_2}{\rho} \ .$$

y por lo tanto la constante de enregía es

$$h \ = \ T - U \ = \ \frac{m_1\, m_2}{m} \left(\frac{1}{2}\, (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \ - \ \frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \ = \ \frac{m_1\, m_2}{m}\, h_\kappa$$

donde h_κ representa la constante de energía de la ecuación de Kepler, es decir en la ecuación reducida. Dado que el factor que las relaciona es positivo, ambas constantes tienen el mismo signo.

Para escribir el momento angular definimos las constantes

$$\eta = \frac{m_2}{m} \quad y \quad \nu = -\frac{m_1}{m}$$

con las cuales se verifican las relaciones $r_1 = \eta\, r$ y $r_2 = \nu\, r$. Luego

$$\begin{aligned} c \ &= \ m_1\, r_1 \wedge \dot{r}_1 \ + \ m_2\, r_2 \wedge \dot{r}_2 \\ &= \ (m_1\, \eta^2 \ + \ m_2\, \nu^2)\, r \wedge \dot{r} \ = \ \frac{m_1\, m_2}{m}\, C \ . \end{aligned}$$

La cantidad $C = r \wedge \dot{r} = x\dot{y} - y\dot{x}$ corresponde al momento angular de la partícula de masa unitaria sometida a la fuerza central que deriva del potencial kepleriano U_κ. Es también denominada *constante de área* y de acuerdo al cálculo anterior, es un múltiplo positivo del momento angular del problema original de dos cuerpos. Es evidente que la segunda ley de Kepler es una consecuencia inmediata de la conservación del momento angular. Esta ley se verifica entonces para todos los problemas de fuerzas centrales. Si denotamos $A(t)$ el área cubierta por el radio vector $r(t)$ ponderada por el signo dado por el sentido de la rotación de este vector en cierto intervalo, entonces se verifica fácilente la relación $2\,dA = C\,dt$. Si la constante de área es nula, necesariamente $\dot{r}$ es siempre colineal con el vetor r, lo cual equivale a que el movimiento es rectilíneo, es decir $r(t)$ es de la forma $\rho(t)\,r_0$ para algún vector del plano $r_0 \neq 0$.

El teorema que veremos a continuación implica que la primera ley de Kepler es una consecuencia de la ley de Newton para el problema de dos cuerpos. Para demostrarlo haremos uso del siguiente lema cuya prueba queda a cargo del lector.

Lema. *Si (x, y) es una solución de la ecuación de Kepler (1.2) con momento angular C entonces las cantidades*

$$\alpha = x\,\rho^{-1} - C\,\frac{\dot{y}}{m}$$

$$\beta = y\,\rho^{-1} + C\,\frac{\dot{x}}{m}$$

son constantes.

Teorema 1.1. *Si $x(t) = (r_1(t), r_2(t))$ es una solución del problema de dos cuerpos en el plano con centro de masas fijo en el origen, y momento angular $c \neq 0$, entonces las trayectorias de los cuerpos son curvas cónicas con un foco en el origen. Si h es la constante de energía de la órbita se tiene además que:*

1. *Si $h < 0$ las trayectoria es una elipse.*

2. *Si $h = 0$ las trayectoria es una parábola.*

3. *Si $h > 0$ las trayectoria es rama de una hipérbola.*

En el caso en que $c = 0$, ambos cuerpos se mantienen sobre una recta fija del plano, y la distancia ρ que los separa es una solución de la ecuación de Kepler en la recta:

$$\ddot{\rho} \;=\; -\frac{m}{\rho^2} \tag{1.3}$$

Demostración. El caso $c = 0$ se deduce de las consideraiones anteriores y de la invariancia por rotaciones (proposición 1.6). Podemos suponer que la recta en que se desplazan los cuerpos es el eje de las abcisas, de donde resulta $y = 0$, $x = \rho$. La ecuación de Kepler en la recta es entonces la primera ecuación del sistema de ecuaciones (1.2).

Para el caso en que el momento angular c del problema de dos cuerpos no es nulo, y por lo tanto la constante de área del problema reducido es $C = x\dot{y} - y\dot{x} \neq 0$, verificamos que se cumple la relación

$$\alpha\, x \,+\, \beta\, y \,+\, \gamma \;=\; \rho \tag{1.4}$$

donde γ es la constante positiva C^2/m. Esto muestra que el vector de posición relativa de los cuerpos $r = (x, y)$ se encuentra en la proyección sobre el plano horizontal de la intersección de las superficies de $\mathbb{R}^3$ dadas por las ecuaciones

$$z \;=\; \alpha\, x \,+\, \beta\, y \,+\, \gamma\,, \qquad z \;=\; \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

La primera ecuación define un plano de pendiente $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ que intersecta el eje vertical en una altura γ. Si el plano no es horizontal, es decir si $k > 0$, este plano corta el plano horizontal en la recta d de ecuación $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Por otra parte, la segunda ecuación define al cono de eje vertical con vértice en el origen y de pendiente 1.

La intersección de estas dos superficies es una sección cónica, del mismo tipo que su proyección al plano horizontal. Es claro que el tipo de cónica queda determinado por el valor de la constante $k \geq 0$, a la cual llamamos *excentricidad* de la cónica. Según los valores de k la proyección de esta sección resulta ser: una circunferencia con centro en el origen si $k = 0$, una elipse si $k \in (0, 1)$, una parábola si $k = 1$, o hipérbola si $k > 1$.

Cuando la excentricidad es positiva, resulta que la recta d es una directriz de la cónica horizontal con foco en el origen. Para verificar esto basta con calcular la distancia de cualquier de sus puntos a la recta d y comprobar que es proporcional a la distancia del punto al origen. Finalmente, un cálculo explícito muestra que el cuadrado de la excentricidad vale

$$k^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 1 + \frac{2\,C^2}{m^2}\left(\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{m}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

es decir, para cierta constante positiva μ que depende de las masas

$$k^2 = 1 + 2\,\mu\,c^2\,h \tag{1.5}$$

lo cual termina la prueba del teorema, ya que la clasificación del tipo de cónica en función de su excentricidad concuerda con la clasificación del enunciado en términos del valor de la constante de energía h. □

La tercera ley de Kepler es aproximadamente correcta. En realidad, de las leyes de Newton se deduce que la constante de proporcionalidad depende de la suma de las masas de los cuerpos. Si llamamos m la masa del planeta, y M la masa del Sol, es claro que $M + m \simeq M$ puesto que en todos los casos $m \ll M$. Aproximando las órbitas de los planetas por órbitas circulares, es fácil verificar la segunda ley de Kepler utilizando la proposición 1.6 (2).

1.5. Colisiones totales, parciales, y movimientos competamente parabólicos

Rey Oscar II, Poincaré, Sundman y Chazy

El matemático finlandés *Karl Sundman* es responsable de la *resolución del problema de tres cuerpos*, en el sentido dado a fines del siglo XIX. En 1912 estableció que casi todas las soluciones del problema admiten un desarrollo infinito en series de potencias de $t^{2/3}$. Ese era el desafío principal planteado en 1886 en un volumen de *Acta Mathematica*, que anunciaba que el rey Oscar II de Suecia y Noruega ofrecía un premio a quien presentase, antes del 1ero de junio de 1888, el mejor trabajo sobre cuatro problemas matemáticos establecidos por un jurado compuesto por *Gösta Mittag-Leffler*, editor en jefe de la revista, *Charles Hermite*, y *Karl Weierstraß*. Ninguno de los trabajos presentados resolvía el problema y el premio fue otorgado al trabajo presentado por *Henri Poincaré*. La memoria presentada por Poincaré, aún con los errores descubiertos luego de su publicación, es el primero en presentar comportamientos caóticos en un sistema determinista, dando origen a la teoría moderna de los sistemas dinámicos.

El objetivo fundamental era obtener, para una solución arbitraria del problema de tres cuerpos, una prolongación analítica a un abierto del plano complejo que contenga todo el eje real. De esta forma, pensaban que la solución admitiría una expresión, para *tiempos complejos* z en ese dominio $D \subset \mathbb{C}$, de la forma

$$x(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n\, \phi(z)^k \tag{1.6}$$

donde la función ϕ sería una función conocida, y de modo que la serie sea uniformemente convergente en el subconjunto $\mathbb{R} \subset D$. De esta forma se pretendía poder calcular las soluciones, comprender su dinámica y poder responder las preguntas elementales de la mecánica celeste que se mantenían sin respuesta. Las investigaciones de Sundman permitieron en primer lugar detectar que el principal problema para la prolongación analítica era el comportamiento de las soluciones cuando los cuerpos se aproximaban simultáneamente a su centro de masas. Por lo tanto, se debía estudiar cuales son los posibles comportamientos asintóticos de los cuerpos al aproximarse a una colisión triple.

Teorema 1.2 (Sundman, 1912 [Su3]). *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para toda solución $x(t)$ del problema de tres cuerpos cuyo momento angular c verifique $|\,c\,| > \delta$, se cumple que en todo instante t al menos dos de los tres cuerpos se encuentran a distancia mayor que ε.*

Corolario 1.2.1. *Una solución maximal del problema de tres cuerpos termina en una colisión triple sólo si su momento angular es nulo.*

El teorema de Sundman no impide que se produzca una colisión entre dos cuerpos. De hecho es muy fácil construir soluciones con momento angular nulo y colisiones binarias. Esto ocurre por ejemplo al imponer que dos cuerpos de masas iguales ocupen posiciones simétricas respecto a una recta del plano y obligamos a la tercer a desplazarse sobre la recta.

Esto no representa una gran dificultad para la prolongación analítica de las soluciones porque las colisiones dobles son *regularizables.* Esto quiere decir que es posible definir una continuación analítica en un entorno del instante en el que se producen. Este procedimiento se extiende al problema con más de tres cuerpos, y al cambio de coordenadas espaciales y temporales que elimina la colisión doble se lo denomina *regularización de Levi-Civita* [L-C].

El teorema de Sundman permite extender analíticamente una solución del problema de tres cuerpos con momento angular no nulo a una banda del plano complejo $\{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |\operatorname{Im} z\,| < r \,\}$, y lograr una expresión de la misma como una serie de potencias de $\phi(t) = t^{2/3}$. Sin embargo el resultado no permitió avanzar en el estudio de la dinámica del problema de n cuerpos. La principal razón es la lentitud con la que converge la serie: la cantidad mínima de términos a sumar para lograr una precisión que permita alguna utilidad es un número con millones de cifras...

Resultados previos de Sundman sobre el análisis de las colisiones en el problema de tres cuerpos, publicados en [Su1] y [Su2], establecían que al producirse una colisión, necesariamente los cocientes de las distancias entre los cuerpos tienden a valores constantes, que *solamente dependen de las masas* de los cuerpos. Es decir, si bien la configuración es cada vez más pequeña al aproximarse el tiempo al instante de colisión, su forma tiende a una forma límimte. En una colisión triple se tiene que las únicas cuatro formas límite posibles son: o bien *un triángulo equilátero*, o bien *una de las tres configuraciones colineales* definidas por Euler en [Eu]. También probó que las tres distancias mutuas entre los cuerpos que colisionan en un instante final $b < +\infty$ son infinitésimos equivalentes a múltimplos de $|\,t - b\,|^{2/3}$. Todas estas estimaciones asintóticas fueron generalizadas por *Jean Chazy* para una cantidad arbitraria de cuerpos, tanto para las colisiones totales como para movimientos *completamente parabólicos*, que definimos más adelante, y en las cuales todos los cuerpos se alejan mutuamente. El mismo tipo de estimaciones asintóticas para colisiones parciales fueron establecidas en 1970 por Sperling [Spe].

Figuras límite de soluciones

Toda configuración $x \in E^n$ no nula, es decir distinta a la configuración de colisión total en el origen, admite una *descomposición polar* única respecto a la norma inducida por el producto interno de las masas:

$$x \neq 0 \qquad \longrightarrow \qquad x \,=\, \rho\,\theta \;,$$

donde ρ es un real positivo, y θ una configuración en la esfera unidad

$$\mathrm{S} = \left\{ \, x \in E^n \;\mid\; \langle\, x \,,\, x\,\rangle = |\, x\,|^2 = 1 \, \right\} \,.$$

Es decir, $x = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathrm{S}$ si y sólo si

$$I(x) = \langle\, x \,,\, x\,\rangle = m_1 \;\|\, r_1\,\|^2 + \cdots + m_n \;\|\, r_n\,\|^2 = 1 \,.$$

Las coordenadas polares de una configuración $x \neq 0$ son entonces

$$\rho = |\, x\,| = I(x)^{1/2} \quad \text{y} \quad \theta = |\, x\,|^{-1}\; x = I(x)^{-1/2}\, x \;. \tag{1.7}$$

Definición (configuración normal). *Diremos que una configuración $x \in E^n$ es una configuración normal si $|\, x\,| = 1$ es decir, si $I(x) = 1$. Dada una configuración $x \neq 0$, su configuración normalizada es la única configuración normal $\theta \in \mathrm{S}$ que es un múltiplo positivo de x.*

Toda solución $x(t)$ del problema de n cuerpos se descompone entonces como el producto de una función real positiva $\rho(t)$ por una curva $\theta(t)$ de configuraciones contenidas en la esfera S. Si la solución $x(t)$ está dada, es usual escribir $I(t) = I(x(t))$, lo cual equivale a escribir $I(t) = \rho(t)^2$. Se tiene $I(\theta(t)) = 1$ para todo t en el dominio de la solución.

Definición (figura límite). *Una curva $x = (r_1, \ldots, r_n) : (a,b) \to \Omega$ tiene una figura límite cuando $t \to b$ si, para cualquier elección de $i < j$ y de $k < l$, existe el límite*

$$\lim_{t\to b}\, \frac{r_{ij}(t)}{r_{kl}(t)} = \lim_{t\to b}\, \frac{\|\, r_i(t) - r_j(t)\,\|}{\|\, r_k(t) - r_l(t)\,\|} = \alpha_{ijkl}$$

Consideremos ahora una curva $x : (a,b) \to \Omega$ cuya descomposición polar es $x = \rho\,\theta$, es decir, dada por una función continua $\rho : (a,b) \to (0,+\infty)$ y una curva $\theta : (a,b) \to \mathrm{S}$. Es claro que si $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ entonces para todo $t \in (a,b)$ y para cualquier elección de $i < j$ y de $k < l$ se tiene

$$\frac{r_{ij}(t)}{r_{kl}(t)} = \frac{\theta_{ij}(t)}{\theta_{kl}(t)}$$

Se concluye que si los cocientes de la izquierda convergen a constantes α_{ijkl} para $t \to b$, lo mismo ocurre con los cocientes de la derecha. Por otra parte, teniendo en cuenta que la esfera $\mathrm{S} \subset E^n$ es compacta, podemos concluir que existe algún punto de acumulación $z = \lim \theta(t_m) \in \mathrm{S}$ donde $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en (a, b) con $\lim t_m = b$. Si $z = (z_1, \ldots, z_n)$ resulta entonces de la continuidad de las distancias, y también del hecho que las distancias mutuas entre los cuerpos de una configuración en S están uniformemente acotadas, que

$$\alpha_{ijkl} \;=\; \lim_{m\to\infty} \frac{\theta_{ij}(t_m)}{\theta_{kl}(t_m)} \;=\; \frac{z_{ij}}{z_{kl}}$$

para todos los posible pares de índices diferentes. En otras palabras, las proporciones de la configuración z son exactamente los límites cuando $t \to b$ de las proporciones de la configuración $x(t)$. Conviene observar también que todas las proporciones son estrictamente positivas, ya que se tiene $\alpha_{ijkl} = (\alpha_{klij})^{-1}$. La configuración límite z no tiene colisiones.

Para entender mejor el significado de la definición, recordamos primero lo siguiente: si $x = (r_1, \ldots, r_n)$ y $y = (s_1, \ldots, s_n)$ son dos configuraciones tales que las distancias mutuas r_{ij} son propoprcionales a las distancias correpondientes s_{ij}, entonces las configuraciones son semejantes. Esto se deduce del siguiente lema, cuya prueba es un ejercicio de álgebra lineal.

Lema. *Sean $x = (r_1, \ldots, r_n)$, $y = (s_1, \ldots, s_n) \in E^n$ tales que $r_{ij} = s_{ij}$ para todo $i < j$. Entonces existe $g \in O(E)$ y un vector $u \in E$, tales que $x = g \cdot y + \delta(u)$, es decir $r_i = g(s_i) + u$ para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Observamos que el lema nada tiene que ver con las masas que pueden tener asignadas los cuerpos, es decir se trata de una propiedad puramente geométrica. Sin embargo, por las propiedade elementales que cumple el centro de masas, podemos deducir del lema que, fijadas arbitreriamente las masas de los cuerpos, si las configuraciones x e y son configuraciones con centro de masas en el origen entonces necesariamente $u = 0$, es decir $x = g \cdot y$ para alguna transformación ortogonal $g \in O(E)$.

Este lema admite la generalización siguiente: si las distancias mutuas correspondientes de dos configuraciones son sufucientemente próximas, es posible probar que las configuraciones son *casi isométricas*, lo cual lo expresamos como sigue.

Lema. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que: si $x, y \in \Omega_0$ son dos configuraciones centradas,digamos $x = (r_1, \dots, r_n)$, $y = (s_1, \dots, s_n)$, que verifican*

$$|\, r_{ij} - s_{ij} \,| < \delta$$

para todo $i < j$, entonces existe $g \in O(E)$ tal que $\|\, r_i - g(s_i) \,\| < \varepsilon$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Cuando las distancias correspondientes de las configuraciones difieren muy poco, es posible elegir la transformación ortogonal g de modo que la distancia medida con el producto interno de las masas entre x y $g \cdot y$ sea lo menor posible: $O(E) \subset GL(E)$ es un grupo compacto, y por lo tanto, la órbita de cada configuración por la acción de este grupo

$$O(E) \cdot y = \{\, g \cdot y \;\mid\; g \in O(E) \,\}$$

es una subvariedad compacta. Si x pertenece a un entorno tubular de esta órbita, la distancia a la órbita se realiza por una transformación ortogonal $g \in O(E)$, la cual es única módulo un elemento del *subgrupo estabilizador* o *de isotropía* de la configuración z

$$St(z) = \{\, g \in O(E) \;\mid\; g \cdot z = z \,\}$$

Con estos razonamientos es posible demostrar lo siguiente:

Proposición 1.11. *Una curva diferenciable $x : (a, b) \to \Omega_0$ admite figura límite para $t \to b$ si y sólo si, existe una configuración normal $z \in \mathrm{S}_0 = \mathrm{S} \cap \Omega_0$ y una curva diferenciable $g : (a, b) \to O(E)$ tales que*

$$x(t) = \rho(t) \left(g(t) \cdot z \,+\, \varepsilon(t) \right)$$

donde $\rho(t) = |\, x(t) \,|$ y la configuración $\varepsilon(t)$ verifica

$$\lim_{t \to b} \varepsilon(t) = 0$$

Observaciones: Que la condición es suficiente es inmediato. Por otra parte, si la condición es satisfecha, los lemas anteriores implican que la configuración z es única módulo $O(E)$.

Si x es una solución del problema de n cuerpos definida en un intervalo (a, b), nos interesará saber si la misma tiene forma límite para $t \to b$

solamente en dos situaciones: cuando b es una singularidad, o cuando $b = +\infty$. En los demás casos es claro que la solución se prolonga a la derecha de $t = b$ y por lo tanto la figura límite será dada por la configuración $x(b)$ de cualquier extensión.

Haremos uso del siguiente teorema, que es fundamental para el estudio de las singularidades del problema de n cuerpos. Afirma esencialmente que en una pseudocolisión al menos uno de los cuerpos debe tener una trayectoria no acotada en cualquier entorno del instante singular.

Teorema 1.3 (von Zeipel, 1908 [Zei, McG])**.** *Si $x : (a, b) \to \Omega_0$ es una solución del problema de n cuerpos que presenta una singularidad en el instante final $t = b < +\infty$ y $\rho(t) = |\, x(t) \,|$ es una función acotada, entonces la singularidad es una colisión.*

Un aspecto histórico importante de destacar es que von Zeipel, publicó su nota en una revista de escasa difusión. Posteriormente Chazy anunció el teorema, con una prueba que resultó estar equivocada. En consecuencia, muchos artículos posteriores se mencionaba el trabajo de von Zeipel como equivocado, y se mantuvo la incertidumbre sobre su veracidad hasta que *Richard McGehee*, logró obtener una copia del artículo de 1908 y constatar que la prueba era correcta.

Corolario 1.3.1. *Las pseudocolisiones no tienen figura límite.*

Demostración. Sea $x : (a, b) \to \Omega_0$ una solución con figura límite cuando $t \to b$. Aplicamos la proposición 1.11 y obtenemos que existen, una configuración normal $z \in \mathrm{S}_0$ y una curva $g : (a, b) \to O(E)$ tal que

$$x(t) = \rho(t) \left(g(t) \cdot z + \varepsilon(t) \right)$$

para todo $t \in (a, b)$ y donde $\varepsilon(t) \to 0$. Conscuentemente,

$$U(t) = U(x(t)) = \rho(t)^{-1}\, U(\, g(t) \cdot z + \varepsilon(t)\,)\,.$$

Dado que la órbita $O(E) \cdot z \subset \Omega_0$ es compacta, admite un entorno contenido en Ω_0 en el cual el potencial newtoniano es uniformemente continuo. Teniendo en cuenta además la invariancia de U por la acción del grupo ortogonal, deducimos que existe el límite

$$\lim_{t \to b} \rho(t)\, U(t) = U(z) > 0\,.$$

Supongamos ahora que la singularidad es una pseudocolisión. El teorema de von Zeipel nos permite afirmar que $\rho(t)$ no está acotado en ningún entorno de b. Podemos entonces elegir una sucesión de instantes $(t_k)_{k>0}$ con $t_k \to b$, tal que $\lim \rho(t_k) = +\infty$. Pero entonces $\lim U(t_k) = 0$. Teniendo en cuenta la conservación de la energía $h = T - U$ también podemos asgurar que $\lim T(t_k) = h$.

Vamos a ver ahora que la información que dedujimos contradice el hecho que b sea una singularidad. En primer lugar, tenemos que existe $A > 0$ tal que $\| \dot{r}_i(t_k) \| \leq A$ para todo $k > 0$ y para todo $i = 1, \ldots, n$. En segundo lugar, existe $R > 0$ tal que $r_{ij}(t_k) > R$ para todo $i < j$ y para todo $k > 0$. De hecho podemos elegir R arbitrariamente grande tomando $k > k_0$ para algún $k_0 > 0$, aunque esto no será necesario. Sea r un tercio de R, y para cada $k > 0$ definimos el conjunto de configuraciones

$$\Sigma_k = \{ \, y = (s_1, \ldots, s_n) \in \Omega_0 \mid \| \, r_i - s_i \, \| \leq r \text{ para todo } i = 1, \ldots, n \, \}$$

Es fácil constatar que en toda configuración $y \in \Sigma_k$ las distancias entre los cuerpos son menores que r. Finalmente, de esto último se deduce una cota uniforme para las fuerzas en estas configuraciones del tipo $\| \, F_i(y) \, \| < B$, para cierta constante $B > 0$, y cualquiera sea la elección de $i = 1, \ldots, n$, $y \in \Sigma_k$, y $k > 0$. Con todas estas acotaciones, se logra probar que existe $\alpha > 0$ para el cual, para cada $k > 0$ existe una solución y_k definida en el intervalo $(t_k - \alpha, t_k + \alpha)$ que verifica $y_k(t_k) = x(t_k)$ y $\dot{y}_k(t_k) = \dot{x}(t_k)$. Esto no es posible si $\alpha > b - t_k$. $\square$

Como dijimos antes, otra pregunta natural es la de saber si una órbita definida para todo $t > 0$ tiene una figura límite cuando $t \to +\infty$. La clasificación de las posibles evoluciones finales de una órbita, fue iniciada por Chazy [Cha2], y el tema tuvo luego un auge importante a partir de los trabajos de *Harry Pollard* y *Donald Saari* de fines de los años 60 [Pol, Saa, MaS]. Durante mucho tiempo existió la idea de que al igual que en el problema de dos cuerpos, en una solución definida para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$ el comportamiento para $t \to -\infty$ debía ser del mismo tipo que para $t \to +\infty$, lo cual hoy sabemos que es falso. De la clasificación dada por Chazy, surgía la posibilidad de existencia de comportamientos complejos, en los que no hay figuras límite, como son los movimientos *oscilatorios* o *superhiperbólicos* . Una prueba de la existencia de estas soluciones puede encontrarse en el artículo de Saari y Xia [SaX]. Un categoría especial de soluciones definidas para todo el futuro son los llamados *movimientos completamente parabólicos*, movimientos de energía nula en los que todas las distancias mutuas tienden a infinito.

Definición (movimiento completamente parabólico). *Se dice que una solución $x(t)$ del problema de n cuerpos definda para todo $t > 0$ es* completamente parabólica *cuando*

$$\lim_{t \to +\infty} \dot{x}(t) = 0$$

Definición (movimiento de colisión total). *En una solución $x(t)$ del problema de n cuerpos, definda en un intervalo (a, b), se produce una* colisión total *en $t = b$ cuando todas las distancias mutuas verifican*

$$\lim_{t \to b} r_{ij}(t) = 0$$

lo cual equivale, si la solución es centrada, a que $I(t) \to 0$.

En un movimiento completamente parabólico las distancias tienden a infinito y más aún, el orden de crecimiento está dado por la equivalencia $r_{ij}(t) \sim k_{ij}\, t^{2/3}$ para ciertos valores $k_{ij} > 0$. En una colisión total, las distancias mutuas satisfacen $r_{ij}(t) \sim k_{ij}\, |\, t - b\,|^{2/3}$. Uno de los primeros resultados en el que se establece la existencia de figuras límite para problemas de más de tres cuerpos aparece en el artículo de Chazy de 1918 [Cha1]. Su razonamiento se aplica tanto a las colisiones totales, es decir en los cuales $I(t) \to 0$, como a los movimientos completamente parabólicos. Recomendamos al lector la lectura del artículo de Alain Chenciner [Che] en el cual se estudian los dos tipos de movimientos, y en particular se prueba el siguiente teorema.

Teorema 1.4 (Chazy, 1918 [Cha1])**.** *Sea $x : (a, b) \to \Omega_0$ es una solución del problema de n cuerpos tal que, $I(t) \to 0$ cuando $t \to b$ en el caso en que $b < +\infty$, o es completamente parabólico cuando $t \to +\infty$. Si definimos $\theta(t) = I(t)^{-1/2} x(t) \in \mathrm{S}_0$ entonces*

$$\lim_{t \to b} \operatorname{dist}(\theta(t), K) = 0$$

donde $K = \mathrm{C} \cap \mathrm{S}$, y $\mathrm{C} \subset \Omega$ es el conjunto de puntos críticos de la función homogénea de grado cero $I^{1/2} U$.

El conjunto C es el conjunto de las *configuraciones centrales* , de las que nos ocuparemos extensamente en la sección siguiente. Es fácil de ver que el concunto de configuraciones centrales es invariante por la acción del grupo ortogonal. El siguiente corolario del teorema de Chazy se aplica en los problemas de n cuerpos en los cuales sólo hay un número finito de configuraciones centrales módulo semejanzas.

Corolario 1.4.1. *Si $K \subset \mathrm{S}$ es un conjunto finito de órbitas de la acción del grupo ortogonal $O(E)$, entonces toda colisión total y todo movimiento completamente parabólico tiene figura límite.*

Demostración. Por hipótesis existe un conjunto finito $\{ z_1, \ldots, z_k \} \subset \mathrm{S}$ de configuraciones no isométricas tal que

$$K = \bigcup_{j=1}^{k} O(E) \cdot z_j$$

y siendo estas órbitas compactas y disjuntas, para cierto $\delta > 0$ sus entornos radio δ son disjuntos. Si $x(t) = \rho(t)\,\theta(t)$, es la decomposición polar de la solución, el teorema 1.4 dice que para algún $t_0 \in (a, b)$ se tiene que $\theta(t)$ pertenece a uno sólo de estos entornos para todo $t \in (t_0, b)$. En otras palabras, para alguna configuración $z \in K$ podemos escribir $\theta(t) = g(t) \cdot z + \varepsilon(t)$ de forma tal que $\mathrm{dist}(\theta(t), K) = |\,\varepsilon(t)\,|$ para todo $t \in (t_0, b)$, y por lo tanto $\varepsilon(t) \to 0$ cuando $t \to b$. La existencia de una figura límite es entonces una consecuencia de la proposición 1.11. $\square$

Problema del spin de una solución con figura límite

La pregunta natural que surge cuando hay una figura límite, es si las posiciones tienen una dirección asintótica. A priori, independientemente de que la configuración se torne cada vez más semejante a una figura límite, la misma podría informalmente hablando *dar infinitas vueltas* al tiempo que varía su tamaño. Formalmente lo expresaremos como sigue

Definición (spin finito). *Sea $x : (a, b) \to \Omega_0$ una solución centrada del problema de n cuerpos con figura límite cuando $t \to b$. Si*

$$x(t) = \rho(t)(g(t) \cdot z + \varepsilon(t))$$

decimos que la solución tiene spin finito *cuando existe el límite*

$$\lim_{t \to b} g(t) = g^* \in O(E)$$

Bajo ciertas hipótesis que veremos más adelante, Chazy prueba en [Cha1] que en los movimientos completamente parabólicos y en las colisiones totales el spin es finito. Su prueba está basada en una extensión de un teorema de Poincaré [Po2] sobre ecuaciones diferenciales lineales en las cuales los coeficientes tienden a valores constantes cuando $t \to +\infty$. Estas condiciones se verifican siempre en el caso del problema de tres cuerpos. Por otra parte, hoy sabemos que en el problema espacial de cinco cuerpos, es posible elegir los valores de las masas para que estas hipótesis no se verifiquen. Según mi conocimiento sobre el tema, hasta el presente no se sabe si existen o no soluciones con spin infinito.

1.6. Configuraciones centrales

Originalmente definidas como las posibles figuras límite de movimientos de colisión total, veremos que una definición equivalente es la siguiente: son las configuraciones que admiten movimientos homotéticos.

Definición (movimientos homotéticos). *Un movimiento homotético es una solución $x : (a, b) \to \Omega$ del problema de n cuerpos de la forma*

$$x(t) = \varphi(t)\, z_0$$

donde $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^+$ es una función diferenciable, y $z_0 \in \Omega$.

Veamos algunas características obvias de estos movimientos.

Proposición 1.12. *Sea $x = \varphi\, z_0$ un movimiento homotético definido en un intervalo (a, b). Se cumple entonces que:*

1. *el momento angular de la solución es nulo.*
2. *la configuración z_0 es centrada en el origen, es decir $z_0 \in \Omega_0$*

Demostración. La primera de las afirmaciones no hace uso del hecho que $x(t)$ sea una solución. Para toda curva de la forma $x = \varphi\, z_0$ se tiene que $\dot{x} = \dot{\varphi}\, z_0$, y por lo tanto, si $z_0 = (a_1, \ldots, a_n) \in E^n$ se tiene que

$$c(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(t)\, \dot{\varphi}(t)\, m_i \left(a_i \wedge a_i \right) = 0$$

para todo $t \in (a,b)$. Las segunda es una consecuencia de la conservación del momento lineal ya que para cada $t \in (a,b)$, el centro de masas de la configuración $x(t)$ es $G(t) = \varphi(t)\, G(z_0)$. El momento lineal es

$$p \;=\; M\,\dot{G} \;=\; \dot{\varphi}(t)\, G(z_0).$$

donde M es la masa total. Si fuese $G(z_0) \neq 0$, tendríamos que $\ddot{\varphi} = 0$ y consecuentemente $\ddot{x} = \ddot{\varphi}\, z_0 = 0$. Esto no es posible porque la ecuación de Newton se escribe $\ddot{x} = \nabla U(x) = \varphi^{-2}\nabla U(z_0)$ y el potencial newtoniano no tiene puntos críticos. $\square$

Definición (configuración central). *Decimos que una configuración centrada en el origen $z \in \Omega_0$ es central si existe $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^+$ dos veces derivable tal que $x(t) = \varphi(t)\, z$ define una solución del problema de n cuerpos en el intervalo (a,b). Llamamos* C *al conjunto de todas las configuraciones centrales.*

Veremos ahora las configuraciones centrales pueden defnirse de muchas formas equivalentes. Según el contexto utilizaremos la caracterización más conveniente. Recordamos primero un teorema debido a Euler.

Lema (teorema de Euler sobre funciones homogéneas). *Sea V un espacio vectorial real. Si $f : V \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y homogénea de grado α es decir, que verifica $f(t\,v) = t^{\alpha}\, f(v)$ para todo $v \in V$ y para todo $t > 0$, entonces para todo vector $v \in V$ se tiene que*

$$d_v f(v) = \alpha\, f(v)\,.$$

En particular, si V es un espacio con producto interno, para todo vector $v \in V$ el teorema de Euler asegura que $\langle\, v\,,\, \nabla f(v)\,\rangle = \alpha\, f(v)$.

Demostración. Sea $v \in V$. Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} d_v f(v) &= \frac{\partial f}{\partial v}(v) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,(\, f(v+hv) - f(v)\,) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,(\,(1+h)^{\alpha}\, f(v) - f(v)\,) \\ &= f(v)\,.\, \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,(\,(1+h)^{\alpha} - 1\,) \\ &= f(v)\,.\,(t^{\alpha})'(1) \;=\; \alpha\, f(v). \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 1.5. *Sea $z \in \Omega_0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *z es una configuración central.*
2. *Existe $\lambda > 0$ tal que $\nabla U(z) = -\lambda \nabla I(z)$.*
3. *Si $\rho = I(z)$, la configuración z es un punto crítico de la restricción de U a la esfera $\mathrm{S}_\rho = \{ x \in E^n \mid I(x) = \rho \}$.*
4. *existe un único $\mu > 0$ tal que μz es punto crítico de $U + I$.*
5. *z es un punto crítico de la función $I^{1/2} U$.*

Demostración. Veremos en primer lugar la equivalencia entre las dos primeras afirmaciones.

Asumiendo que z es una configuración central tenemos que existe una solución homotética de la forma $x(t) = \varphi(t)\, z$, donde $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^+$ es una función derivable al menos dos veces. Si escribimos entonces la ecuación de Newton resulta que para todo $t \in (a,b)$ se verifica

$$\ddot{x}(t) = \nabla U(x(t)) = U(\varphi(t)\, z) = \varphi(t)^{-2}\, \nabla U(z)\,.$$

Por otra parte, para todo $z \in E^n$ se tiene que $\nabla I(z) = 2\, z$, y por lo tanto también tenemos

$$\ddot{x}(t) = \ddot{\varphi}(t)\, z = 2\, \ddot{\varphi}(t)\, \nabla I(z)\,.$$

Dado que $\nabla U(z)$ y $\nabla I(z)$ no se anulan en Ω, concluimos que ambos son colineales, o sea existe $\lambda \neq 0$ tal que $\nabla U(z) + \lambda \nabla I(z) = 0$. Para obtener la segunda afirmación, resta probar que λ es positivo. Esto se consigue aplicando el teorema de Euler para las funciones homogéneas. Si multiplicamos con el producto interno de las masas por z ambos miembros de la última igualdad resulta que

$$0 = \langle\, z\,,\, \nabla U(z)\,\rangle + \lambda\, \langle\, z\,,\, \nabla I(z)\,\rangle = -U(z) + 2\lambda\, I(z)$$

y por lo tanto $2\lambda = U(z)\, I(z)^{-1} > 0$.

Supongamos ahora que $z \in \Omega_0$ es tal que para cierto valor de $\lambda > 0$ se tiene $\nabla U(z) + \lambda \nabla I(z) = 0$. Debemos hallar una función $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^+$ tal que $x = \varphi\, z$ verifique las ecuaciones de Newton, es decir tal que

$$\ddot{\varphi}\, z = \nabla U(\varphi\, z) = \varphi^{-2}\, \nabla U(z)\,.$$

Teniendo en cuenta que $\nabla U(z) = -\lambda\,\nabla I(z) = -2\lambda\,z$, el problema se reduce a encontrar una solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\lambda}{\varphi^2} \tag{1.8}$$

que no es otra que la ecuación de Kepler reducida en la recta, ecuación (1.3), es decir la ecuación de Newton coorepondiente al problema de una fuerza central conservativa en $\mathbb{R}^+$ cuyo potencial es la función

$$U_\kappa(\varphi) \,=\, \frac{2\lambda}{\varphi}\,.$$

Se concluye aplicando el teorema de existencia y unicidad de soluciones, que garantiza que elegidos arbitrariamente $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi_0 > 0$ y $\dot{\varphi}_0$ existe $\epsilon > 0$ tal que en el intervalo $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ hay una única solución de la ecuación (1.8) que satisface $\varphi(t_0) = \varphi_0$ y $\dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_0$. Esto concluye la equivalencia entre las dos primeras afirmaciones.

La tercera afirmación es claramente equivalente a la segunda. El espacio tangente en z a la esfera S_ρ es exactamente

$$T_z\mathrm{S}_\rho = \nabla I(z)^\perp$$

y por lo tanto, z resulta ser un punto crítico de la restricción del potencial newtoniano a la esfera S_ρ si y sólo si

$$d_zU(v) = \langle\, z\,,\, \nabla U(z)\,\rangle = 0$$

para todo $v \in \nabla I(z)^\perp$, lo cual equivale a que los vectores no nulos $\nabla U(z)$ y $\nabla I(z)$ sean colineales. El teorema de Euler permite, al igual que antes, que estos vectores tienen sentido opuesto. Las tres primeras afirmaciones son entonces equivalentes.

La equivalencia de la cuarta afirmación es una simple consecuencia de la homogeneidad del potencial newtoniano y del momento de inercia respecto al origen. Si z es una configuración central, entonces sabemos que existe $\lambda > 0$ tal que $\nabla U(z) + \lambda\,\nabla I(z) = 0$. Si $\mu > 0$ podemos entonces escribir

$$\begin{aligned} \nabla(U+I)(\mu z) &= \nabla U(\mu z) + \nabla I(\mu z) = \mu^{-2}\,\nabla U(z) + \mu\,\nabla I(z) \\ &= \mu^{-2}\,\big(\nabla U(z) + \mu^3\,\nabla I(z)\big) \end{aligned}$$

Concluímos que μz es punto crítico de la función $U + I$ si y sólo si $\mu = \lambda^{1/3}$. El cálculo precedente muestra también que si μz es punto crítico de $U + I$ entonces z es una configuración central.

Para finalizar la prueba del teorema analizamos la equivalencia de la última afirmación con las anteriores.

Observamos que de la regla de Leibnitz para la derivada de un producto se tiene que

$$\nabla(I^{1/2}U) = I^{1/2}\nabla U + \frac{1}{2}\, I^{-1/2}U\,\nabla I$$

y por lo tanto los puntos críticos de la función $I^{1/2}U$ son exactamente los puntos en los cuales ∇U y ∇I son colineales. $\square$

Los siguientes corolarios son inmediatos.

Corolario 1.5.1. *Si* $\mathrm{C} \subset \Omega_0$ *es el conjunto de configuraciones centrales, entonces* $z \in \mathrm{C}$ *si y solo si* $\mu\, z \in \mathrm{C}$ *para todo* $\mu \neq 0$*.*

Corolario 1.5.2. *Si* $z \in \Omega_0$ *es una configuración central entonces los movimientos homotéticos de la forma* $x = \varphi\, z$ *son exactamente los que se obtienen tomando* φ *solución de la ecuación de Kepler en la recta*

$$\ddot{\varphi} = -\left(\frac{U(z)}{I(z)}\right)\frac{1}{\varphi^2}\,.$$

Bibliografía

[Alb] A. ALBOUY, Lectures on the two-body problem, in *Classical and Celestial Mechanics: The Recife Lectures*, edited by H.Cabral and F.Diacu, *Princeton University Press*, Princeton (2002).

[ACS] A. ALBOUY, H. CABRAL AND A. SANTOS, Some problems on the classical n-body problem, *Celestial Mech. Dynam. Astronomy* **113** (2012), 369–375.

[AK] A. ALBOUY AND V. KALOSHIN, Finiteness of central configurations of five bodies in the plane, *Ann. of Math. (2)* **176** (2012), 535–588.

[Cha1] J. CHAZY, Sur certaines trajectoires du problème des n corps, *Bulletin astronomique* **35** (1918), 321–389.

[Cha2] J. CHAZY, Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfinement, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **39** (1922), 29–130

[Che] A. CHENCINER Collisions totales, mouvements complètement paraboliques et réduction des homothéties dans le problème des n corps, *Regul. Chaotic Dyn.* **3** (1998), 93–106.

[ChM] A. CHENCINER AND R. MONTGOMERY, A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses, *Ann. Math. (2)* **152** (2000), 881–901.

[Eu] L. EULER, De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium, *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* **11** (1765), 144–151 (leído en San Petersburgo en ddiciembre de 1763). También en *Opera Omnia S.2*, vol. 25, 281–289.

[FaN] E. Fadell and L. Neuwirth, Configuration spaces, *Math. Scandinavica* **10** (1962), 111–118.

[FT] D. Ferrario and S. Terracini On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n-body problem, *Invent. math.* **155** (2004), 305–362.

[La] J.L. Lagrange, Essai sur le problème des trois corps, (1772), en *Oeuvres, vol. 6.*

[L-C] T. Levi-Civita, Sur la régularisation du problème des trois corps, *Acta Mathematica* **42** (1020), 99–144.

[McG] R. McGehee, Von Zeipel's theorem on singularities in celestial mechanics, *Expos. Math.* **4** (1986), 335–345.

[Mar] C. Marchal, How the method of minimization of action avoids singularities, *Celestial Mech. Dynam. Astronomy* **83** (2002), 325–353.

[MaS] C. Marchal and D. Saari, On the final evolution of the n-body problem, *J. Differential Equations* **20** n.1 (1976), 150–186.

[MHO] K.R. Meyer, G.R. Hall and D. Offin, second edition of Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem, *Applied Mathematical Sciences* n.90, Springer (2009).

[Moe1] R. Moeckel, On central configurations, *Mathematische Zeitschrift* **205** n.4 (1990), 499–518.

[MoZ] J. Moser and E. Zehnder, Notes on Dynamical Systems, *AMS Courant Lecture Notes* n.12 (2005).

[Mou] F.R. Moulton, The straight line solutions of the problem of n bodies, *Ann. of Math. (2)* **12** n.1 (1910), 1–17.

[Pve] P. Painlevé, Leçons sur la Théorie Analytique des Equations Différentielles, *A. Hermann*, Paris, 1897.

[Po1] H. Poincaré Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action, *Comptes Rendues de l'Académie des Sciences*, T. CXXIII, n. 22 (1986), 915–918.

[Po2] H. Poincaré *Amer. J. math.* T. VII, p.203 y siguientes.

[Pol] H. Pollard, The behavior of gravitational systems, *J. Math. Mech.* **17** (1967), 601–611.

[Saa] D. Saari Expanding gravitational systems, *Trans. Amer. Math. Soc.* **156** (1971), 219–240.

[SaX] D. Saari and Z. Xia The existence of oscillatory and superhyperbolic motion in Newtonian systems, *J. Differential Equations* **82** (1989), 342–355.

[Shu] M. Shub, Diagonals and relative equilibria, Appendix to Smale's paper, in Manifolds-Amsterdam, *Springer Lecture Notes in Math.* **197** (1970), 199–201.

[SiM] C.L. Siegel and J.K. Moser, Lectures on Celestial Mechanics, *Classics in Mathematics, Springer* (1995).

[Spe] H.J. Sperling, On the real singularities of the N-body problem, *J. Reine Angew. Math.* **245** (1970), 15–40.

[Spi] M. Spivak, Calculus on manifolds, a modern aproach to classical theorems of advanced calculus, *Addison-Wesley*, Massachusetts, (1965).

[Su1] K. Sundman, Recherches sur le problème des trois corps, *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, **34** n.6 (1907).

[Su2] K. Sundman, Nouvelles recherches sur le problème des trois corps, *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, **35** n.9 (1909).

[Su3] K. Sundman, Mémoire sur le problème des trois corps, *Acta Mathematica*, **36** (1912), 105–179.

[Xi1] Z. Xia, Central configurations with many small masses, *J. Diferential Equations* **91** n.1 (1991), 168–179.

[Xi2] Z. Xia, The Existence of Noncollision Singularities in Newtonian Systems, *Ann. Math. (2)* **135** n.3 (1992), 411–468.

[Zei] H. von Zeipel, Sur les singularités du problème des n corps, *Arkiv für Mat., Astr. och Fysik* **32** (1908), 1–4.

Índice alfabético

Asociación Matemática Venezolana
Presidente: Rafael Sánchez Lamoneda

Consejo Directivo Nacional

Rafael Sánchez Lamoneda
Capítulo Capital

Alexander Carrasco
Capítulo de Centro Occidente

Oswaldo Araujo
Capítulo de Los Andes

Said Kas-Danouche
Capítulo de Oriente

Oswaldo Larreal
Capítulo Zuliano

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela.

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela
http://amv.ivic.gob.ve

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Consejo Directivo

Director
Eloy Sira
Subdirector
Alexander Briceño
Representantes del Ministerio del Poder Popular para la Ciencia, Tecnología e Innovación
Guillermo Barreto
Juan Luis Cabrera
Representante del Ministerio del Poder Popular para la Educación Universitaria
Prudencio Chacón
Representantes Laborales
José Garzaro
Víctor Peña
William Espinoza (Suplente)
Sirvia Ávila (Suplente)
Gerencia General
Lira Parra

Comisión Editorial

Eloy Sira (Coordinador)
Lucía Antillano
Horacio Biord
Jesús Eloy Conde
María Teresa Curcio
Rafael Gassón
Pamela Navarro
Héctor Suárez
Erika Wagner