

XXV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

EMALCA - VENEZUELA 2012

PERTURBACIONES ESTOCÁSTICAS
DE LA ECUACIÓN DE ALLEN–CAHN

Stella Brassesco

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

sbrasses@ivic.gob.ve

MÉRIDA, VENEZUELA, 2 AL 8 DE SEPTIEMBRE DE 2012

XXV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana. La XXV Escuela Venezolana de Matemáticas recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Banco Central de Venezuela, el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CD-CHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) y Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA).

2010 Mathematics Subject Classification: 60H15, 60H20, 60H30, 35R60, 60F10.

©Ediciones IVIC

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Rif G-20004206-0

Perturbaciones estocásticas de la ecuación de Allen–Cahn

Stella Brassesco

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas

Preprensa e impresión: Gráficas Lauki C.A.

Depósito legal If66020125102164

ISBN 978-980-261-138-6

Caracas, Venezuela

2012

Prefacio

La ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u - V'(u),$$

con $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ y V' la derivada de un polinomio de dos pozos, aparece en varios contextos, con nombres diferentes. Se conoce como la ecuación de Chafee–Infante, quienes la estudiaron en un par de artículos en los años 70 ([12] y [13]). También se encuentra en el ámbito de termodinámica como la ecuación escalar de Ginzburg–Landau, y en metalurgia es conocida como la ecuación de Allen–Cahn, después del artículo de estos autores [2], quienes la proponen para modelar formación y evolución de interfaces en aleaciones binarias de metales. En el artículo [15] de A. De Masi, P. Ferrari y J. Lebowicz, se obtiene como límite hidrodinámico de ciertos sistemas de magnetos (“spins”, en inglés) con dinámica estocástica conocidos como procesos de Glauber–Kawasaki. De estos modelos se toma la notación, y en cierta medida el tipo de problemas estudiados en los dos últimos capítulos.

En la clasificación de ecuaciones en derivadas parciales, es una ecuación de reacción difusión, o una ecuación de tipo parabólico con un término de reacción no lineal. Puede ser pensada como un sistema dinámico de tipo gradiente en un espacio de dimensión infinita (un conveniente espacio de funciones), y es uno de los ejemplos más estudiados de este tipo de sistemas, ya que se conoce con detalle su dinámica. Desde este punto de vista es presentada en el libro de D. Henry [29].

Todos los modelos mencionados tienen en común la presencia de dos soluciones estacionarias estables, y varias soluciones estacionarias que presentan direcciones de inestabilidad.

Como la ecuación describe fenómenos físicos en los cuales intervienen

elementos que no se conocen bien y sobre los cuales se hicieron aproximaciones al momento de plantear la ecuación, y que pueden además presentar fluctuaciones inherentes al mismo fenómeno, resulta natural estudiar el comportamiento de las soluciones cuando la ecuación es perturbada por un término aleatorio. Una forma de hacer esto es sumar a la ecuación determinística un término de ruido “pequeño”. Teniendo en cuenta por un lado la simplicidad técnica, y por el otro las buenas propiedades de escalamiento, y la falta de información que se supone, se toma este término como siendo un ruido blanco espacio-tiempo \dot{W} multiplicado por $\sqrt{\varepsilon}$, con $\varepsilon \ll 1$, para obtener la ecuación estocástica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u - V'(u) + \sqrt{\varepsilon}\dot{W}.$$

Una de las primeras referencias sobre ecuaciones estocásticas en derivadas parciales es el artículo de E. Cabaña [8]. Esta teoría se ha desarrollado en varias direcciones desde entonces, y existen diferentes enfoques para plantear la ecuación anterior. En estas notas adoptaremos el punto de vista desarrollado por R. Cairoli y J. Walsh en [9] y en las notas de éste último [37] basadas en un curso que dictó en Caracas en el año 1985 en el marco el Congreso Latinoamericano de Probabilidad y Estadística Matemática. Este desarrollo permite tratar ecuaciones considerablemente más generales que la anterior, pero nos restringiremos al caso particular que nos interesa. Es importante resaltar sin embargo que hay una restricción técnica muy importante si se quiere considerar el ruido blanco: $x \in \mathbb{R}$, y es este el caso que vamos a considerar. No nos referiremos a otros posibles enfoques, pero vale la pena mencionar [14], donde se discuten ejemplos de ecuaciones diferenciales estocásticas que aparecen en diferentes disciplinas.

En el Capítulo 1 se presenta la teoría básica necesaria para poder dar un sentido a una ecuación estocástica como la planteada. Se resuelve el caso lineal, correspondiente a la ecuación del calor con un ruido blanco aditivo tanto en la situación de volumen finito como de volumen infinito, y se muestra continuidad de las soluciones en ambas variables. Finalmente se plantea una ecuación integral equivalente a la ecuación diferencial dada en el sentido propuesto en [37], que se conoce en inglés como solución “mild”.

En el Capítulo 2 se demuestra un teorema de unicidad y existencia para la ecuación integral planteada en el capítulo anterior. El resultado

se debe a C. Döring, que estudia en [16] ecuaciones del tipo planteado con término no lineal polinómico y ruido coloreado para dimensión mayor que uno, motivado por problemas de cuantización estocástica. También establecemos algunas propiedades de la solución como proceso Markoviano en el espacio de funciones continuas.

A continuación nos preguntamos hasta dónde son las soluciones de la ecuación estocástica perturbaciones de las soluciones de la determinística, y cómo afecta el ruido al comportamiento global de las soluciones. Para responder esta pregunta, se estudia en el Capítulo 3 la teoría de grandes desvíos que permite medir en cierta forma qué tan improbable es un conjunto de trayectorias dado en un tiempo finito $T > 0$ para $\varepsilon \rightarrow 0$. Este análisis fue presentado por W. Faris y G. Jona Lasinio en [18], generalizando la teoría correspondiente en el caso de dimensión finita, debida a M. Freidlin y A. Wentzell (ver [23]).

Utilizando los resultados del capítulo anterior, en el Capítulo 4 se estudia el comportamiento de las soluciones en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$. Se considera el pasaje de uno a otro dominio de atracción, y se demuestra que éste tiene lugar cerca de un mínimo en la frontera, y se obtienen estimaciones sobre el tiempo de pasaje. Es importante resaltar que este pasaje es un efecto del ruido. Se muestra también que el proceso exhibe el fenómeno de metaestabilidad, caracterizado por la permanencia en un aparente equilibrio por tiempos muy largos, seguida de una abrupta transición hacia otro estado. En [11], M.Cassandro, A. Galves, E. Olivieri y M. Vares proponen una caracterización matemática de este comportamiento, basada en la estabilidad de las medias temporales en la adecuada escala, y en la convergencia a la distribución exponencial del tiempo de pasaje convenientemente normalizado, que mostraremos se cumple en este modelo.

En el Capítulo 5 se presentan algunos resultados sobre las fluctuaciones de las soluciones que inicialmente están cerca de un frente que interpola entre ± 1 , y que se interpreta como una interface.

Algunos resultados auxiliares de carácter general son presentado en el Apéndice.

Agradecimiento Agradezco a Aurora Stephany por la revisión del texto. Los errores remanentes son, por ende, doblemente mi responsabilidad.

S.B., Altos de Pipe, julio de 2012.

Índice general

Prefacio	III
1. Preliminares	1
1.1. La ecuación determinística	2
1.2. El término de ruido blanco	6
1.3. La ecuación del calor estocástica	10
1.3.1. La solución en \mathbb{R}	11
1.3.2. La solución en el intervalo $[0, L]$	15
1.4. La ecuación no lineal	19
2. Resultados Generales	23
2.1. Unicidad y existencia de la solución	23
2.2. Propiedades de la solución	36
3. Estimaciones de grandes desvíos	43
3.1. Estimaciones de grandes desvíos para el proceso gaussiano	45
3.2. Estimaciones de grandes desvíos para la ecuación de Allen–Cahn estocástica	50
4. Metaestabilidad para la ecuación de Allen–Cahn estocástica	55
4.1. El pasaje entre dominios de atracción.	58
4.2. La magnitud del tiempo de pasaje	66
4.3. Estabilidad de las medias temporales	68
4.4. Distribución límite del tiempo de pasaje	71
5. Fluctuaciones de la interface	75

Bibliografía

86

Índice

87

Capítulo 1

Preliminares

Consideramos la ecuación de Allen–Cahn estocástica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V'(u) + \sqrt{\varepsilon} \dot{W}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.0.1)$$

Por simplicidad en la escritura vamos a suponer en lo que sigue que $V(u) = \frac{u^4}{4} - \frac{u^2}{2}$, que es el más sencillo polinomio simétrico de dos pozos no degenerado en los mínimos.

El primer problema que se presenta es dar un sentido preciso a una ecuación como la anterior, ya que, como veremos, el ruido blanco no es siquiera una función en el sentido usual. Una manera de plantear el problema rigurosamente fue propuesta por Walsh en [37], [36] y [9] en un contexto más general. En nuestro caso puede explicarse informalmente de manera simple: aplicando a ambos lados de la expresión $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -V'(u) + \sqrt{\varepsilon} \dot{W}$, el operador integral $(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1}$, se obtiene una ecuación integral para u . El término $(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1}(\dot{W})$ es un proceso gaussiano centrado que se puede estudiar con técnicas conocidas, y resulta ser en el caso $x \in \mathbb{R}$ ahora sí una función continua en las variables x, t . La ecuación integral resultante se puede tratar entonces en el espacio de las funciones continuas. Demostrando unicidad y existencia de la solución de ésta, se tiene lo que se considera una solución de la ecuación diferencial estocástica correspondiente.

Antes de definir rigurosamente ruido blanco, plantear la ecuación integral y explicar qué se entiende por solución de (1.0.1), revisamos algunas propiedades de las soluciones de la ecuación determinística (esto

es, con $\varepsilon = 0$) en el caso en que $x \in [0, L]$, con condiciones de Dirichlet. La mayoría de las demostraciones se encuentran en [13] y [12]. Algunos resultados más específicos al análisis que se hará posteriormente son de [18]. Ver también [29] y [30].

1.1. La ecuación determinística

Consideremos $u(x, t)$ la solución de la ecuación de Allen–Cahn con $\varepsilon = 0$ para x en el intervalo $[0, L]$, con condiciones de frontera de Dirichlet y dato inicial una función continua φ , i.e., u satisface

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V'(u) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Notación. Sea $C_D^n[0, L]$ el espacio de funciones del intervalo $[0, L]$, continuamente diferenciables n veces, y que satisfacen condiciones de Dirichlet, es decir, toman valor 0 en los extremos 0 y L . $C_D[0, L]$ denotará el espacio de funciones continuas con condiciones de Dirichlet, donde consideramos la norma del supremo: $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, L]} |f(x)|$.

Definimos en $C_D^2[0, L]$ el funcional S por

$$S(f) = \int_0^L \frac{1}{4} f'^2(x) + V(f)(x) dx. \quad (1.1.2)$$

Sea h una función en $C_D^2[0, L]$, y calculemos los incrementos

$$\begin{aligned} S(f+h) - S(f) &= \int_0^L \frac{1}{4} (f+h)'^2 + V((f+h)) - \frac{1}{4} f'^2 - V(f) dx \\ &= \int_0^L h \left(-\frac{f''}{2} + V'(f) \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L h \left(-\frac{h''}{2} + hV''(f) \right) dx + T.O.S. \end{aligned}$$

En la última igualdad, usamos la fórmula de Taylor de segundo orden, el teorema de integración por partes recordando las condiciones de frontera

y denotamos por *T.O.S.* términos que son de orden mayor o igual a tres en $\|h\|$. La anterior ecuación puede escribirse en forma más concisa usando $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar el producto interno en $L^2[0, L]$ (y pensando $C_D^2[0, L] \subset L^2[0, L]$) como

$$S(f + h) - S(f) = \langle h, -\frac{f''}{2} + V'(f) \rangle + \frac{1}{2} \langle h, -\frac{h''}{2} + hV''(f) \rangle + T.O.S.$$

Ejercicio 1.1.1. Escriba explícitamente *T.O.S.*, y diga en qué sentido es $O(\|h\|^3)$.

Vemos entonces que la derivada variacional de S en f , que denotamos por $S'(f)$ es el funcional en $L^2[0, L]$ representado por $-\frac{f''}{2} + V'(f)$, y la segunda derivada en f , que denotamos por $S''(f)$, es la forma cuadrática representada por el operador $-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V''(f)$. Escribiremos sin más

$$S'(f) = -\frac{f''}{2} + V'(f) \quad \text{y} \quad S''(f) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V''(f),$$

recordando que las derivadas a la izquierda son derivadas variacionales, y que las derivadas a la derecha son derivadas de funciones reales en el sentido usual.

La ecuación (1.1.1) puede escribirse de forma más sugestiva como

$$\frac{du}{dt} = -S'(u), \tag{1.1.3}$$

que la presenta como un sistema de tipo gradiente en un espacio de dimensión infinita (el espacio de funciones diferenciables pensado como subespacio de $L^2[0, L]$), y pone en evidencia la analogía entre la ecuación (1.0.1) y las perturbaciones de sistemas dinámicos en \mathbb{R}^n estudiados por Wentzell y Freidlin en [23]. En vista de (1.1.3), nos referiremos al funcional S como el potencial.

Los puntos críticos de la ecuación (1.1.1) son las soluciones m de $S'(m) = 0$, es decir, las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} m''(x) = 2V'(m)(x) \\ m(0) = m(L) = 0. \end{cases}$$

Si pensamos x como tiempo, ésta es la ecuación de movimiento de una partícula clásica de masa 1 en un potencial $-2V$, que en “tiempo” 0 está en 0, y en “tiempo” L vuelve a 0.

El siguiente teorema establece cuales son los puntos críticos de S , y algunas de sus propiedades. En [18] se encuentra una demostración, que reúne resultados dispersos en la literatura, en particular algunos de [12] y [13].

Teorema 1.1.1. *Si $N\pi < L \leq (N + 1)\pi$, entonces*

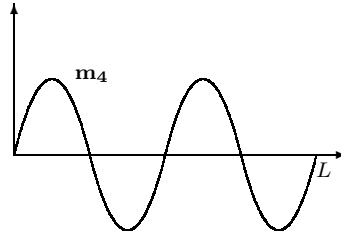
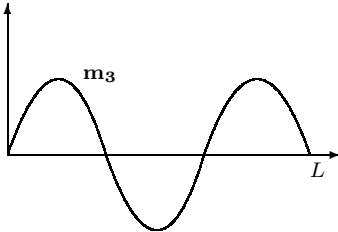
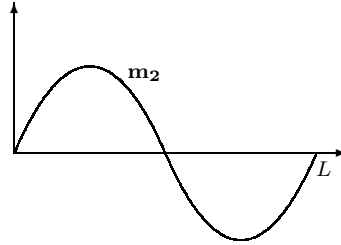
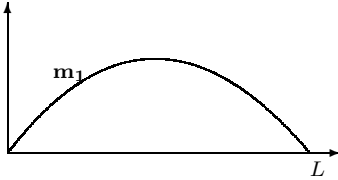
- S tiene precisamente $2N + 1$ puntos críticos, $\pm m_1, \pm m_2, \dots, \pm m_N, 0$.
- Cada m_n tiene n nodos, y se cumple que

$$S(m_1) < S(m_2) < \dots < S(m_N) < 0.$$

En particular, $\pm m_1$ son mínimos absolutos de S , si $L > \pi$.

- $S''(m_n)$ tiene exactamente $n - 1$ autovalores negativos.

En el siguiente dibujo se muestran los puntos críticos m_1, m_2, m_3 y m_4 (suponiendo $L > 4\pi$). Observe que 0 siempre es un punto crítico, y en este caso también $-m_1, -m_2, -m_3$ y $-m_4$, que no están indicados.



El siguiente resultado relaciona la estructura de puntos críticos con la dinámica dada por (1.1.3).

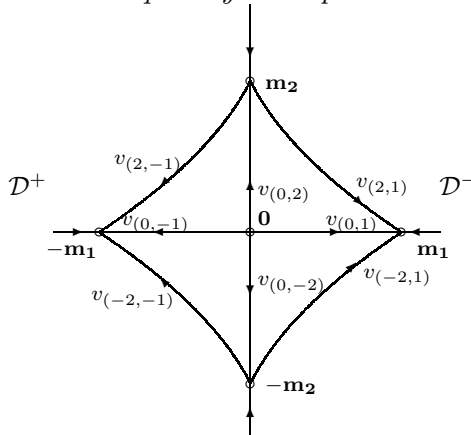
Definición 1.1.1. Sea m un punto crítico de S , y $u(x, t; \varphi)$ la solución de (1.1.1) con dato inicial φ . El dominio de atracción de m es el conjunto

$$\mathcal{D}_m = \{\varphi \in C^0[0, L] : u(\cdot, t; \varphi) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} m \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$$

Denotamos $\mathcal{D}^+ = \mathcal{D}_{m_1}$ y $\mathcal{D}^- = \mathcal{D}_{-m_1}$.

Teorema 1.1.2. *Se cumple que*

- Si $u(x, t)$ es solución de (1.1.1), entonces $u(x, t) \rightarrow m$ en $\|\cdot\|_\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$, para algún punto crítico m .
- Los dominios de atracción \mathcal{D}^\pm son abiertos en $C_D[0, L]$ (con $\|\cdot\|_\infty$), y los demás puntos críticos están en la frontera común entre ambos dominios.
- El funcional S es decreciente sobre el flujo: la función $S(u(\cdot, t))$ es una función decreciente de t .
- Los mínimos m_1 y $-m_1$ son asintóticamente estables en el sentido de Lyapunov en la norma $\|\cdot\|_\infty$: existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|\varphi - m_1\|_\infty < \delta$, entonces $\forall t > 0$ $\|u(\cdot, t; \varphi) - m_1\|_\infty < \varepsilon$, y el mismo resultado vale para $-m_1$.
- Existen órbitas $v_{(a,b)}$ conectando los puntos críticos m con \tilde{m} si $S(m) > S(\tilde{m})$. Se pueden ver en el diagrama siguiente dichas órbitas en el caso en que hay cinco puntos críticos.



El resultado anterior deja clara la dinámica global de las soluciones de (1.1.1): si $u(x, 0) \in \mathcal{D}^+$, entonces $u(x, t)$ permanece en \mathcal{D}^+ , para todo $t > 0$, y es atraída cuando $t \rightarrow \infty$ a m_1 . Análogamente para \mathcal{D}^- . Las configuraciones que son atraídas a otro de los puntos críticos están en la frontera de \mathcal{D}^+ , de manera que los otros puntos críticos no son estables.

1.2. El término de ruido blanco

En esta sección vamos a definir precisamente el ruido blanco \dot{W} , que es el término estocástico en (1.0.1).

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y consideremos el espacio \mathbb{R}^n con la σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, donde está definida la medida de Lebesgue $\lambda^{(n)}$.

Recordamos que una variable aleatoria es una función medible

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

Dados $\mu, \sigma^2 \in \mathbb{R}$, una variable aleatoria X tiene \mathbb{P} -distribución normal o gaussiana con media μ y variancia σ^2 si su densidad f_X es dada por

$$f_X(y) = \frac{e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dy$$

Suele denotarse $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Puede verse que

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \mathbb{E}(e^{i\xi X}) = e^{i\xi\mu - \frac{\xi^2\sigma^2}{2}}$$

Ejercicio 1.2.1. Demuestre la afirmación anterior.

Dados $\mu \in \mathbb{R}^n$ y Σ una matriz $n \times n$ positiva definida, el vector $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ tiene distribución normal n -variada con media μ y función de covariancia Σ cuando, para $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{E}(e^{i\langle \xi, X \rangle}) = e^{i\langle \xi, \mu \rangle - \frac{\langle \xi, \Sigma \xi \rangle}{2}}$$

Se denota por $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. Cuando $\mu = 0$, diremos que la distribución (o la variable aleatoria) es centrada.

Ejercicio 1.2.2. Muestre que si $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, entonces

$$\mathbb{E}(X_k X_j) = \Sigma_{k,j}.$$

Observación 1.2.1. Si Σ es no singular, entonces se puede ver que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ tiene una densidad dada por

$$f_X(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \Sigma)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\langle y-\mu, \Sigma^{-1}(y-\mu) \rangle} \quad (1.2.1)$$

Definición 1.2.1. Dado un conjunto T , un proceso estocástico con espacio de parámetros T es una familia de variables aleatorias en (Ω, \mathcal{F}) indexadas en T :

$$\{X_t : t \in T\}$$

Una trayectoria o realización del proceso X es $X_t(\omega)$ para ω fijo, pensado como función de $t \in T$.

Definición 1.2.2. Un proceso es gaussiano (centrado) si $\forall t_1, t_2, \dots, t_k \in T$ el vector $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$ tiene distribución gaussiana (centrada).

Cabe preguntarse en este punto por la existencia de un tal proceso, dadas una media y una covariancia. El siguiente resultado responde esta pregunta. Es una consecuencia del teorema de consistencia de Kolmogorov, y de las propiedades de la distribución gaussiana, como puede verse por ejemplo en la sección 12.1 de [17].

Teorema (Existencia de procesos gaussianos). *Si T es un conjunto cualquiera, $m : T \rightarrow \mathbb{R}$ y $\Gamma : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ es simétrica ($\Gamma(s, t) = \Gamma(t, s) \forall s, t \in T$), y para todo subconjunto finito $F \subset T$, la matriz $\{\Gamma(s, t)\}_{s, t \in F}$ es no negativa definida, entonces existe un proceso gaussiano X_t con media m y función de covariancia Γ .*

Definición 1.2.3. Un ruido blanco \dot{W} en \mathbb{R}^n es un proceso gaussiano centrado con espacio de parámetros $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\mathbb{E}(\dot{W}(A)\dot{W}(B)) = \lambda^{(n)}(A \cap B) \quad A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

Ejercicio 1.2.3. Verifique que si $A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, la matriz $\{\Gamma(A_k, A_j)\}_{1 \leq k, j \leq N} = \{\lambda^{(n)}(A_k \cap A_j)\}_{1 \leq k, j \leq N}$ es no-negativa definida, y por lo tanto el teorema anterior permite concluir la existencia \dot{W} como definido.

Veamos ahora cómo definir $\dot{W}(g)$ para funciones $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Si identificamos cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ con la función indicadora $\mathbb{1}_A$, podemos definir $\dot{W}(\mathbb{1}_A) = \dot{W}(A)$, y tenemos que, para A y B borelianos de \mathbb{R}^n ,

$$\mathbb{E}(\dot{W}(\mathbb{1}_A)\dot{W}(\mathbb{1}_B)) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B d\lambda^{(n)}$$

Consideremos el siguiente conjunto de funciones simples en $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{S} = \left\{ f : f = \sum_{j=1}^N a_j \mathbb{1}_{A_j}, a_j \in \mathbb{R}, A_j \in \mathcal{B}^{(n)}, A_j \text{ disjuntos y } \lambda^{(n)}(A_j) < \infty \right\}$$

Definamos \dot{W} en \mathcal{S} como $\dot{W}(f) = \sum_{j=1}^N a_j \dot{W}(A_j)$.

Ejercicio 1.2.4. Verifique que la anterior definición es una buena definición, es decir que si $\sum_{j=1}^N a_j \mathbb{1}_{A_j} = \sum_{\ell=1}^M b_\ell \mathbb{1}_{B_\ell}$, entonces

$$\dot{W}\left(\sum_{j=1}^N a_j \mathbb{1}_{A_j}\right) = \dot{W}\left(\sum_{\ell=1}^M b_\ell \mathbb{1}_{B_\ell}\right)$$

Tenemos además que si $f \in \mathcal{S}$, de la definición 1.2.3,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\dot{W}(f))^2 &= \mathbb{E}\left(\sum_{j,k} a_j a_k \dot{W}(A_j) \dot{W}(A_k)\right) = \sum_j a_j^2 \lambda^{(n)}(A_j) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\lambda^{(n)} \end{aligned}$$

lo que muestra que la función $f \rightarrow \dot{W}(f)$ es una isometría de $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Como \mathcal{S} es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$, dada $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, existen $f_n \in \mathcal{S}$ tales que $\|f_n - g\|_2 \rightarrow 0$. En particular, f_n es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^n)$, por lo que también lo es $\dot{W}(f_n)$, en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Como este espacio es completo, esta sucesión de variables aleatorias tiene límite, el cual llamamos $\dot{W}(g)$. Al proceso \dot{W} indexado sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ se le denomina proceso isonormal.

Suele denotarse

$$\dot{W}(g) = \int g(x) dW_x,$$

y como de costumbre, la variable x se omite cuando está claro el espacio del contexto.

Ejercicio 1.2.5. Calcule $\text{Cov}(\dot{W}(g), \dot{W}(f))$, para $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Esta integral se conoce como integral de Wiener. Está definida por el procedimiento explicado antes, y en ocasiones resulta una notación útil y sugestiva. Sin embargo, debe tomarse en cuenta que no es una integral en el sentido usual, y que en particular, a pesar de que escribimos dW , \dot{W} no es una medida aleatoria signada sigma-finita en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, como muestra el ejercicio que sigue, tomado de [31].

Ejercicio 1.2.6. Suponga que $n = 1$, para mayor simplicidad.

1. Verifique que, con probabilidad 1,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} \left| \dot{W}\left(\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right) \right|^2 = 1$$

2. Deduzca que con probabilidad 1,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} \left| \dot{W}\left(\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right) \right| = \infty$$

3. Concluya que si \dot{W} fuese una medida signada, no sería sigma-finita.

Ejemplo 1.2.1 (Hoja browniana). Consideremos el proceso $W(x, t)$, $x, t \in [0, \infty)$ definido por

$$W(x, t) = \dot{W}([0, x] \times [0, t])$$

Es claramente un proceso gaussiano centrado, y de la definición de ruido blanco sigue que

$$\mathbb{E}(W(x, t)W(x', t')) = (t \wedge t')(x \wedge x')$$

Se denomina hoja browniana, y puede definirse análogamente en \mathbb{R}^n , para $n > 2$. En \mathbb{R} , se obtiene el movimiento browniano usual $W(t)$, denotado también por $B(t)$.

Ejemplo 1.2.2 (Proceso de ruido blanco). Al estudiar ecuaciones diferenciales perturbadas por \dot{W} , conviene a veces considerar aparte la variable temporal, para lo cual se introduce el proceso de ruido blanco $W_t(A), t \geq 0, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, definido por $W_t(A) = \dot{W}([0, t] \times A)$. Observe que el ruido blanco \dot{W} considerado aquí es en \mathbb{R}^{n+1} . Podemos introducir la filtración

$$\mathcal{G}_t = \sigma\{W_s(A), s \leq t, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}. \quad (1.2.2)$$

Ejercicio 1.2.7. Muestre que $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), W_t(A)$ es una \mathcal{G}_t -martingala.

1.3. La ecuación del calor estocástica

Habiendo definido el término de ruido blanco, estamos en condiciones de plantear una ecuación integral estocástica equivalente en un sentido que precisaremos a la ecuación (1.0.1). Vamos a considerar antes el problema lineal, es decir, cuando el término $V' = 0$, que corresponde con la ecuación del calor perturbada por el ruido \dot{W} . Veremos primero el caso en que la variable espacial $x \in \mathbb{R}$, y después el caso $x \in [0, L]$ con condiciones de Dirichlet, y nos referimos a estos como volumen infinito y volumen finito, respectivamente. En ambos casos, la solución resulta ser un proceso gaussiano, cuyas trayectorias son funciones, como se puede deducir a partir de estimaciones de sus funciones de covariancia, usando resultados bien conocidos.

Veremos en particular que las trayectorias de estos procesos son continuas en las variables x y t . Conviene en este punto hacer una precisión acerca de la noción de continuidad de procesos estocásticos.

Sea $X_\ell, \ell \in K$ (para $K = \mathbb{R}^+,$ o $K = [0, T]$ o K un cubo en \mathbb{R}^n) un proceso definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se dice que X_ℓ es continuo si $\forall \omega \in \Omega$ la función $\ell \rightarrow X_\ell(\omega)$ es continua para todo $\omega \in \Omega$. En palabras, un proceso es continuo cuando sus trayectorias son funciones continuas. Sin embargo, la continuidad no está en general determinada por la distribución del proceso, como muestra el siguiente ejemplo sencillo.

Ejemplo 1.3.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda^{(1)})$. Sea

$$X_t(\omega) = \mathbb{1}_{\{t=\omega\}}, \quad t \in [0, 1].$$

Este proceso no sólo no es continuo sino que es discontinuo con probabilidad 1, ya que $\{\omega : X_t(\omega) \text{ es continuo}\} = \emptyset$. Sin embargo, si consideramos el proceso $Y_t \equiv 0, t \in [0, 1]$ en el mismo espacio $([0, 1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda^{(1)})$, tenemos que $\forall t, \{\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\} = [0, 1] \setminus t$, de forma que

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall t \in [0, 1],$$

y en particular, las distribuciones finito-dimensionales de ambos procesos coinciden.

Eso motiva la siguiente definición

Definición 1.3.1. Dados dos procesos X_t y $\tilde{X}_t, t \in T$, definidos en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, diremos que uno es una versión del otro (o una modificación) si

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall t \in T$$

En lo sucesivo, diremos que un proceso es continuo si tiene una versión (o modificación) que lo sea, y a esta versión nos referiremos sin más comentario.

1.3.1. La solución en \mathbb{R}

Sean F y φ un campo escalar y una función dados, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, y $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y supongamos de momento que son regulares y acotados. Consideremos el problema de valor inicial para la ecuación del calor en \mathbb{R} , con un campo externo F y condición inicial φ . Precisamente, buscamos $u(x, t)$, con $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ que satisfaga:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (1.3.1)$$

La solución de este problema lineal se conoce explícitamente. Puede ser obtenida por métodos de Fourier (en el ejercicio 1.3.5 se indica cómo hacerlo). Se puede verificar directamente que es:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y, t) \varphi(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(x, y, t-s) F(y, s) dy ds, \quad (1.3.2)$$

donde g es la solución fundamental de la ecuación del calor, o núcleo asociado con ésta, y es dado por:

$$g(x, y, t) = \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \quad (1.3.3)$$

La expresión (1.3.2) puede escribirse suscintamente como

$$u = g\varphi + GF$$

donde g y G son operadores integrales definidos respectivamente por

$$gf(x, t) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y, t) f(y) dy \quad (1.3.4)$$

$$GF(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(x, y, t-s) F(y, s) dy ds \quad (1.3.5)$$

Ejercicio 1.3.1. En el ejemplo 1.2.1 definimos el movimiento browniano $B(t)$. Es inmediato verificar que $B(0) = 0$, y que $\mathbb{E}B^2(t) = t$. Definamos movimiento browniano comenzando en x por $B^{(x)}(t) = B(t) + x$.

1. Verifique de la definición que

$$\mathbb{P}(B^{(x)}(t) \leq z) = \int_{-\infty}^z g(x, y, t) dy.$$

Esto significa que $g(x, y, t)$ es la densidad de transición del movimiento browniano.

2. Concluya que, en términos de un movimiento browniano, el operador g puede expresarse como

$$gf(x, t) = \mathbb{E}(f(B^{(x)}(t)))$$

Observe que los operadores g y G están bien definidos para F y φ continuas y acotadas. Podemos pensar $G = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}$.

Ejercicio 1.3.2.

1. Verifique, derivando la expresión (1.3.2), que u satisface (1.3.1).

2. Justifique diferenciabilidad de la solución, para $t > 0$.
3. Verifique que $u(x, 0) = \varphi(x)$.
4. ¿Es acotada u ?

Queremos considerar el problema (1.3.1) cuando el campo externo F es un ruido blanco \dot{W} en \mathbb{R}^2 , es decir

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dot{W} \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (1.3.6)$$

Por analogía con (1.3.2), escribimos

$$U(x, t) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y, t) \varphi(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(x, y, t - s) dW_{y,s}, \quad (1.3.7)$$

El primer término a la derecha no presenta ninguna novedad, es simplemente la solución del problema de valor inicial (1.3.1) homogéneo (con $F = 0$). La segunda integral se interpreta como una integral de Wiener como fue definida en la sección 1.2. Dado $T > 0$, el núcleo $g(x, y, t - s)$ está en $L^2(\mathbb{R} \times [0, T])$, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ (como función de las variables (y, s)), de modo que la integral estocástica está bien definida, y la denominamos

$$Z(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(x, y, t - s) dW_{y,s}. \quad (1.3.8)$$

Observe que $U = g\varphi + G\dot{W} = g\varphi + Z$. Es natural considerar $U(x, t)$ la solución de (1.3.6), lo cual haremos en adelante.

Definición 1.3.2. Diremos que el proceso $U(x, t)$ definido por (1.3.7) es solución del problema de valor inicial (1.3.6). En particular, el proceso $Z(x, t)$ es la solución de (1.3.6) cuando la condición inicial $\varphi = 0$.

Veremos ahora algunas propiedades del proceso $\{Z(x, t)\}_{(x,t) \in [0, L] \times [0, T]}$. Claramente es un proceso gaussiano centrado, cuya covariancia es, para $t' \geq t$,

$$\begin{aligned} \Gamma(x, t, x', t') &= \mathbb{E}(Z(x, t)Z(x', t')) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(x, y, t - s)g(x', y, t' - s) dy ds \\ &= \int_0^t g(x, x', t' - t + 2s) ds, \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Ejercicio 1.3.3. A partir de la fórmula anterior, calcule $\mathbb{E}(Z^2(x, t))$.

Para calcular la esperanza cuadrática de los incrementos, estimamos cada variable por separado. Sea $h \geq 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z(x+h, t+h) - Z(x, t))^2 &\leq \\ &2 \left(\mathbb{E}(Z(x+h, t+h) - Z(x+h, t))^2 + \mathbb{E}(Z(x+h, t) - Z(x, t))^2 \right) \end{aligned}$$

De (1.3.9) sigue

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z(x+h, t+h) - Z(x+h, t))^2 &= \\ \int_t^{t+h} g(0, 0, 2s) ds + \int_0^t 2(g(0, 0, 2s) - g(0, 0, h+2s)) ds &\leq 8h^{1/2} \\ \mathbb{E}(Z(x+h, t) - Z(x, t))^2 &= 2 \int_0^t g(0, 0, 2s) - g(0, h, 2s) ds = \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1 - e^{-\frac{h^2}{2s}}}{\sqrt{s}} ds &\leq C t^{\frac{1}{2}-\alpha} h^{2\alpha}, \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

para $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, y C una constante positiva, como se puede ver de la desigualdad $1 - e^{-\delta} \leq \delta^\alpha$, válida para cualquier $\delta \geq 0$ y $\alpha \in (0, 1)$. Es un resultado clásico que, para procesos gaussianos, (1.3.10) implica la Hölder continuidad de las trayectorias del proceso. (Una demostración detallada puede verse en [31]). Tenemos entonces

Proposición 1.3.1. *Existe $\beta \in (0, 1/2)$ tal que*

$$|Z(x+h, t+h) - Z(x, t)| \leq C h^\beta$$

En particular, las trayectorias del proceso Z , y por lo tanto, las de U como en la definición 1.3.2, son continuas. Con respecto a sus propiedades globales, de (1.3.9) y de (1.3.3) sigue que si μ es cualquier función positiva continua en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \mu(x, t) dx dt < \infty$, entonces $\forall T \geq 0$

$$\mathbb{E}Z^2(x, t) \leq C \sqrt{t} \Rightarrow \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} Z^2(x, t) \mu(x, t) dx dt < \infty.$$

Siendo finita esta última esperanza, tiene que ser finita la integral, casi seguramente. Como Z es un proceso gaussiano obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.3.2. *Las trayectorias de Z están en $L^p(\mathbb{R} \times [0, T], \mu dx dt)$, para todo $p \geq 1$, $T > 0$.*

Ejercicio 1.3.4. Justifique la afirmación anterior.

Se puede mostrar también un resultado más fuerte para Z , que sigue de las proposiciones 1.3.1 y 1.3.2, con ayuda de resultados generales sobre el máximo de procesos gaussianos que se pueden encontrar en el libro de R. Adler [1].

Definición 1.3.3. Diremos que una función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es polinomialmente acotada si existe un polinomio $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|F(x)| < P(x)$

Proposición 1.3.3. *Las trayectorias del proceso Z son casi seguramente polinomialmente acotadas.*

Ejercicio 1.3.5. Muestre que el núcleo g está dado por (1.3.3).

Sugerencia (suponga que todas las integrales que siguen son finitas):

- Considere la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, con dato inicial $\varphi \in L^2$. Sea \hat{f} la transformada de Fourier de f , $\hat{f}(\xi) = \int f(y) e^{i\xi y} dy$. Tome transformada de Fourier en la variable espacial a ambos lados de la ecuación para obtener la ecuación ordinaria $\frac{d\hat{u}}{dt} = -\frac{1}{2} \xi^2 \hat{u}$.
- Resuelva esta última ecuación recordando imponer el dato inicial, para obtener $\hat{u}(\xi, t) = \int e^{-\frac{\xi^2}{2} t} \varphi(y) e^{i\xi y} dy$
- Aplique transformada inversa de Fourier y el teorema de Fubini para llegar a la expresión $u(x, t) = \int \varphi(y) \int \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2} t} e^{i\xi(y-x)} d\xi dy$
- Verifique (por ejemplo, completando cuadrados) que la integral en ξ es precisamente $g(x, y, t)$.

1.3.2. La solución en el intervalo $[0, L]$

Queremos ahora resolver la ecuación del calor perturbada por un ruido blanco, en el caso de volumen finito, es decir, encontrar la solución $u(x, t)$, $x \in [0, L]$, $t \geq 0$ del problema que formalmente planteamos

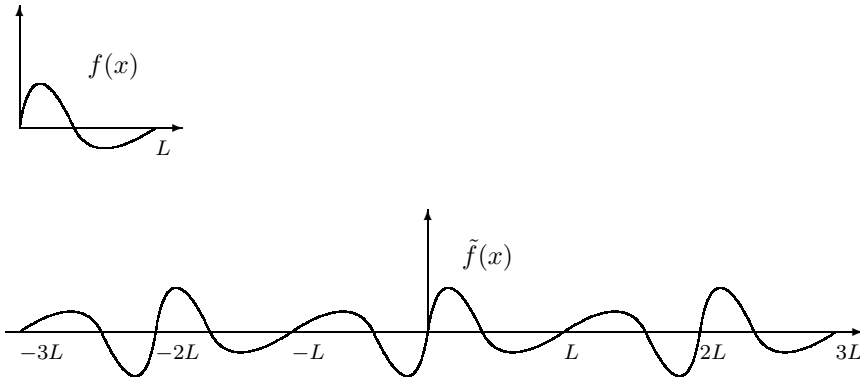
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dot{W} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases} \quad (1.3.11)$$

para $\varphi \in C_D[0, L]$.

En [36] se estudia el problema análogo a con condiciones de Neumann en la frontera (es decir, $\frac{\partial u}{\partial x}(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(L) = 0$), y un término lineal adicional $-\lambda u$, como un modelo de respuesta de neuronas.

El procedimiento que seguimos es similar al de la subsección anterior. Consideremos como antes el problema (1.3.11) en el caso en que el campo externo $F : [0, L] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es regular.

El método de imágenes (o de reflexión) permite obtener la solución de este problema a partir de la solución (1.3.2) obtenida para $x \in \mathbb{R}$. Para ello, dada $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, definamos $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la extensión periódica impar de f . En el dibujo que sigue, se muestra el gráfico de una función f y el de la parte de su extensión \tilde{f} que cabe entre los márgenes.



Proposición 1.3.4. Dadas $\varphi \in C_D[0, L]$ y $F : [0, L] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, sean $\tilde{\varphi}$ y \tilde{F} las extensiones (como descrito arriba) de φ y de $F(\cdot, t)$ para cada $t \geq 0$, respectivamente. Sean g y G los operadores definidos por (1.3.4) y (1.3.5). Entonces

$$u = g(\tilde{\varphi}_L) + G\tilde{F}_L \quad (1.3.12)$$

satisface la ecuación del calor con condiciones de Dirichlet en el intervalo $[0, L]$, y condición inicial φ y campo externo F dados.

Demostración. Basta observar que u satisface en efecto la ecuación y la condición inicial, cuando la variable espacial x es restringida a $[0, L]$, lo

cual sigue por inspección directa, como en el ejercicio 1.3.2. Para verificar que satisface las condiciones de contorno, veamos por ejemplo

$$g\tilde{\varphi}(L, t) = \int g(L, y, t)\tilde{\varphi}(y) dy = \int g(z, 0, t)\tilde{\varphi}(L - z) dz = 0$$

La segunda igualdad sigue de una traslación de variables y la tercera del hecho de que $\tilde{\varphi}_L(L - z)$ es una función impar acotada, y $g(z, 0, t)$ una función par de z en L^1 , para cada $t > 0$. Análogamente se pueden tratar todos los términos de frontera $g\varphi_L(0, t)$, $GF_L(0, t)$ y $GF_L(L, t)$. \square

Por otro lado, dada una función $f \in C_D[0, L]$, y \tilde{f} su extensión a \mathbb{R} como definida arriba, es fácil verificar usando la linealidad de la integral en el intervalo de integración y la definición de la extensión, que para $x \in [0, L]$, $t \geq 0$,

$$g\tilde{f}(x, t) = \int g(x - y, t)\tilde{f}(y, s) = \int_0^L \sum_{k \in \mathbb{Z}} (g(x, y - 2kL, t) - g(x, -y - 2kL, t)) f(y) dy$$

Si llamamos

$$g_D(x, y, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (g(x, y - 2kL, t) - g(x, -y - 2kL, t)), \quad (1.3.13)$$

podemos escribir la solución u dada en (1.3.12) también en términos del núcleo g_D :

$$u(x, t) = \int_0^L g_D(x, y, t) \varphi(y) dy + \int_0^t \int_0^L g_D(x, y, t - s) F(y, s) dy ds, \quad (1.3.14)$$

Volviendo al problema original $F = \dot{W}$, por el mismo razonamiento utilizado en la subsección 1.3.1, tomamos como solución de (1.3.11)

$$v(x, t) = \int_0^L g_D(x, y, t) \varphi(y) dy + \int_0^t \int_0^L g_D(x, y, t - s) dW_{y,s},$$

y denotamos la integral estocástica por

$$Z_0(x, t) = \int_0^t \int_0^L g_D(x, y, t - s) dW_{y,s}. \quad (1.3.15)$$

No es difícil verificar directamente que $0 \leq g_D(x, y, t) \leq g(x, y, t)$ si $x \in [0, L]$. También se puede ver de la interpretación probabilística de ambos núcleos: si $B^{(x)}(t)$ es un movimiento browniano comenzando en x (ver el ejercicio 1.3.1) y $\tau_{[0, L]} = \inf\{t \geq 0 : B^{(x)}(t) \notin [0, L]\}$

$$g(x, y, t) dy = \mathbb{P}(B^{(x)}(t) \in dy) \quad (1.3.16)$$

$$g_D(x, y, t) dy = \mathbb{P}(B^{(x)}(t) \in dy, \tau_{[0, L]} > t) \quad \text{para } x \in [0, L] \quad (1.3.17)$$

El núcleo $g_D(x, y, t-s)$ está entonces en $L^2([0, L] \times [0, T])$ en las variables (y, s) para cada (x, t) , y la integral en (1.3.15) resulta bien definida como una integral de Wiener.

Proposición 1.3.5. *El proceso $Z_0(x, t)$ definido en (1.3.15) es un proceso gaussiano, centrado, con trayectorias continuas y $Z_0(x, 0) = 0$, $Z_0(0, t) = Z_0(L, t) = 0 \forall t \geq 0$.*

Demostración. Calculamos, usando la propiedad de semigrupo y la definición (1.3.13)

$$\mathbb{E}(Z^2(0, t)) = \int_0^t \int_0^L g_D^2(0, y, s) dy ds = \int_0^t g_D(0, 0, 2s) ds = 0,$$

para concluir que $Z(0, t) = 0$. Una cuenta similar muestra que $Z(L, t) = 0$, por lo que Z satisface las condiciones de borde. Un procedimiento idéntico al utilizado en el caso de volumen infinito muestra que valen las otras afirmaciones. \square

Observe que $Z_0 = G_D \dot{W}$, y nos referiremos a Z_0 como la solución de la ecuación del calor en el intervalo $[0, L]$ con condiciones de borde de Dirichlet y condición inicial 0. El cálculo de la covariancia de Z_0 es análogo al realizado en (1.3.9): para $t \leq t'$,

$$\Gamma_0(x, t, x', t') = \mathbb{E}(Z_0(x, t) Z_0(x', t')) \quad (1.3.18)$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_D(x, y, t-s) g_D(x', y, t'-s) dy ds = \int_0^t g_D(x, x', t'-t+2s) ds,$$

Observación 1.3.1. Se puede verificar fácilmente que el operador $G_D G_D^*$ (usando * para denotar adjunto) es un operador integral cuyo núcleo es precisamente $\Gamma_0(x, t, x', t')$, y en ese sentido tenemos $G_D G_D^* = \Gamma_0$. Es claro de (1.3.18) que es un operador de traza finita. Algunas propiedades de este tipo de operadores que usaremos más adelante pueden encontrarse en [34].

1.4. La ecuación no lineal

Supongamos que queremos resolver el problema (1.3.1) cuando tiene además un término no lineal $H(u)$, es decir, queremos considerar

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + H(u) + F(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (1.4.1)$$

La ecuación anterior no se puede resolver explícitamente para cualquier H , pero podemos escribir una ecuación integral equivalente (en algunos casos) a ésta, lo que tiene la ventaja de que se pueden usar métodos clásicos de punto fijo para demostrar la existencia y unicidad de la solución. La ecuación integral que se obtiene es:

$$\begin{aligned} u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} g(x - y, t) \varphi(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(x - y, t - s) H(u(y, s)) dy ds \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(x - y, t - s) F(y, s) dy ds, \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Observe que la función u está a ambos lados de la ecuación anterior, de modo que no “despeja” u . Una manera informal de obtener la ecuación integral es pasando a la izquierda el término $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, y aplicando a ambos lados de la ecuación (1.4.1) el operador $(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1}$.

Ejercicio 1.4.1. Suponga que φ , F y H son funciones regulares y acotadas.

- Justifique diferenciabilidad de la solución, para $t > 0$.
- Verifique, derivando la expresión (1.4.2), que u satisface (1.4.1).
- Verifique que $u(x, 0) = \varphi(x)$.
- ¿Es acotada u ?

Volvemos ahora a la ecuación de Allen–Cahn estocástica (1.0.1). Consideramos primero el problema de valor inicial en volumen infinito:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V'(u) + \sqrt{\varepsilon} \dot{W} \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.4.3)$$

Tomando en cuenta (1.4.2), damos la siguiente definición:

Definición 1.4.1. Diremos que $u(x, t)$ es solución de (1.4.3) si es solución de la siguiente ecuación integral

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y, t) \varphi(y) dy - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(x, y, t-s) V'(u(y, s)) dy ds + \sqrt{\varepsilon} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(x-y, t-s) dW_{y,s} dy ds, \quad (1.4.4)$$

donde la última integral se interpreta como una integral de Wiener.

La ecuación integral arriba se puede escribir concisamente en términos de los operadores g y G como

$$u = g\varphi - G V'(u) + \sqrt{\varepsilon} G \dot{W}$$

Observemos también que el término $G \dot{W} = Z$, donde Z es el proceso gaussiano que consideramos en la sección anterior.

De idéntica forma consideramos la ecuación de Allen-Cahn estocástica en volumen finito,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V'(u) + \sqrt{\varepsilon} \dot{W} \\ u(0, t) = u(0, L) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases} \quad (1.4.5)$$

y tenemos lo siguiente.

Definición 1.4.2. Diremos que $u(x, t)$, $x \in [0, L]$, $t \geq 0$ es solución de (1.4.5) si es solución de la siguiente ecuación integral

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} g_D(x, y, t) \varphi(y) dy - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_D(x, y, t-s) V'(u(y, s)) dy ds + \sqrt{\varepsilon} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g_D(x-y, t-s) dW_{y,s} dy ds, \quad (1.4.6)$$

De nuevo, la ecuación integral anterior se puede escribir como

$$u = g_D \varphi - G_D V'(u) + \sqrt{\varepsilon} G_D \dot{W},$$

y el proceso $G_D \dot{W} = Z_0$ definido en (1.3.15). Las soluciones de (1.4.4) y de (1.4.6) suelen denominarse en inglés soluciones “mild ” de (1.4.3) y de (1.4.5), respectivamente.

Ejercicio 1.4.2. Encuentre un nombre apropiado en castellano para solución “mild”.

De las consideraciones anteriores, obtuvimos una manera de plantear precisamente la ecuación de Allen–Cahn estocástica, tanto en el caso (1.4.3) como en el caso (1.4.4): observe que todos los términos de las correspondientes ecuaciones integrales tienen sentido. Sin embargo, el procedimiento no implica que las soluciones de las ecuaciones integrales existan o sean únicas. En el próximo capítulo veremos que las ecuaciones (1.4.4) y (1.4.6) tienen una única solución continua en un espacio conveniente, y estudiaremos sus propiedades.

Observación 1.4.1. El factor $\sqrt{\varepsilon}$ no juega ningún papel de momento, y puede tomar cualquier valor sin alterar los procedimientos anteriores. En los capítulos 4 y 5 tomaremos $\varepsilon \rightarrow 0$, y esa es la razón para mantenerlo en las ecuaciones planteadas.

Capítulo 2

Resultados Generales

En este capítulo mostraremos en primer lugar un resultado de unicidad y existencia que implica unicidad y existencia para la solución de la ecuación de Allen–Canh estocástica, tanto en volumen finito con condiciones de Dirichlet (ecuación (1.4.5)) como en volumen infinito (ecuación (1.4.3)). Por solución entendemos solución de las correspondientes ecuaciones integrales, como en las definiciones 1.4.2 y 1.4.1. Veremos después algunas propiedades generales de ésta como proceso estocástico.

De la exposición se puede concluir que el valor de ε es irrelevante en las demostraciones, por lo que supondremos, para simplificar la escritura, que $\varepsilon = 1$ en el resto del capítulo.

2.1. Unicidad y existencia de la solución

Queremos entonces mostrar la unicidad y existencia de una solución de la siguiente ecuación integral:

$$u(x, t) = - \int_0^t \int G(x, y, t - s) V'(u(y, s)) dy ds \\ + Z(x, t) + \int g(x, y, s) \varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

El término $Z = G\dot{W}$ es el proceso gaussiano (1.3.8) que consideramos en la subsección 1.3.1. Escribimos la ecuación anterior en forma más concisa

$$u = -G(V'(u)) + Q, \tag{2.1.1}$$

donde $Q = Z + g(\varphi)$. Es fácil verificar que si φ es una función continua y polinomialmente acotada, entonces $g\varphi$ también lo es. Por las proposiciones 1.3.1 y 1.3.3 sabemos que Z es un proceso con trayectorias continuas y polinomialmente acotadas, por lo que Q tiene esa propiedad.

El problema de unicidad y existencia planteado no es un problema rutinario porque el término no lineal V' no es una función globalmente lipschitziana, ni monótona ni acotada, Q no es acotado, y el espacio no es compacto. Se hace necesario entonces establecer una serie de resultados preliminares antes de enunciar y demostrar el Teorema 2.1.2. La demostración está basada en los resultados de C.R. Döring en [16].

Sea $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua de soporte compacto, $0 \leq \Lambda \leq 1$, y consideremos la “ecuación truncada”

$$u_\Lambda = -G\Lambda(V'(u_\Lambda)) + \Lambda Q \quad (2.1.2)$$

La demostración del teorema de unicidad y existencia para (2.1.1) se hará mostrando primero que (2.1.2) tiene una solución local, y verificando después que la familia u_Λ es de Cauchy cuando $\Lambda \uparrow 1$, en un espacio conveniente, y que $\lim_{\Lambda \uparrow 1} u_\Lambda = u$, solución de (2.1.1). Comenzamos por mostrar existencia local de la solución de (2.1.2), después de introducir alguna notación.

Notación. Para $F \in C(\mathbb{R} \times [0, T])$, definimos

$$\|F\|_{\infty, T} = \sup_{x \in \mathbb{R}, t \leq T} |F(x, t)|$$

Dadas $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$, $F \in L^p(\mathbb{R} \times [0, T], \lambda dx dt)$ denotamos por

$$\|F\|_{p, \lambda, T} = \left(\int_0^T \int |F|^p \lambda dx dt \right)^{1/p} \quad (2.1.3)$$

La misma notación se usará cuando la función λ dependa sólo de x . Escribimos \int en vez de $\int_{-\infty}^{\infty}$.

Lema 2.1.1. *Existe un tiempo T_0 (que depende de $\|\Lambda Q\|_{\infty, T_0}$) tal que la ecuación integral (2.1.2) tiene una solución continua en $C(\mathbb{R} \times [0, T_0])$.*

Demostración. Como Q es continuo, $\|\Lambda Q\|_{\infty, T} < \infty$ para cada $T > 0$. Sea $\mathcal{C} = \{\phi \in C(\mathbb{R} \times [0, T]) : \|\phi\|_{\infty, T} \leq 2\|\Lambda Q\|_{\infty, T}\}$

Es claro que \mathcal{C} es un conjunto cerrado. Además, $\forall \phi \in \mathcal{C}$

$$|V'(\phi)| = |\phi| |\phi^2 - 1| \leq 8 \|\Lambda Q\|_{\infty, T} (\|\Lambda Q\|_{\infty, T}^2 + 1),$$

y entonces de la definición de G (1.3.5),

$$\|G\Lambda V'(\phi)\|_{\infty, T} \leq 8T \|\Lambda Q\|_{\infty, T} (\|\Lambda Q\|_{\infty, T}^2 + 1),$$

de modo que para T suficientemente pequeño, la función

$$F : \phi \rightarrow -GV'(\phi) + \Lambda Q$$

manda \mathcal{C} en \mathcal{C} . Más aún, la sucesión de iterados de Piccard v_n definida por $v_0 = \Lambda Q$, $v_{n+1} = F(v_n)$ es una sucesión de Cauchy en \mathcal{C} :

$$\|v_{n+1} - v_n\|_{\infty, T} \leq \|G\Lambda(V'(v_n)) - G\Lambda(V'(v_{n-1}))\|_{\infty, T} \leq CT \|v_n - v_{n-1}\|_{\infty, T},$$

donde C es una constante que depende solamente de $\|\Lambda Q\|_{\infty, T}$. Iterando vemos que $\|v_{n+1} - v_n\|_{\infty, T} \leq (CT)^n \|\Lambda Q\|_{\infty, T}$, y entonces

$$\begin{aligned} \|v_{N+M} - v_N\|_{\infty, T} &\leq \sum_{j=0}^{M-1} \|v_{N+j+1} - v_{N+j}\|_{\infty, T} \\ &\leq \|\Lambda Q\|_{\infty, T} \sum_{j=0}^{M-1} (CT)^{N+j} \rightarrow 0 \quad \text{si } M, N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

para T suficientemente pequeño. Entonces $v_n \rightarrow v_\infty$, solución de (2.1.2) en \mathcal{C} . \square

De la demostración sigue sin dificultad el siguiente resultado.

Corolario 2.1.1. *Sea*

$$T^* = \sup \{T : (2.1.2) \text{ tiene una solución continua en } \mathbb{R} \times [0, T)\}$$

Entonces o bien $T^ = \infty$, o bien la solución u_Λ satisface*

$$\sup_{t < T^*, x \in \mathbb{R}} |u_\Lambda(x, t)| = \infty$$

Demostración. Si $T^* < \infty$ y $\sup_{t < T^*, x \in \mathbb{R}} |u_\Lambda(x, t)| < \infty$, se puede repetir la demostración anterior con condición inicial $u_\Lambda(x, T^*)$, que extiende la solución hasta un tiempo $T_0 + T^*$ de manera continua, lo cual contradice la definición de T^* . \square

En consecuencia, para demostrar existencia global de una solución de (2.1.2), es suficiente mostrar que si $T^* < \infty$, entonces la solución permanece acotada en $\mathbb{R} \times [0, T^*)$, resultado que obtendremos como consecuencia de los lemas que siguen.

Lema 2.1.2. *Si u_Λ es solución continua de (2.1.2) en $\mathbb{R} \times [0, T]$, entonces tanto $|u_\Lambda|$ como $|\partial_x(u_\Lambda - \Lambda Q)|$ convergen exponencialmente a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$, uniformemente en $t \leq T$.*

Demostración. Tenemos que

$$u_\Lambda(x, t) = - \int_0^t ds \int dy g(x - y, t - s) \Lambda(y) V'(u_\Lambda(y, s)) + \Lambda Q(x, t) \quad (2.1.4)$$

Sea $K > 0$ tal que $\Lambda(y) = 0$ si $y \geq K$, y supongamos $x = K + d$, para $d > 0$. Denotamos por C_i constantes positivas, y acotamos

$$\begin{aligned} |u_\Lambda(x, t)| &\leq C_0 \int_0^t \int_{|y| \leq K} g(x, y, t - s) dy ds \\ &\leq C_1 \int_0^T e^{-\frac{d^2}{4s}} \int_{|y| \leq K} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4s}}}{\sqrt{2\pi s}} dy ds \leq C_2 \int_0^T e^{-\frac{d^2}{4s}} ds \\ &= C_2 \int_{1/4T}^\infty \frac{e^{-d^2 u}}{4u^2} du \leq C_3 T e^{-\frac{d^2}{4T}} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Para $x = -K - d$, se obtiene la misma desigualdad por simetría, de modo que existen constantes positivas a y b (que dependen de Λ , de T y de $\|\Lambda Q\|_{\infty, T}$) tales que $|u_\Lambda(x, t)| \leq a e^{-b|x|}$ para $|x|$ suficientemente grande. De (2.1.4), derivando tenemos

$$\partial_x(u_\Lambda - \Lambda Q) = \int_0^t \int \frac{(x - y)}{t - s} g(x - y, t - s) \Lambda(y) V'(u_\Lambda(y, s)) dy ds.$$

Esta última integral se estima de forma similar a (2.1.5). \square

El siguiente resultado sigue simplemente de integrar por partes.

Lema 2.1.3. Si $\partial_x v \in L^{2n+2}(\mathbb{R} \times [0, T])$ y si $v(x, t)$ y $(\partial_t - \frac{1}{2}\partial_{xx})v(x, t) \in C(\mathbb{R} \times [0, T]) \cap L^{2n+2}(\mathbb{R} \times [0, T])$, entonces se cumple que

$$\int_0^T \int v^{2n+1} (\partial_t - \frac{1}{2}\partial_{xx})v \, dxdt = \quad (2.1.6)$$

$$\frac{1}{2n+2} \int (v^{2n+2}(x, T) - v^{2n+2}(x, 0)) \, dx + \frac{2n+1}{2} \int_0^T \int v^{2n} (\partial_x v)^2 \, dxdt$$

Lema 2.1.4. Si u_Λ es una solución continua de (2.1.2) en $\mathbb{R} \times [0, T]$, $n \in \mathbb{N}$, entonces se cumple la siguiente desigualdad, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\|u_\Lambda\|_{2n+4, \Lambda, T}^{2n+4} \leq P_{2n+3}(\|u_\Lambda\|_{2n+4, \Lambda, T}), \quad (2.1.7)$$

donde P_{2n+3} es un polinomio de grado $2n+3$ cuyos coeficientes dependen de Λ , de n y de $\|\Lambda Q\|_{q, \Lambda, T}$ para diferentes valores de q , $1 \leq q < 2n+4$.

Demostración. De la ecuación (2.1.2) y de la definición de G , tenemos $(\partial_t - \frac{1}{2}\partial_{xx})(u_\Lambda - \Lambda Q) = -\Lambda V'(u_\Lambda)$. Por el lema 2.1.2 podemos aplicar la fórmula (2.1.6) con $v = u_\Lambda - \Lambda Q$. Como $(u_\Lambda - \Lambda Q)(x, 0) = 0$, obtenemos

$$0 \leq \int_0^T \int (u_\Lambda - \Lambda Q)^{2n+1} (\partial_t - \frac{1}{2}\partial_{xx})(u_\Lambda - \Lambda Q) \, dxdt$$

$$= - \int_0^T \int (u_\Lambda - \Lambda Q)^{2n+1} \Lambda V'(u_\Lambda) \, dxdt \quad (2.1.8)$$

Substituyendo $V'(u_\Lambda) = u_\Lambda^3 - u_\Lambda$, y expandiendo el binomio, el último integrando en (2.1.8) es

$$\Lambda \left(\sum_{k=0}^{2n} u_\Lambda^k (-\Lambda Q)^{2n+1-k} \binom{2n+1}{k} + u_\Lambda^{2n+1} \right) (u_\Lambda^3 - u_\Lambda) =$$

$$\Lambda (u_\Lambda^{2n+4} + R_{2n+3}(u_\Lambda)),$$

donde R_{2n+3} es un polinomio de grado $2n+3$ con coeficientes que dependen de n y de $|\Lambda Q|^j$, para $0 \leq j \leq 2n+1$. Pasando al lado izquierdo en (2.1.8) el término en u_Λ^{2n+4} obtenemos

$$\int_0^T \int \Lambda u_\Lambda^{2n+4} \, dxdt \leq \int_0^T \int \Lambda |R_{2n+3}(u_\Lambda)| \, dxdt$$

Aplicando después la desigualdad de Hölder convenientemente a cada término de R_{2n+3} se obtiene (2.1.7). \square

Observación 2.1.1. Los resultados 2.1.1–2.1.3 dependen únicamente de las propiedades locales de V' , y valen de la misma forma para cualquier polinomio en u . El lema 2.1.4 depende en cambio de manera substancial del signo + del coeficiente del término de mayor exponente en V' , en nuestro caso u^3 . Resultados como (2.1.8) se conocen como estimaciones a priori, y la obtención de estas juega un papel importante en la demostración de resultados de unicidad y existencia para ecuaciones diferenciales no lineales.

Ejercicio 2.1.1. Considere la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

1. Encuentre una solución.
2. ¿Qué puede decir de la existencia y unicidad globales?
3. Considere los dos puntos anteriores en el caso en que el lado derecho en la ecuación es $+x^3$.

Corolario 2.1.2. Si u_Λ es una solución continua de (2.1.2) en $\mathbb{R} \times [0, T^*)$ entonces $u_\Lambda \in L^p(\mathbb{R} \times [0, T^*), \Lambda dx dt)$, $\forall p \geq 1$.

Demostración. Sigue del lema anterior, observando que $\|u_\Lambda\|_{2n+4, \Lambda, T}^{2n+4} \leq P_{2n+3}(\|u_\Lambda\|_{2n+4, \Lambda, T})$ implica que $\|u_\Lambda\|_{2n+4, \Lambda, T} \leq C$, con C una constante que depende de los coeficientes del polinomio, que permanecen acotados al hacer $T \uparrow T^*$. \square

Lema 2.1.5. Si u_Λ es una solución continua de (2.1.1), entonces

$$\sup_{t \leq T^*} \|u_\Lambda(\cdot, t)\|_\infty < \infty. \quad (2.1.9)$$

Demostración. Aplicando la desigualdad de Young para convoluciones (ver la Proposición 2 en el apéndice) a la integral en la expresión (2.1.4), tenemos

$$|u_\Lambda(x, t)| \leq \left| \int \int g(x-y, t-s) \mathbb{I}_{[0,t]}(t-s) \Lambda(y) \mathbb{I}_{[0,t]}(s) V'(u_\Lambda(y, s)) dy dt \right| + |\Lambda(x)Q(x, t)| \leq \|g\mathbb{I}_{[0,T^*]}\|_2 \|\Lambda V'(u_\Lambda)\mathbb{I}_{[0,T^*]}\|_2 + |\Lambda(x)Q(x, t)|$$

Sabemos que $\sup_{t \leq T^*} \|\Lambda Q(\cdot, t)\|_\infty < \infty$. Por el lema anterior también $\|\Lambda V'(u_\Lambda)\mathbb{I}_{[0,T^*]}\|_2 < \infty$. De (1.3.9) tenemos que $\|g\mathbb{I}_{[0,T^*]}\|_2 < \infty$, con lo que sigue (2.1.9), \square

Del corolario (2.1.2), los resultados anteriores permiten concluir que $T^* = \infty$, por lo que sigue finalmente la existencia global de una solución de la ecuación truncada (2.1.2):

Proposición 2.1.1. *Si φ es una función continua y polinomialmente acotada, la ecuación integral*

$$u = -G(\Lambda V'(u)) + \Lambda(G\dot{W} + g\varphi)$$

tiene una solución continua $u_\Lambda(x, t)$ para $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$.

Utilizando la relación entre los núcleos g_D y g correspondientes a volumen finito e infinito respectivamente (ver (1.3.16) y (1.3.17)), es fácil verificar que la demostración anterior permite concluir también el siguiente resultado:

Teorema 2.1.1. *Si $\varphi \in C_D[0, L]$, entonces la ecuación de Allen–Cahn estocástica en volumen finito con condiciones de Dirichlet (1.4.5) tiene solución continua en ambas variables, en $[0, L] \times [0, \infty)$.*

Como ya fue dicho, una vez establecida la existencia de una solución global para la ecuación (2.1.2), para demostrar la existencia y unicidad de una solución para la ecuación en volumen infinito (2.1.1), tomaremos límite cuando $\Lambda \uparrow 1$ en un espacio conveniente.

Notación. Consideramos, para $\alpha > 0$ la función en $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$

$$\mu_\alpha(x, t) = e^{-\frac{\alpha^2}{2} t - \alpha|x|}.$$

Denotamos por $\|\cdot\|_{p,\mu_\alpha}$ la norma en $L^p(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mu_\alpha dxdt)$, e introducimos C^{μ_α} el espacio de Banach de funciones continuas $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con la norma

$$\|f\|_{\infty,\mu_\alpha} = \sup_{x \in \mathbb{R}, t \geq 0} e^{-\frac{\alpha^2}{2} t - \alpha|x|} |f(x, t)|$$

Después de establecer una serie de resultados preliminares, demostraremos el siguiente resultado:

Teorema 2.1.2. *Si $Q \in L^p(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mu_\alpha dxdt) \cap C^{\mu_\alpha}$, entonces la ecuación*

$$u = -G(V'(u)) + Q$$

tiene una única solución continua en $L^p(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mu_\alpha dxdt) \cap C^{\mu_\alpha}$.

Lema 2.1.6. *Si v y $(\partial_t - \frac{1}{2}\partial_{xx})v$ son funciones continuas en $\mathbb{R} \times [0, T]$, v^{2n+2} y $(\partial_x v)^{2n+2} \in L^1(\mathbb{R} \times [0, T], d\mu_\alpha)$, entonces*

$$\begin{aligned} \int_0^T \int v^{2n+1} (\partial_t - \frac{1}{2}\partial_{xx})v \mu_\alpha dxdt = \\ \frac{1}{2n+2} \int e^{-\alpha|x|} (e^{-\frac{\alpha^2}{2}T} v(x, T)^{2n+2} - v(x, 0)^{2n+2}) dx + \\ \frac{1}{2n+2} \int_0^T \alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2}t} v^{2n+2}(0, t) dt + \frac{2n+1}{2} \int_0^T \int v^{2n} (\partial_x v)^2 \mu_\alpha dxdt \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Demostración. Sigue simplemente de integrar por partes, usando que $\partial_{xx} e^{-\alpha|x|} = \alpha^2 e^{-\alpha|x|} - 2\alpha\delta_0(x)$, δ_0 una delta de Dirac en 0. \square

Lema 2.1.7. *Si u_Λ es una solución continua de (2.1.2) en $\mathbb{R} \times [0, T]$, entonces vale la desigualdad:*

$$\|u_\Lambda\|_{2n+4, \Lambda\mu_\alpha, T}^{2n+4} \leq \tilde{P}_{2n+3}(\|u_\Lambda\|_{2n+4, \Lambda\mu_\alpha, T}) \quad (2.1.11)$$

con \tilde{P}_{2n+3} un polinomio de grado $2n+3$ cuyos coeficientes dependen de Λ, n, α y $\|\Lambda Q\|_{q, \Lambda\mu_\alpha, T}$ para algunos $1 < q \leq 2n+4$, y permanecen acotados cuando $\Lambda \uparrow 1, T \rightarrow \infty$.

Demostración. Sabemos que $(\partial_t - \frac{1}{2}\partial_{xx})(u_\Lambda - \Lambda Q) = -\Lambda V'(u_\Lambda)$, que $(u_\Lambda - \Lambda Q(x, 0)) = 0$ y que $|u_\Lambda|$ y $|\partial_x(u_\Lambda - \Lambda Q)|$ decaen exponencialmente a 0 cuando $|x| \rightarrow \infty$, para cada $t \leq T$. Podemos aplicar entonces el lema anterior con $v = u_\Lambda - \Lambda Q$ para obtener, pasando al lado izquierdo el término en u_Λ^{2n+4} ,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int \Lambda u_\Lambda^{2n+4} \mu_\alpha dxdt &\leq \\ &- \int_0^T \int \Lambda \left(\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n+1}{j} \right) u_\Lambda^j (-\Lambda Q)^{2n+1-j} (u_\Lambda^3 - u_\Lambda) \mu_\alpha dxdt \\ &\quad - \int_0^T \int \Lambda u_\Lambda^{2n+2} \mu_\alpha dxdt. \end{aligned}$$

Para concluir, se procede como en la demostración del Lema 2.1.4, observando que, por la Proposición 1.3.2, los coeficientes del polinomio resultante permanecen acotados, cuando $\Lambda \uparrow 1$ ya que $\mu_\alpha dxdt$ es una medida finita. \square

Corolario 2.1.3. *En las condiciones del lema anterior, se cumple que para cada $p \in [1, \infty)$ existe una constante positiva que depende solamente de p, α y $\|Q\|_{\mu_\alpha}$ tal que*

$$\|u_\Lambda\|_{p, \Lambda \mu_\alpha} \leq C \quad \|\Lambda u_\Lambda\|_{p, \mu_\alpha} \leq C \quad (2.1.12)$$

Más aún,

$$\|u_\Lambda\|_{p, \mu_\alpha} \leq C \quad (2.1.13)$$

uniformemente en Λ , para $\Lambda \uparrow 1$.

Demostración. Las desigualdades (2.1.12) siguen directamente del lema 2.1.4. Sea $\|G\|_{p \rightarrow p}$ la norma de $G : L^p(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mu_\alpha dxdt) \leftarrow$. Para verificar (2.1.13), de la ecuación (2.1.2) tenemos

$$\|u_\Lambda\|_{p, \mu_\alpha} \leq \|G\|_{p \rightarrow p} \|\Lambda V'(u_\Lambda)\|_{p, \mu_\alpha} + \|\Lambda Q\|_{p, \mu_\alpha}.$$

Sabemos que $\|\Lambda Q\|_{p, \mu_\alpha}$ está acotada uniformemente en Λ , y sigue de (2.1.12) que $\|\Lambda V'(u_\Lambda)\|_{p, \mu_\alpha}$ también lo está. Basta ver entonces que $\|G\|_{p \rightarrow p} < \infty$, lo cual sigue de la desigualdad de Young para convoluciones, si $p > 1$ o si $p = 1$ y $T < \infty$. \square

Para completar la demostración del Teorema (2.1.2), consideramos primero el caso en que $V'(u) = u^3$, es decir, $V(u)$ es un polinomio “monoestable” (con un único mínimo). Si $P(u)$ es monoestable, entonces para algún $k > 0$,

$$(P'(u) - P'(w))(u - w) \geq k(u - w)^N, \quad (2.1.14)$$

donde N es el grado del polinomio P . En nuestro caso, se verifica

$$(V'(u) - V'(w))(u - w) = (u - w)^2(u^2 + uw + w^2) \geq \frac{1}{4}(u - w)^4. \quad (2.1.15)$$

En el siguiente lema, se usa esta propiedad para demostrar que las soluciones de (2.1.2) forman una familia de Cauchy si el correspondiente polinomio es monoestable.

Lema 2.1.8. *Si u_Λ es una solución de (2.1.2) para $V'(u) = u^3$, entonces la familia u_Λ es de Cauchy en cada $L^p(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mu_\alpha dx dt)$, para $p \geq 1$.*

Demostración. Sean u_Λ y $u_{\tilde{\Lambda}}$ soluciones de (2.1.2) para Λ y $\tilde{\Lambda}$ respectivamente. Se cumple que

$$\left(\partial_t - \frac{1}{2}\partial_{xx}\right)(u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}} - (\Lambda Q - \tilde{\Lambda} Q)) = -(\Lambda V'(u_\Lambda) - \tilde{\Lambda} V'(u_{\tilde{\Lambda}}))$$

Del lema 2.1.6 tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \\ &\int_0^\infty \int (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}} - (\Lambda Q - \tilde{\Lambda} Q))^{2n+1} \left(\partial_t - \frac{1}{2}\partial_{xx}\right)(u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}} - (\Lambda Q - \tilde{\Lambda} Q)) \mu_\alpha dx dt \\ &= - \int_0^\infty \int (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}} - (\Lambda - \tilde{\Lambda})Q)^{2n+1} (\Lambda V'(u_\Lambda) - \tilde{\Lambda} V'(u_{\tilde{\Lambda}})) \mu_\alpha dx dt \end{aligned}$$

Expandiendo el binomio en el integrando,

$$\begin{aligned} (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}} - (\Lambda Q - \tilde{\Lambda} Q))^{2n+1} &= (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}})^{2n+1} \\ + \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n+1}{j} (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}})^j ((\tilde{\Lambda} - \Lambda)Q)^{2n+1-j} &= (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}})^{2n+1} + \Sigma. \end{aligned}$$

Substituyendo en la última integral, queda

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}})^{2n+1} (V'(u_\Lambda) - V'(u_{\tilde{\Lambda}})) \mu_\alpha \, dxdt \leq \\
& \quad - \int_0^\infty \int \Sigma (\Lambda V'(u_\Lambda) - \tilde{\Lambda} V'(u_{\tilde{\Lambda}})) \mu_\alpha \, dxdt \\
& \quad + \int_0^\infty \int (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}})^{2n+1} (1 - \Lambda) V'(u_\Lambda) \mu_\alpha \, dxdt \\
& \quad + \int_0^\infty \int (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}})^{2n+1} (1 - \tilde{\Lambda}) V'(u_{\tilde{\Lambda}}) \mu_\alpha \, dxdt \quad (2.1.16)
\end{aligned}$$

Como por (2.1.15) $(u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}})^{2n+1} (V'(u_\Lambda) - V'(u_{\tilde{\Lambda}})) \geq \frac{1}{4} (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}})^{2n+4}$, si llamamos I al lado derecho de la igualdad arriba obtenemos

$$\int (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}})^{2n+4} \mu_\alpha \, dxdt \leq 4I \xrightarrow{\Lambda, \tilde{\Lambda} \uparrow 1} 0,$$

ya que todos los términos en I tienen al menos un factor $\Lambda - \tilde{\Lambda}$, o $1 - \tilde{\Lambda}$ o $1 - \Lambda$, de modo que la afirmación sigue de (2.1.13) y del teorema de convergencia dominada. \square

Proposición 2.1.2. *En el caso en que el término no lineal sea el polinomio $V'(u) = u^3$, existe una única solución de la ecuación (2.1.1)*

$$u = -G(V'(u)) + Q$$

en $L^p(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mu_\alpha \, dxdt)$, para $p \geq 1$.

Demostración. Como la familia u_Λ es de Cauchy en $L^p(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mu_\alpha \, dxdt)$, entonces tiene un límite en ese espacio, el cual llamamos u . Tomando límite a ambos lados de (2.1.2), como G es cerrado y $\Lambda V'(u_\Lambda) \rightarrow V'(u_\Lambda)$ cuando $\Lambda \uparrow 1$, se ve que u satisface (2.1.1).

Para verificar unicidad, supongamos que u y \tilde{u} son dos soluciones de (2.1.1). Por el lema 2.1.6 y por la propiedad (2.1.15) tenemos

$$\begin{aligned}
0 & \leq \int_0^\infty \int (u - \tilde{u})^{2n+1} (\partial_t - \frac{1}{2} \partial_{xx})(u - \tilde{u}) \mu_\alpha \, dxdt \\
& = - \int_0^\infty \int (u - \tilde{u})^{2n+1} (u^3 - \tilde{u}^3) \mu_\alpha \, dxdt \leq -\frac{1}{4} \int_0^\infty \int (u - \tilde{u})^{2n+4} \mu_\alpha \, dxdt,
\end{aligned}$$

por lo que $\|u - \tilde{u}\|_{2n+4} = 0 \Rightarrow u = \tilde{u}$.

Como $\Lambda Q - Q$ converge a cero en C^{μ_α} , $\Lambda V'(u_\Lambda) - V'(u) \rightarrow 0$ en $L^p(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mu_\alpha dxdt)$ y G es un operador continuo de este espacio en C^{μ_α} se verifica que $\|u_\Lambda - u\|_{\infty, \mu_\alpha} \rightarrow 0$, y por lo tanto $u \in C^{\mu_\alpha}$. \square

En el caso que queremos considerar, $V'(u) = u^3 - u$, el razonamiento anterior no se aplica, y se hace necesario un argumento adicional, basado en la siguiente observación: al sumar un término lineal βu para β suficientemente grande a un polinomio como V' , vale la desigualdad (2.1.14) y se puede adaptar la demostración de unicidad y existencia dada para V monoestable.

Veamos como proceder. Supongamos que u_Λ es una solución de (2.1.2) para $V'(u) = u^3 - u$. Entonces $e^{-\beta t} u_\Lambda$ satisface:

$$\begin{aligned} (\partial_t - \frac{1}{2} \partial_{xx}) e^{-\beta t} (u_\Lambda - \Lambda Q) = \\ - e^{-\beta t} \Lambda (V'(u_\Lambda)) + \beta u_\Lambda + \beta e^{-\beta t} \Lambda Q + \beta e^{-\beta t} u_\Lambda (\Lambda - 1) \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Lema 2.1.9. *Si $\beta \geq 1$, $e^{-\beta t} u_\Lambda$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(d\mu_\alpha)$, cuando $\Lambda \uparrow 1$.*

Demostración. Sean u_Λ y $u_{\tilde{\Lambda}}$ soluciones de (2.1.2) para Λ y $\tilde{\Lambda}$ respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} (\partial_t - \frac{1}{2} \partial_{xx}) e^{-\beta t} (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}} - (\Lambda - \tilde{\Lambda}) Q) = \\ - e^{-\beta t} (\Lambda (V'(u_\Lambda)) + \beta u_\Lambda) - \tilde{\Lambda} (V'(u_{\tilde{\Lambda}}) + \beta u_{\tilde{\Lambda}}) \\ + \beta e^{-\beta t} ((\Lambda - 1) u_\Lambda - (\tilde{\Lambda} - 1) u_{\tilde{\Lambda}}) + \beta e^{-\beta t} (\Lambda - \tilde{\Lambda}) Q \end{aligned}$$

Llamemos R_1 y R_2 a las segunda y tercera líneas arriba, respectivamente.

Aplicando el Lema 2.1.6 con $v = e^{-\beta t} (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}} - (\Lambda - \tilde{\Lambda}) Q)$ y procediendo como en la demostración del Lema (2.1.8) tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int e^{-\beta t} ((V'(u_\Lambda)) + \beta u_\Lambda) - (V'(u_{\tilde{\Lambda}})) + \beta u_{\tilde{\Lambda}}) \times \\ (e^{-\beta t} (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}}))^{2n+1} \mu_\alpha dxdt \leq \int_0^\infty \int R \mu_\alpha dxdt \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 R &= R_2 \left(e^{-\beta t} (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}} - (\Lambda - \tilde{\Lambda}) Q) \right)^{2n+1} + \\
 &(R_1 + R_2) \left(\sum_{j=0}^{2n} e^{-\beta t (2n+1)} \binom{2n+1}{j} (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}})^j ((\Lambda - \tilde{\Lambda}) Q)^{2n+1-j} \right) + \\
 &e^{-\beta t} ((1-\Lambda)(V'(u_\Lambda) + \beta u_\Lambda) - (1-\tilde{\Lambda})(V'(u_{\tilde{\Lambda}}) + \beta u_{\tilde{\Lambda}})) (e^{-\beta t} (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}}))^{2n+1}
 \end{aligned}$$

Como $V'(u) + \beta u$ es monoestable, entonces satisface (2.1.14) para algún k positivo, y obtenemos

$$\int_0^\infty \int e^{-\beta t (2n+2)} (u_\Lambda - u_{\tilde{\Lambda}})^{2n+4} \mu_\alpha \, dx dt \leq \frac{1}{k} \int_0^\infty \int R \mu_\alpha \, dx dt$$

Para terminar la demostración, observemos que tanto $\|Q\|_{p, \mu_\alpha}$ como $\|u_\Lambda\|_{p, \mu_\alpha}$ están acotadas uniformemente en Λ , como sigue de la Proposición 1.3.2 y de (2.1.13), respectivamente. Por el teorema de convergencia dominada, se concluye que el lado derecho de la última desigualdad $\rightarrow 0$ cuando $\Lambda, \tilde{\Lambda} \uparrow 1$. \square

Demostración del Teorema 2.1.2 Sea $p \geq 1$ dado. Por el lema anterior, si $\beta \geq 1$, $e^{-\beta t} u_\Lambda$ tiene límite en $L^r(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mu_\alpha \, dx dt)$ para cada $r \geq 1$ cuando $\Lambda \uparrow 1$, el cual llamamos $e^{-\beta t} u$. Por la desigualdad de Hölder,

$$\|u_\Lambda - u\|_p = \|e^{-\beta t} (u_\Lambda - u) e^{\beta t}\|_p \leq \|e^{-\beta t} (u_\Lambda - u)\|_r \|e^{\beta t}\|_{pq}, \quad (2.1.18)$$

para $r > p$ tal que $\frac{p}{r} + \frac{1}{q} = 1$. Si $\frac{\alpha^2}{2} > \beta pq$, entonces $\|e^{\beta t}\|_{pq} < \infty$, y de la desigualdad anterior se concluye que $u_\Lambda \rightarrow u$ cuando $\Lambda \uparrow 1$, en $L^p(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mu_\alpha \, dx dt)$. En el caso $\frac{\alpha^2}{2} \leq \beta pq$, ya que $\|u_\Lambda\|_p$ está uniformemente acotado (en Λ), tiene una subfamilia convergente en aquel espacio, digamos $u_{\Lambda'} \rightarrow \tilde{u}$. Como tiene que ser $e^{-\beta t} u_{\Lambda'} \rightarrow e^{-\beta t} \tilde{u}$, y del lema anterior sabemos $e^{-\beta t} u_{\Lambda'} \rightarrow e^{-\beta t} u$ (siempre en $L^p(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mu_\alpha \, dx dt)$), se concluye que $\tilde{u} = u$, y que $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mu_\alpha \, dx dt)$.

Observación 2.1.2. Una revisión cuidadosa de la demostración anterior muestra que vale para V' más general que el considerado, $u^3 - u$. Basta que $V'(u)$ sea un polinomio de grado impar y que sea positivo el coeficiente del término de mayor orden, que es el caso considerado en [16]. También observamos que la demostración también vale si los

términos de ruido se pueden acotar convenientemente, para lo cual, en dimensión mayor que uno, se puede considerar un ruido gaussiano con una función de covariancia más regular. Esto es, un ruido “coloreado” en vez de un ruido blanco. Más detalles en este sentido se encuentran en [16].

2.2. Propiedades de la solución

Habiendo establecido la unicidad y existencia de una solución continua $u(x, t)$ de la ecuación de Allen-Cahn estocástica (1.4.5), veremos ahora algunas propiedades de ésta en el caso de volumen finito con condiciones de Dirichlet. Para comenzar, vamos a establecer algunas propiedades generales que no dependen de la forma específica del término no lineal V' . Sea entonces $u(x, t)$ solución continua de

$$u = g_D \varphi - G_D V'(u) + G_D \dot{W}, \quad (2.2.1)$$

(que no es más que una forma abreviada de la ecuación (1.4.4) con $\varepsilon = 1$).

Vimos que $u(x, t)$ es un proceso continuo en ambas variables, y podemos pensarlo o bien como un proceso a valores reales a dos parámetros (x y t), o bien como un proceso con parámetro t , tomando valores en el espacio de funciones continuas con condiciones de contorno de Dirichlet $C_D[0, L]$: $u(t)$ es la función $u(\cdot, t)$ en $C_D[0, L]$, que es un espacio métrico con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$, y que consideramos también como espacio medible, tomando su σ -álgebra de Borel. Recordamos las definiciones de filtración y de proceso adaptado a una filtración. Al introducir una filtración, estamos realmente destacando la variable tiempo, y podemos pensarlo como tal.

Definición 2.2.1.

- Una filtración en un espacio (Ω, \mathcal{F}) es una familia $\{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0}$ de σ -álgebras $\mathcal{M}_t \subset \mathcal{F}$ tal que

$$0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_t$$

- Un proceso $U(t)_{t \geq 0}$ definido en (Ω, \mathcal{F}) y tomando valores en cierto espacio (F, \mathcal{H}) se dice adaptado a una filtración $\{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0}$ si $\forall t \geq 0$, $U(t)$ es \mathcal{M}_t -medible.

Sea $\mathcal{G}_t = \sigma\{\dot{W}[0, s] \times A, s \leq t, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ la σ -álgebra generada por el ruido blanco en $[0, t]$, introducida en (1.2.2). Es claro que $\{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}$ es una filtración, y también, de la construcción de la integral de Wiener y de la demostración de la existencia del proceso $u(t)$ que éste es adaptado a \mathcal{G}_t . Consideramos también la filtración natural del proceso u ,

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{u(s, x) : s \leq t, x \in [0, L]\}.$$

Se interpreta \mathcal{F}_t como el pasado del proceso u hasta el tiempo t , porque consta de todos los eventos que han podido ocurrir hasta t (inclusive). Es claro de la definición que $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t$.

En un sistema gobernado por las leyes de la mecánica clásica, el estado del mismo en un tiempo $t + h$ para cualquier $h > 0$ está únivocamente determinado por el estado en el tiempo t . Este tipo de situación es modelado por la teoría de sistemas dinámicos. Para procesos estocásticos, la propiedad análoga es la propiedad de Markov, que se puede describir como la propiedad de que la distribución del proceso en el tiempo $t + h$ está determinada por la ley del proceso en el tiempo t . Suele parafrasearse diciendo que el futuro del proceso dado su presente no depende del pasado. Precisamente, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.2.2. Un proceso estocástico $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valores en un espacio métrico F es un proceso de Markov si $\forall A \in \mathcal{B}(F), \forall t, s \geq 0$ se cumple

$$\mathbb{P}(Y(t+s) \in A | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(Y(t+s) \in A | Y(t)) \quad (2.2.2)$$

La propiedad de Markov, al igual que en el caso de las soluciones de ecuaciones estocásticas en dimensión finita, es una consecuencia de la unicidad.

Proposición 2.2.1. *El proceso $u(t)$ como proceso a valores en $C_D[0, L]$ es un proceso de Markov.*

Demostración. Sean $t, h > 0$, y $\varphi \in C_D[0, L]$ una condición inicial dada.

$$\begin{aligned}
u(x, t+h) &= \int_0^L g_D(x, y, t+h) \varphi(y) dy - \\
&\int_0^{t+h} \int_0^L g_D(x, y, t+h-s) V'(u(y, s)) dy ds + \\
&\int_0^{t+h} \int_0^L g_D(x, y, t+h-s) dW_{y,s} \\
&= \int_0^L g_D(x, y, t+h) \varphi(y) dy + \\
&\int_0^t \int_0^L g_D(x, y, t+h-s) V'(u(y, s)) dy ds + \\
&\int_t^{t+h} \int_0^L g_D(x, y, t+h-s) V'(u(y, s)) dy ds + \\
&\int_0^t \int_0^L g_D(x, y, t+h-s) dW_{y,s} + \int_t^{t+h} \int_0^L g_D(x, y, t+h-s) dW_{y,s} \\
&= \int_0^L g_D(x, z, h) \times \\
&\left(\int_0^L g_D(z, y, t) \varphi(y) dy + \int_0^t \int_0^L g_D(z, y, t-s) V'(u(y, s)) dy ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \int_0^L g_D(z, y, t-s) dW_{y,s} \right) dz + \\
&\int_t^{t+h} \int_0^L g_D(x, y, t+h-s) V'(u(y, s)) dy ds + \\
&\int_t^{t+h} \int_0^L g_D(x, y, t+h-s) dW_{y,s} \\
&= \int_0^L g_D(x, z, h) u(z, t) dz + \\
&\int_t^{t+h} \int_0^L g_D(x, y, t+h-s) V'(u(y, s)) dy ds + \\
&\int_t^{t+h} \int_0^L g_D(x, y, t+h-s) dW_{y,s}
\end{aligned}$$

Para escribir la primera igualdad usamos simplemente la linealidad de la integral respecto del intervalo de integración. La segunda igualdad

sigue de la propiedad de semigrupo del núcleo g_D , y por último se usa la unicidad de la solución para concluir que el integrando en la variable z es precisamente $u(z, t)$. Para terminar, observamos que la primera integral de esta última igualdad es claramente \mathcal{F}_t medible. La última es independiente de \mathcal{G}_t (y por lo tanto de \mathcal{F}_t), y la segunda es independiente de \mathcal{F}_t condicionalmente al valor de $u(t)$. Eso es precisamente la propiedad de Markov (2.2.2). \square

Veamos a continuación un resultado de continuidad con respecto a las condiciones iniciales, en nuestro contexto. Denotamos por $u(t; \varphi)$ la solución de (1.4.4).

Proposición 2.2.2. *Para cada $t > 0$ fijo y $\Psi : C_D[0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada,*

$$\mathbb{E}(\Psi(u(t; \varphi)))$$

es una función continua de la condición inicial φ .

Demostración. Sea Ψ como en el enunciado, t fijo y $\varphi_n \rightarrow \varphi$ en $C_D[0, L]$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos construir $u(t; \varphi_n)$ y $u(t; \varphi)$ en el mismo espacio de probabilidad, simplemente usando el mismo ruido en la construcción de las soluciones de las correspondientes ecuaciones integrales. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \|u(t; \varphi_n) - u(t; \varphi)\|_\infty &= \\ & \|g_D(\varphi_n - \varphi)(t) - G_D(V'(u(\cdot; \varphi_n)) - V'(u(\cdot; \varphi)))(t)\|_\infty \\ & \leq C \|\varphi_n - \varphi\|_\infty + A \int_0^t \|u(s; \varphi_n) - u(s; \varphi)\|_\infty ds. \end{aligned}$$

para ciertas constantes A y C , que pueden depender de t y de cada realización de $G_D \dot{W}$. De la desigualdad de Gronwall (ver Proposición 1 del Apéndice) se deduce que

$$\|u(t; \varphi_n) - u(t; \varphi)\|_\infty \leq C \|\varphi_n - \varphi\|_\infty e^{At} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u(t; \varphi_n) = u(t; \varphi)$$

y del teorema de convergencia dominada se obtiene entonces que

$$\mathbb{E}(\Psi(u(t; \varphi_n))) \rightarrow \mathbb{E}(\Psi(u(t; \varphi))) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

\square

Un proceso que satisface la propiedad descrita en la anterior proposición se dice que tiene la propiedad de Feller.

Recordemos algunas definiciones, para introducir la propiedad fuerte de Markov, que juega un papel muy importante, y junto con las estimaciones de grandes desvíos, nos permitirá estudiar el comportamiento de u para tiempos largos.

Definición 2.2.3. Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible dotado de una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

- Una variable aleatoria $\tau \geq 0$ es un tiempo de parada (respecto de la filtración dada) si el evento $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, para cada $t \geq 0$.
- Dado un tiempo de parada τ , se define la σ -álgebra

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

En palabras, un tiempo de parada es un tiempo aleatorio que se puede determinar si ocurrió o no antes de cada tiempo t en base a la información hasta t . La σ álgebra \mathcal{F}_τ contiene la información “hasta τ ”.

Ejemplo Sea $Y(t)$ un proceso continuo tomando valores en un espacio métrico F . Sea $A \in \mathcal{B}(F)$. La variable aleatoria

$$T = \inf\{t \geq 0 : Y(t) \in A\}$$

es un tiempo de parada.

Ejercicio 2.2.1.

- Muestre que si S y T son tiempos de parada, también lo son $T \wedge S$, $T \vee S$ y $T + S$.
- Verifique que \mathcal{F}_τ es en efecto una σ -álgebra.

La propiedad fuerte de Markov se interpreta como la independencia de un proceso entre su pasado hasta un tiempo de parada y su futuro, condicionalmente al valor del mismo en el tiempo de parada. Precisamente, tenemos:

Definición 2.2.4. Un proceso estocástico $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valores en un espacio métrico F tiene la propiedad fuerte de Markov si $\forall A \in \mathcal{B}(F)$, τ tiempo de parada y $h \geq 0$ se cumple

$$\mathbb{P}(Y(\tau + h) \in A | \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{P}(Y(\tau + h) \in A | Y(\tau)) \quad (2.2.3)$$

Proposición 2.2.3. *El proceso $u(t)$ (como proceso a valores en $C_D[0, L]$) tiene la propiedad fuerte de Markov.*

Demostración. Es un hecho conocido que un proceso continuo con la propiedad de Markov que tiene la propiedad de Feller es fuertemente Markoviano. Una demostración de este resultado puede encontrarse en [28], Cap. I §4. \square

Capítulo 3

Estimaciones de grandes desvíos

Vamos a considerar ahora la solución de la ecuación de Allen–Cahn estocástica con condiciones de Dirichlet en el intervalo $[0, L]$, en el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Sea $u^{(\varepsilon)}$ la solución de (1.4.5) con condición inicial $\varphi \in C_D[0, L]$, y u la solución de la ecuación determinística con la misma condición inicial. Fijemos $T > 0$, sea $\delta > 0$ dado, y sea $B_{\delta, T}(u)$ una δ -vecindad de $u(t)_{t \leq T}$:

$$B_{\delta, T}(u) = \{f \in C_D([0, L] \times [0, T]) : \|f - u\|_{\infty, T} < \delta\}$$

Veremos que se cumple

$$\mathbb{P}(u^{(\varepsilon)} \notin B_{\delta, T}(u)) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.0.1)$$

Podemos decir entonces que “típicamente”, para $T > 0$ fijo, las trayectorias de la solución estocástica permanecen cerca de la trayectoria determinística en el intervalo de tiempo $[0, T]$, para $\varepsilon \ll 1$. En este sentido, y como era de esperarse, las soluciones estocásticas son perturbaciones de la solución determinística. Las estimaciones de grandes desvíos, o de eventos raros, o de grandes fluctuaciones, como también son llamadas, se refieren a la estimación de las probabilidades de eventos que no son típicos, cuya probabilidad tiende a cero (en nuestro caso, con ε). Concretamente, interesa determinar a qué velocidad tienden a cero las probabilidades de eventos raros, y cómo depende dicha probabilidad de los conjuntos específicos en el espacio de trayectorias.

Este interés proviene de que estos “eventos raros” son responsables en el largo plazo de fenómenos que se observan en sistemas de diferente naturaleza. Veremos en el siguiente capítulo aplicaciones al estudio de metaestabilidad para $u^{(\varepsilon)}$, que corresponde con la descripción matemática del comportamiento que se presenta en muchos modelos donde coexisten dos fases, y que consiste en un abrupto e impredecible cambio de estado, después de haber permanecido por un largo tiempo en aparente equilibrio.

Veremos que se puede caracterizar el comportamiento cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ de $\mathbb{P}(u^{(\varepsilon)} \in A)$ para ciertos borelianos $A \subset C_D([0, L] \times [0, T])$ en términos de un funcional definido en el espacio de las trayectorias que se denomina funcional de grandes desvíos o funcional de acción. Si $I(A) = \inf_{f \in A} I(f)$, se obtiene

$$\mathbb{P}(u^{(\varepsilon)} \in A) \asymp e^{-\frac{I(A)}{\varepsilon}},$$

donde \asymp indica equivalencia logarítmica, es decir,

$$\varepsilon \log (\mathbb{P}(u^{(\varepsilon)} \in A)) \rightarrow -I(A).$$

Es claro que si vale (3.0.1), y si A es un conjunto que contiene una vecindad de la trayectoria determinística, entonces $I(A) = 0$.

Ejercicio 3.0.2. Muestre con un ejemplo que si $a(\varepsilon) \asymp e^{-\frac{b}{\varepsilon}}$ para cierto $b > 0$, no necesariamente $a(\varepsilon) e^{\frac{b}{\varepsilon}} = O(1)$.

La teoría de grandes desvíos para pequeñas perturbaciones estocásticas de sistemas dinámicos en dimensión finita fue desarrollada por M.I. Freidlin y A.D. Wentzell en [35] y [23]. Los resultados que veremos para la ecuación (1.4.3) generalizan aquellos y se deben a W. Faris y G. Jona-Lasinio ([18]), trabajo que seguiremos en esta sección. En el libro de E. Olivieri y M. Vares [33] se pueden encontrar resultados generales de grandes desvíos para diferentes situaciones, comenzando con los teoremas clásicos de estadística matemática que originaron la teoría, hasta generalizaciones que hicieron posible las aplicaciones a modelos de mecánica estadística.

3.1. Estimaciones de grandes desvíos para el proceso gaussiano

Consideremos el proceso $Z_0^{(\varepsilon)}(x, t)$, $x \in [0, L]$, $t \geq 0$, solución de la ecuación del calor con condición inicial 0, perturbada por un ruido blanco de intensidad $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\begin{cases} \partial_t Z_0^{(\varepsilon)} = \frac{1}{2} \partial_{xx} Z_0^{(\varepsilon)} + \sqrt{\varepsilon} \dot{W} \\ Z_0^{(\varepsilon)}(0, t) = Z_0^{(\varepsilon)}(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ Z_0^{(\varepsilon)}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Claramente, $Z_0^{(\varepsilon)} = \sqrt{\varepsilon} Z_0$, proceso gaussiano que fue estudiado en la subsección 1.3.2. En particular, recordemos que se puede escribir

$$Z_0^{(\varepsilon)} = \sqrt{\varepsilon} G_D \dot{W} \quad (3.1.2)$$

El tiempo $T > 0$ es arbitrario pero fijo en lo que sigue. Sea

$$C_{D,0}([0, L] \times [0, T]) = \{f \in C([0, T], C_D[0, L]) : f(0) \equiv 0\},$$

el espacio de trayectorias en $[0, T]$ a valores en $C_D[0, L]$ con condición inicial 0, dotado de la norma del supremo:

$$\|f\|_{\infty, T} = \sup_{x \in [0, L], t \in [0, T]} |f(x, t)|$$

Sea $I_0(f) : C_{D,0}([0, L] \times [0, T]) \rightarrow \mathbb{R}$ definido así

$$I_0(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L ((\partial_t - \frac{1}{2} \partial_{xx})f(x, t))^2 dx dt & \text{si la integral es finita} \\ \infty & \text{si no} \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Observe que si $I_0(f) < \infty$, entonces $I_0(f) = \frac{1}{2} \|G_D^{-1} f\|_2^2$. Para $A \subset C_{D,0}([0, L] \times [0, T])$, definimos

$$I_0(A) = \inf_{f \in A} I_0(f).$$

El siguiente resultado resume las estimaciones de grandes desvíos para $Z_0^{(\varepsilon)}$, y se demuestra después de establecer algunos resultados preliminares.

Teorema 3.1.1.

(a) Si $A \subset C_{D,0}([0, L] \times [0, T])$ es abierto, entonces

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(Z_0^{(\varepsilon)} \in A) \geq -I_0(A) \quad (3.1.4)$$

(b) Si $A \subset C_{D,0}([0, L] \times [0, T])$ es cerrado e $I_0(A) < \infty$, entonces

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(Z_0^{(\varepsilon)} \in A) \leq -I_0(A) \quad (3.1.5)$$

Dado un proceso estocástico continuo Y_t , $t \in [0, T]$, con valores en un espacio métrico F , éste induce naturalmente una medida de probabilidad μ_Y en el espacio de las trayectorias $S = C([0, T], F)$ (considerado con la norma del supremo y la correspondiente sigma-álgebra de Borel $\mathcal{B}(S)$):

$$\mu_Y(A) = \mathbb{P}(Y \in A)$$

Una técnica utilizada para obtener funcionales de grandes desvíos es a través del cálculo de la derivada de Radon–Nicolom de la probabilidad inducida por el proceso respecto de transformaciones de éste que cambian su centramiento. En nuestro caso, obtenemos:

Lema 3.1.1. Sean $Z_0^{(\varepsilon)}$ el proceso definido por (3.1.1), f una función dada en $C_{D,0}([0, L] \times [0, T])$, y el proceso $Y = Z_0^{(\varepsilon)} - f$. Si f satisface que

$$\langle G_D^{-1}f, G_D^{-1}f \rangle = \int_0^T \int_0^L (\partial_t f - \partial_{xx}f)^2 dx dt < \infty,$$

entonces

$$\frac{d\mu_Y}{d\mu_{Z_0^{(\varepsilon)}}}(w) = e^{-\frac{1}{2\varepsilon} (2 \langle G_D^{-1}w, G_D^{-1}f \rangle + \langle G_D^{-1}f, G_D^{-1}f \rangle)} \quad (3.1.6)$$

Una demostración de este resultado sigue de los resultados del Capítulo VII, §2 del libro de I.I.Gihman y A.V.Skorohod [27]. Un cálculo análogo para variables aleatorias gaussianas en \mathbb{R}^n ayuda a entender por qué vale la fórmula (3.1.6): Supongamos que Z, Y son vectores aleatorios en \mathbb{R}^n , $Z \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ para μ un vector fijo en \mathbb{R}^n y con matriz de covariancia Σ simétrica definida positiva y no singular,

de modo que sabemos que $\Sigma = AA^*$ para A una matriz no singular. De (1.2.1) podemos calcular de inmediato

$$\frac{d\mu_Y}{d\mu_Z}(x) = e^{-\frac{1}{2}(-2\langle A^{-1}x, A^{-1}\mu \rangle + \langle A^{-1}\mu, A^{-1}\mu \rangle)} \quad (3.1.7)$$

Recordamos de la observación 1.3.1 que la covariancia del proceso $Z_0^{(\varepsilon)}$ es $\varepsilon\Gamma_0 = \varepsilon G_D G_D^*$, de modo que la fórmula (3.1.6) corresponde exactamente con (3.1.7), con $-f$ en el papel de μ , y $\varepsilon\Gamma_0$ en el de Σ .

Proposición 3.1.1. *Sea $\delta > 0$. Para cada $\eta > 0$, si ε suficientemente pequeño, se cumple*

$$\mathbb{P}(\|Z_0^{(\varepsilon)} - f\|_{\infty, T} < \delta) \geq e^{-\frac{1}{\varepsilon}(I_0(f) + \eta)} \quad (3.1.8)$$

Demostración. Basta considerar f tal que $I_0(f) < \infty$. Abreviamos

$$B_\delta = B_{\delta, T}(0) = \{g \in C_{D,0}([0, L] \times [0, T]) : \|g\|_{\infty, T} < \delta\},$$

por el lema anterior, recordando (3.1.2),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|Z_0^{(\varepsilon)} - f\|_{\infty, T} < \delta) &= \int_{B_\delta} d\mu_Y = \\ &= \int_{B_\delta} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}(2\langle G_D^{-1}w, G_D^{-1}f \rangle + \langle G_D^{-1}f, G_D^{-1}f \rangle)} d\mu_{Z_0^{(\varepsilon)}}(w) = \\ &= e^{-\frac{I_0(f)}{\varepsilon}} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\|Z_0^{(\varepsilon)}\|_{\infty, T} < \delta} e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\langle \dot{W}, G_D^{-1}f \rangle}) = \\ &= e^{-\frac{I_0(f)}{\varepsilon}} \mathbb{E}(e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\langle \dot{W}, G_D^{-1}f \rangle} | \mathbf{1}_{\|Z_0^{(\varepsilon)}\|_{\infty, T} < \delta}) \mathbb{P}(\|Z_0^{(\varepsilon)}\|_{\infty, T} < \delta) \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Jensen,

$$\mathbb{E}(e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\langle \dot{W}, G_D^{-1}f \rangle} | \mathbf{1}_{\|Z_0^{(\varepsilon)}\|_{\infty, T} < \delta}) \geq e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathbb{E}(\langle \dot{W}, G_D^{-1}f \rangle | \mathbf{1}_{\|Z_0^{(\varepsilon)}\|_{\infty, T} < \delta})}$$

La esperanza en el exponente es cero por simetría, por lo que se tiene

$$\mathbb{P}(\|Z_0^{(\varepsilon)} - f\|_{\infty, T} < \delta) \geq e^{-\frac{1}{\varepsilon}I_0(f)} \mathbb{P}(\|Z_0^{(\varepsilon)}\|_{\infty, T} < \delta)$$

Esta última probabilidad tiende a uno con ε , de donde sigue (3.1.8). \square

Consideramos ahora $J_0^s \subset C_{D,0}([0, L] \times [0, T])$, $J_0^s = \{f : I_0(f) \leq s\}$, y denotemos por $d_T(f, A)$ la distancia usual entre $f \in C_{D,0}([0, L] \times [0, T])$ y un subconjunto A de este espacio.

Proposición 3.1.2. *Sea $\delta > 0$. Para cada $\eta > 0$ y ε suficientemente pequeño,*

$$\mathbb{P}(d_T(Z_0^{(\varepsilon)}, J_0^s) \geq \delta) \leq e^{-\frac{1}{\varepsilon}(s-\eta)} \quad (3.1.9)$$

Demostración. Sean γ_n, f_n los autovalores y correspondientes autovectores del operador Γ_0 (ver la observación (1.3.1)). Sean

$$Z_N = \sum_{n=1}^N \langle Z_0, f_n \rangle f_n \quad \text{y} \quad \tilde{Z}_N = Z - Z_N$$

Es fácil ver que los coeficientes $\langle Z_0, f_n \rangle$ son variables independientes, gaussianas, centradas con $\text{Var}\langle Z_0, f_n \rangle = \gamma_n$. Estimamos la probabilidad en (3.1.9) separando según $\|\sqrt{\varepsilon}\tilde{Z}_0\|_{\infty, T} < \delta$, o no:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(d_T(Z_0^{(\varepsilon)}, J_0^s) \geq \delta) &\leq \\ &\mathbb{P}(\|\sqrt{\varepsilon}\tilde{Z}_N\|_{\infty, T} \geq \delta) + \mathbb{P}(d_T(Z_0^{(\varepsilon)}, J_0^s) \geq \delta, \|\sqrt{\varepsilon}\tilde{Z}_N\|_{\infty, T} < \delta) \\ &\leq \mathbb{P}(\|\sqrt{\varepsilon}\tilde{Z}_N\|_{\infty, T} \geq \delta) + \mathbb{P}(\sqrt{\varepsilon}Z_N \notin J_0^s) \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\text{Var } \tilde{Z}_N(x, t) = \sum_{n \geq N+1} \gamma_n |f_n(x, t)|^2$$

decrece a 0 cuando $N \uparrow \infty$, por lo que $\|\text{Var } \tilde{Z}_N\|_{\infty, T} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. De la desigualdad de Borell (ver por ejemplo en la pág. 43 del libro de R. Adler [1]) se obtiene que para N suficientemente grande, existe una constante $C > 0$ que no depende de ε tal que

$$P(\|\sqrt{\varepsilon}\tilde{Z}_N\|_{\infty, T} \geq \delta) \leq C e^{-\frac{\delta}{\varepsilon}} \quad (3.1.10)$$

Para estimar la probabilidad restante, observamos

$$\begin{aligned} I_0(Z_N) &= \frac{1}{2} \|G^{-1}(Z_N)\|^2 = \frac{1}{2} \langle Z_N, \Gamma^{-1}(Z_N) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle Z_N, \sum_{n=1}^N \langle Z, f_n \rangle \gamma^{-1} f_n \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \langle Z, f_n \rangle^2 \gamma_n^{-1} \end{aligned}$$

La suma $\sum_{n=1}^N \langle Z, f_n \rangle^2 \gamma_n^{-1} \sim \chi_N^2$, donde χ_N^2 es la distribución de la suma de los cuadrados de N variables normales $\mathcal{N}(0, 1)$ independientes. Esta satisface

$$\mathbb{E}(e^{\frac{t}{2}\chi_N^2}) < \infty \quad \text{si } t < 1$$

Entonces, por la desigualdad de Markov,

$$\mathbb{P}(\sqrt{\varepsilon}Z_N \notin J_0^s) = \mathbb{P}(I_0(Z_N) > \frac{s}{\varepsilon}) = \mathbb{P}(\frac{\chi_N^2}{2} > \frac{s}{\varepsilon}) \leq \mathbb{E}(e^{\frac{t}{2}\chi_N^2}) e^{-\frac{ts}{\varepsilon}}.$$

Escogiendo $t = 1 - \frac{\eta}{2s}$, (3.1.9) sigue de (3.1.10) y de esta última desigualdad, ya que las constantes involucradas no dependen de ε . \square

Proposición 3.1.3. *El funcional de acción es semicontinuo inferiormente en $C_{D,0}([0, L] \times [0, T])$.*

Demostración. Debemos mostrar que si $f_n \rightarrow f$ en $C_{D,0}([0, L] \times [0, T])$, entonces $I_0(f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I_0(f_n)$. Podemos suponer que el lado derecho es finito, y tomando subsucesiones que denominamos con el mismo subíndice, podemos suponer también que $I_0(f_n) = \frac{1}{2} \|G_D^{-1}(f_n)\|_2^2$ es convergente. Si $G_D^{-1}f_n = h_n$, tenemos que h_n es una sucesión acotada en L^2 , por lo que tiene una subsucesión que converge débilmente digamos a $h \Rightarrow f_n = G_D h_n \rightarrow G_D h$ (débilmente) $\Rightarrow f = G_D h$. Por otro lado,

$$2\langle h_n, h \rangle \leq \|h_n\|_2^2 + \|h\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad \|h\|_2^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|h_n\|_2^2,$$

que es precisamente lo que se deseaba mostrar. \square

Proposición 3.1.4. *Para cada $s > 0$, J_0^s es un conjunto compacto.*

Demostración. Sea $s > 0$. Por la proposición anterior, el conjunto J_0^s es completo. Veamos que es totalmente acotado, para concluir compacidad. Sea $f \in J_0^s$, $f = G_D h$. Entonces

$$|f(x, t)| \leq \|G_D(x, t)\|_2 \|h\|_2 \leq \|G(x, t)\|_2 \sqrt{2s}$$

Como $\|G(x, t)\|_2$ es uniformemente acotada en $[0, L] \times [0, T]$, sigue que J_0^s es uniformemente acotado. Por otro lado, un cálculo semejante al realizado en (1.3.10) muestra que existen $\beta > 0$ y $C > 0$ constantes tales que

$$|f(x + \kappa, t + \kappa) - f(x, t)| \leq C\kappa^\beta \|h\|_2$$

de modo que f es uniformemente Hölder en $[0, L] \times [0, T]$, por lo que el conjunto J_0^s es equicontinuo, y del teorema de Arzelà–Ascoli concluimos que es totalmente acotado. \square

Demostración del Teorema 3.1.1 Sea $A \subset C_{D,0}([0, L] \times [0, T])$ y $f \in A$. Como A abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B_{\delta,T}(f) = \{w : \|f - w\|_{\infty,T} < \delta\} \subset A$. Entonces, por la Proposición 3.1.1, dado $\eta > 0$, para ε pequeño,

$$e^{-\frac{1}{\varepsilon}(I_0(f)+\eta)} \leq \mathbb{P}(Z_0^{(\varepsilon)} \in B_{\delta}(f)) \leq \mathbb{P}(Z_0^{(\varepsilon)} \in A)$$

Como f es arbitraria, se tiene (3.1.4). Para verificar (3.1.5), sea $\eta > 0$, A cerrado, y $s = I_0(A) - \frac{\eta}{2}$. Como J_0^s es compacto y $A \cap J_0^s = \emptyset$, tiene que ser $d_T(A, J_0^s) = \delta \geq 0$. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(Z_0^{(\varepsilon)} \in A) \leq \mathbb{P}(d_T(Z_0^{(\varepsilon)}, J_0^s) \geq \delta) \leq e^{-\frac{s-\frac{\eta}{2}}{\varepsilon}} \leq e^{-\frac{1}{\varepsilon}(I_0(A)-\eta)}$$

\square

3.2. Estimaciones de grandes desvíos para la ecuación de Allen–Cahn estocástica

A partir de las estimaciones de grandes desvíos para el proceso $\sqrt{\varepsilon}Z_0 = Z_0^{(\varepsilon)}$, se pueden obtener sin mucha dificultad las estimaciones correspondientes para el proceso $u^{(\varepsilon)}$, solución de la ecuación de Allen–Cahn estocástica (1.4.5), o en su versión integral,

$$u^{(\varepsilon)} = g_D\varphi - G_D V'(u^{(\varepsilon)}) + \sqrt{\varepsilon}Z_0 \quad (3.2.1)$$

Cuando se quiera enfatizar la condición inicial φ , escribiremos $u^{(\varepsilon)}(\cdot; \varphi)$. Denotamos

$$C_{D,\varphi}([0, L] \times [0, T]) = \{f \in C([0, T], C_D[0, L]) : f(0) = \varphi\} \quad (3.2.2)$$

Para cada φ dada, podemos pensar $u^{(\varepsilon)}$ como una función de $Z_0^{(\varepsilon)}$, $u^{(\varepsilon)} = \Phi_{\varphi}(Z_0^{(\varepsilon)})$, donde $\Phi_{\varphi} : C_{D,0}([0, L] \times [0, T]) \rightarrow C_{D,\varphi}([0, L] \times [0, T])$ asocia a cada w la única solución continua de $u = -G_D V'(u) + w + g_D\varphi$. Es fácil ver que la función Φ_{φ} es continua, y su inversa también. En efecto, sean $w_1, w_2 \in C_{D,0}([0, L] \times [0, T])$, $u_1 = \Phi_{\varphi}(w_1)$, $u_2 = \Phi_{\varphi}(w_2)$.

Procediendo como en la demostración de la Proposición 2.2.2 tenemos que existe una constante A que depende de $\|w_1\|_{\infty, T}$ y de $\|w_2\|_{\infty, T}$ tal que

$$\|\Phi_\varphi(w_1) - \Phi_\varphi(w_2)\|_{\infty, T} \leq \|w_1 - w_2\|_{\infty, T} e^{AT}, \quad (3.2.3)$$

de donde es clara la continuidad de Φ_φ . La continuidad de la inversa se demuestra de forma análoga. Esto permite definir el funcional de acción para u a partir del funcional I_0 : sea $v \in C_{D, \varphi}([0, L] \times [0, T])$, y definamos

$$I(v) = I_0(\Phi_\varphi^{-1}(v)) \quad (3.2.4)$$

Observemos que, dada $v \in C_{D, \varphi}([0, L] \times [0, T])$, si v pertenece al dominio de G_D^{-1} , entonces

$$\begin{aligned} I(v) &= I_0(\Phi_\varphi^{-1}(v)) = I_0(v - g\varphi + G_D V'(v)) = \frac{1}{2} \|G_D^{-1}(v - g\varphi) + V'(v)\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (\partial_t v - \partial_{xx} v + V'(v))^2 dx dt, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

de forma que el funcional de grandes desvíos para $u^{(\varepsilon)}$ cumple

$$I(v) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L ((\partial_t - \frac{1}{2} \partial_{xx})v(x, t) + V'(v)(x, t))^2 dx dt & \text{si la integral es finita} \\ \infty & \text{si no.} \end{cases} \quad (3.2.6)$$

Tenemos entonces un resultado análogo al Teorema 3.1.1

Teorema 3.2.1.

(a) Si $A \subset C_{D, \varphi}([0, L] \times [0, T])$ es abierto, entonces

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(u^{(\varepsilon)} \in A) \geq -I(A)$$

(b) Si $A \subset C_{D, \varphi}([0, L] \times [0, T])$ es cerrado, entonces

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(u^{(\varepsilon)} \in A) \leq -I(A)$$

Demostración. Como $u^{(\varepsilon)} = \Phi_\varphi(Z_0^{(\varepsilon)})$, dado $A \subset C_{D, \varphi}([0, L] \times [0, T])$,

$$\mathbb{P}(u^{(\varepsilon)} \in A) = \mathbb{P}(Z_0^{(\varepsilon)} \in \Phi_\varphi^{-1}(A))$$

Si A es abierto (o cerrado), $\Phi_\varphi^{-1}(A)$ es abierto (o cerrado), por la continuidad de la función Φ_φ^{-1} , de modo que las estimaciones (a) y (b) del Teorema 3.2.1 se obtienen directamente de (3.1.4) y (3.1.5). □

Proposición 3.2.1. *El funcional I tiene las siguientes propiedades:*

- (a) *Es semicontinuo inferiormente en $C_{D,\varphi}([0, L] \times [0, T])$.*
- (b) *El conjunto*

$$J_{(\varphi)}^s = \{v \in C_{D,\varphi}([0, L] \times [0, T]) : I(v) \leq s\}$$

es compacto.

- (c) *Si A es un conjunto cerrado tal que $I(A) < \infty$, entonces I alcanza el ínfimo en A .*
- (d) *Si u es una solución de la ecuación determinística en el intervalo $[0, T]$, y $A \subset C_{D,\varphi}([0, L] \times [0, T])$ es un conjunto cerrado que no la contiene, entonces $I(A) > 0$.*
- (e) *Si v es una función tal que $v(x, 0) \in C^2$ e $I(v) < \infty$, entonces existe una sucesión de funciones regulares v_n tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} I(v_n) = I(v)$.*

Demostración. La parte (a) sigue directamente de la definición de I y de la proposición 3.1.3, porque Φ_φ^{-1} es continua.

El conjunto $J_{(\varphi)}^s = \Phi_\varphi(J_0^s)$. La compacidad sigue de la Proposición 3.1.4, y de la continuidad de Φ_φ , mostrando (b).

Para mostrar (c), sea A cerrado, $I(A) = a$. Consideramos el conjunto $J_{(\varphi)}^{a+1} \cap A$, que es compacto por (b), de modo que I alcanza el ínfimo en él, por (a).

Por (c), si $I(A) = 0$ para A como en (d), entonces existe $v \in A$ tal que $I(v) = 0 \Leftrightarrow I_0(\Phi_\varphi^{-1}(v)) = 0 \Leftrightarrow \Phi_\varphi^{-1}(v) = 0 \Leftrightarrow v$ es solución de la ecuación determinística, lo cual no puede ser, de modo que $I(A) > 0$, mostrando (d).

Finalmente, veamos (e). Sea v como en el enunciado. Por las definiciones de los funcionales, $I(v) = I_0(\Phi_\varphi^{-1}(v)) = \frac{1}{2}\|h\|_2^2$, llamando $h = G_D^{-1}((\Phi_\varphi^{-1}(v)))$. Sea h_n una sucesión de funciones regulares que

aproxima h , que es una función de L^2 . No es difícil verificar, de las propiedades regularizantes de G_D , que si h_n regular, entonces $G_D(h_n)$ también es regular, y si $\varphi \in C^2$, entonces $\Phi_\varphi(G_D(h_n))$ es regular. Sea entonces $v_n = \Phi_\varphi(G_D(h_n))$. Por la construcción $I(v_n) \rightarrow I(v)$. Como el operador G_D es continuo como operador de $L^2([0, L] \times [0, T])$ en $C_D([0, L] \times [0, T])$, entonces $G_D(h_n)$ es convergente en la norma del supremo. Por la dependencia continua en $\varphi + w$ de la correspondiente u , solución de $u = g_D(\varphi) - G_D(V'(u)) + w$, concluimos también que $v_n \rightarrow v$. \square

Ejercicio 3.2.1. Usando la Proposición 3.2.1, demuestre (3.0.1).

Comentario. Con técnicas muy cercanas a las estudiadas en este capítulo se puede tratar el problema de grandes desvíos para la medida invariante asociada con el proceso $u^{(\varepsilon)}$, como se puede ver en [22], o en [23].

Capítulo 4

Metaestabilidad para la ecuación de Allen–Cahn estocástica

M. Cassandro, A. Galves, E. Olivieri y M. Vares introducen en [11] una propuesta para la descripción matemática del fenómeno de la metaestabilidad, donde también se discuten las características de este comportamiento en sistemas termodinámicos que sufren transiciones de fase, y diferentes enfoques para describirlo. Esta propuesta es aplicada en ese artículo a un par de modelos de partículas, y en [26] se muestra que vale en un modelo relacionado con los anteriores, descrito por pequeñas perturbaciones de un sistema dinámico en \mathbb{R}^d , en el espíritu de los modelos de M. Freidlin y A. Wentzell [23]. Remitimos a [33] para una amplia discusión del fenómeno y su importancia en el contexto de la mecánica estadística fuera del equilibrio, así como para su aplicación en diferentes modelos matemáticos relacionados.

La propuesta caracteriza el comportamiento metaestable para un sistema si se cumplen dos propiedades: la estabilidad de las medias temporales, en un sentido que se hará preciso en la Sección 4.3, y que la distribución límite del tiempo de pasaje sea exponencial, lo que expresa la propiedad de ser “impredecible” o “abrupto”. Recordamos que una variable aleatoria T tiene distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$ si $\forall t > 0$,

$$\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t} \tag{4.0.1}$$

Ésta cumple que, dados $s, t > 0$,

$$\mathbb{P}(T > t + s \mid T > s) = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(T > t) \quad (4.0.2)$$

Si pensamos T como la duración de algo, la propiedad anterior se traduce en palabras como “está igual de nuevo mientras dura”, y se describe como la propiedad de falta de memoria de la distribución exponencial. Se puede demostrar fácilmente que la exponencial es la única distribución continua con esta propiedad.

Ejercicio 4.0.2. Considere la función de variable real $U(t) = \mathbb{P}(T > t)$. Verifique que $U(t + s) = U(t)U(s)$ y concluya que vale la afirmación anterior.

Si Y es la distribución del número de lanzamientos hasta que salga la primera cara en una secuencia de lanzamientos independientes de una moneda con probabilidad de cara $p \in (0, 1)$, se tiene que

$$\mathbb{P}(Y = k) = p(1 - p)^{k-1} \quad k = 1, 2, \dots$$

Una tal distribución se dice geométrica de parámetro p .

Ejercicio 4.0.3. Verifique que la distribución geométrica tiene la propiedad de falta de memoria, es decir, dados $k, j \in \mathbb{N}$, positivos

$$\mathbb{P}(Y > k + j \mid Y > k) = (1 - p)^j = \mathbb{P}(Y > j)$$

Se puede verificar que la geométrica es la única distribución discreta sin memoria. Es bien conocido que se puede obtener la distribución exponencial como límite de geométricas. Una demostración y discusión se encuentra en la página 1 del libro de W. Feller [19].

En este capítulo, consideraremos las soluciones de la ecuación de Allen–Cahn en volumen finito $[0, L]$, es decir, las soluciones de (1.4.5) como un proceso estocástico continuo a valores en $C_D[0, L]$, según explicado en la sección 2.2. Recordamos que éstas serán denotadas por $u^{(\varepsilon)}(\cdot; \varphi)$ cuando se quiera enfatizar la condición inicial, y que denotamos por $u(\cdot; \varphi)$ la correspondiente solución de la ecuación determinística. Consideramos $L > 2\pi$, de forma que existen al menos cinco puntos críticos para la ecuación, dos estables ($\pm m_1$) y los demás puntos tipo silla.

En la sección 1.1 se encuentra un diagrama con los puntos críticos y las órbitas que los conectan.

En las demostraciones se utilizan de manera fundamental los resultados de grandes desvíos para este modelo mostrados en el capítulo anterior, debidos a W. Faris y G. Jona-Lasinio [18], que nos permiten adaptar al caso presente las ideas que emplearon M.I. Freidlin y A.D. Wentzell en [23] y A. Galves, E. Olivieri y M. E. Vares en [26] para estudiar problemas similares en el caso de pequeñas perturbaciones estocásticas de sistemas dinámicos en dimensión finita. Veremos un resultado sobre el lugar de pasaje (de uno a otro dominio de atracción), luego estimaciones sobre la magnitud del tiempo de pasaje, y finalmente mostraremos que el proceso exhibe comportamiento metaestable, es decir, veremos que las medias temporales son estables, y que la distribución del tiempo de salida es exponencial, en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$.

Para simplificar la notación, omitiremos el subíndice D en los núcleos g_D y G_D , y los correspondientes operadores, así como los subíndices 0 del proceso Z_0 e ∞ en la norma del supremo $\|\cdot\|$ en $C_D[0, L]$, ya que será la única norma utilizada en ese espacio en lo que sigue.

Denotamos por $B_a(\varphi)$ la bola de radio $a > 0$ y centro $\varphi \in C_D[0, L]$,

$$B_a(\varphi) = \{f \in C_D[0, L] : \|f - \varphi\|_\infty < a\}$$

Consideramos el conjunto acotado $\mathcal{A} = B_R(0)$ con R tan grande como para que

- Todos los puntos de equilibrio $\pm m_1, \pm m_2 \cdots 0$ y las órbitas que los conectan estén contenidos en \mathcal{A} .
- $S(\varphi) > 2 \forall \varphi \in \partial B_{R-1}(0)$.

Recordamos que \mathcal{D}^+ es el dominio de atracción de m_1 y \mathcal{D}^- el de $-m_1$. Denotamos por $\mathcal{A}^+ = \mathcal{D}^+ \cap \mathcal{A}$, y por $\mathcal{A}^- = \mathcal{D}^- \cap \mathcal{A}$.

Dado un conjunto $\mathcal{C} \in \mathcal{B}(C_D[0, L])$, sea

$$\tau_\varphi^{(\varepsilon)}(\mathcal{C}) = \inf\{t \geq 0 : u^{(\varepsilon)}(t; \varphi) \in \mathcal{C}\},$$

el tiempo de llegada a \mathcal{C} . En particular, vamos a considerar el tiempo de salida de \mathcal{A}^+

$$\tau_\varphi^{(\varepsilon)} = \tau_\varphi^{(\varepsilon)}(C_D[0, L] \setminus \mathcal{A}^+)$$

para φ en una vecindad de m_1 . El parámetro ε y la condición inicial serán omitidos cuando redundantes o claros del contexto, de forma que $\tau_\varphi^{(\varepsilon)}$ será denotado también por τ simplemente.

\mathbb{P}_φ denotará la ley inducida por $u^{(\varepsilon)}(\cdot; \varphi)$ en el espacio de trayectorias $C(\mathbb{R}^+, C_D[0, L])$.

4.1. El pasaje entre dominios de atracción.

El pasaje entre dominios de atracción se refiere al fenómeno siguiente: consideremos soluciones de la ecuación de Allen-Cahn estocástica que tienen condición inicial en una vecindad de uno de los mínimos (por ejemplo m_1). Al cabo de algún tiempo llegan al dominio de atracción del otro mínimo ($-m_1$), de modo que “pasan” de uno a otro dominio o cuenca de atracción. Como ya vimos, este comportamiento no ocurre con la dinámica determinística: una trayectoria comenzando en una vecindad de un mínimo es atraída por este sin alejarse mucho en ningún tiempo futuro. Este pasaje (“tunnelling”, en inglés) es consecuencia del ruido. En esta sección veremos que en efecto el pasaje se produce, y mostraremos que, en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$, tiene lugar, con probabilidad que tiende a uno con ε , en una vecindad del punto de mínimo potencial en la frontera entre ambos dominios. (La trayectoria busca un “valle” para pasar).

Definimos $B_\delta(\pm m_2) = B_\delta(m_2) \cup B_\delta(-m_2)$.

El resultado que sigue está enunciado para el lugar de pasaje de \mathcal{A}^+ hacia \mathcal{A}^- , pero es claro de la simetría que también se cumplirá el análogo para el pasaje inverso.

Teorema 4.1.1. *Existe $c > 0$ tal que, dado $\delta > 0$*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}_\varphi(u^{(\varepsilon)}(\tau^{(\varepsilon)}) \notin B_\delta(\pm m_2)) = 0. \quad (4.1.1)$$

$\forall \varphi \in B_c(m_1)$. *El límite es uniforme en la condición inicial si c es suficientemente pequeño.*

La siguiente construcción, usada en [23] para el caso de dimensión finita, nos permite reducir el cálculo de la probabilidad en (4.1.1) al estudio de la trayectoria desde la última visita a una pequeña vecindad de m_1 antes de salir de \mathcal{A}^+ .

Para cada $r > 0$ definimos

$$\gamma_r = \{f \in C_D[0, L] : \|f - m_1\| = r\}$$

Sean $b > 0$ y $0 < a < b/2$ tales que $B_b(m_1) \subset \mathcal{A}^+$; serán escogidos después convenientemente pequeños.

Sean σ_n y η_n secuencias de tiempos de parada definidos como sigue:

$$\sigma_0 = 0, \quad \eta_0 = \inf\{t > \sigma_0 : u^{(\varepsilon)}(t) \in \gamma(b)\}$$

e inductivamente

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \inf\{t > \eta_{n-1} : u^{(\varepsilon)}(t) \in \gamma(a) \cup \partial\mathcal{A}^+\} \\ \eta_n &= \inf\{t > \sigma_n : u^{(\varepsilon)}(t) \in \gamma(b)\} \end{aligned}$$

Si alguno de los conjuntos arriba fuese vacío, se define el tiempo correspondiente como siendo ∞ . Definimos la cadena de Markov

$$Y_n = u^{(\varepsilon)}(\sigma_n), \text{ y el tiempo } N = \inf\{n > 0 : Y_n \in \partial\mathcal{A}^+\}. \quad (4.1.2)$$

Sea $\varphi \in B_a(m_1)$. Por la propiedad fuerte de Markov tenemos

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_\varphi(u^{(\varepsilon)}(\tau) \notin B_\delta(\pm m_2)) = \\ &\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_\varphi(u^{(\varepsilon)}(\sigma_n) \in \partial\mathcal{A}^+ \setminus B_\delta(\pm m_2) | N = n) \mathbb{P}_\varphi(N = n) \\ &\leq \sup_{\phi \in \gamma(a)} \mathbb{P}_\phi(Y_1 \in \partial\mathcal{A}^+ \setminus B_\delta(\pm m_2) | Y_1 \in \partial\mathcal{A}^+) \\ &\leq \sup_{\phi \in \gamma(a)} \frac{\mathbb{P}_\phi(Y_1 \in \partial\mathcal{A}^+ \setminus B_\delta(\pm m_2))}{\mathbb{P}_\phi(Y_1 \in \partial\mathcal{A}^+)} \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Para demostrar el Teorema 4.1.1 es suficiente entonces mostrar una cota superior para el denominador y una cota inferior para el numerador, de modo que el cociente tienda a cero con ε . Los siguientes cuatro lemas contienen las estimaciones necesarias para hallar estas cotas, después de lo cual se concluye la demostración del Teorema 4.1.1.

Denotemos $\Delta S = S(m_2) - S(m_1)$.

Lema 4.1.1. *Dado $b > 0$ como arriba, existe $0 < a < b/2$ tal que para cualquier $\phi \in \gamma(a)$,*

$$\mathbb{P}_\phi(Y_1 \in \partial\mathcal{A}^+) \geq e^{-\frac{2\Delta S + kb}{\varepsilon}}$$

si ε es suficientemente pequeño, donde $k > 0$ es una constante que no depende de b .

Demostración. Sea b dado y $a < b/2$ tal que si $\phi \in \gamma(a)$, entonces la órbita determinística con condición inicial ϕ no interseca $\gamma(b/2)$. Basta exhibir, para cada $\phi \in \gamma(a)$ una trayectoria v_ϕ con $v(0) = \phi$ tal que toda trayectoria en una vecindad de ella salga de \mathcal{A}^+ después de visitar $\gamma(b)$ sin retornar a $\gamma(a)$, de modo que

$$\mathbb{P}_\phi(Y_1 \in \partial\mathcal{A}^+) \geq \mathbb{P}_\phi(d_T(u^{(\varepsilon)}, v_\phi) < \delta) \quad (4.1.4)$$

para δ y T convenientes, y tal que para algún $k > 0$,

$$I(v_\phi) \leq 2\Delta S + \frac{kb}{2}. \quad (4.1.5)$$

El lema sigue entonces del Teorema 3.2.1, parte (a). Obtenemos la trayectoria v_ϕ por concatenación de cinco tramos $v_i, i = 1, 2, \dots, 5$. El funcional de acción $I(v_\phi)$ es la suma de los funcionales de cada tramo. Sean

- ϕ_4 en la órbita $v_{2,-1}$ que conecta m_2 con $-m_1$, con $\|\phi_4 - m_2\| = \frac{b}{3}$.
- ϕ_3 en la órbita $v_{2,1}$ que conecta m_2 con m_1 , con $\|\phi_3 - m_2\| = \frac{b}{3}$.
- $\phi_2 = u(T_3; \phi_3)$ donde $T_3 = \inf\{t \geq 0 : u(t; \phi_3) \in \gamma(b)\}$
- $\phi_1 = u(1; \phi)$

Los cinco tramos son los siguientes:

- v_1 sigue el flujo determinístico desde la condición inicial ϕ dada hasta ϕ_1 , por tiempo 1. Tiene funcional de acción $I(v_1) = 0$.
- $v_2(t) = \phi_1(1 - \frac{t}{T_2}) + \phi_2 \frac{t}{T_2}$ es la interpolación lineal entre ϕ_1 y ϕ_2 en tiempo $T_2 = \|\phi_1 - \phi_2\|$.
- v_3 es el tramo que “sube la cuesta”. Es un pedazo de la órbita $v_{2,1}$ con el tiempo revertido (el “contraflujo”) desde ϕ_2 hasta ϕ_3 , en el tiempo T_3 que le toma. En fórmulas, v_3 es la solución de

$\partial_t v = S'(v), v(0) = \phi_2$. Su funcional de acción aporta la mayor contribución, y podemos estimarlo:

$$I(v_3) = \frac{1}{2} \int_0^{T_3} \langle \partial_t v_3 + S'(v_3), \partial_t v_3 + S'(v_3) \rangle dt = \\ 2 \int_0^{T_3} \langle S'(v_3), \partial_t v_3 \rangle = 2(S(\phi_3) - S(\phi_2)) dt \leq 2\Delta S$$

- v_4 es la interpolación lineal entre ϕ_3 y ϕ_4 en tiempo $T_4 = \|\phi_3 - \phi_4\|$, y su contribución al funcional de acción se calcula como la de v_2 .
- v_5 es finalmente la evolución por el flujo determinístico desde ϕ_4 hasta alcanzar $B_b(-m_1)$, lo cual sucede en un tiempo T_5 . Tiene funcional de acción $I(v_5) = 0$.

Resta estimar el funcional de acción de las interpolaciones lineales. Veamos

$$I(v_2) \leq 2 \int_0^{T_2} \int_0^L \frac{|\phi_2(x) - \phi_1(x)|^2}{T_2^2} dx dt + 2 \int_0^{T_2} \int_0^L |V'(v_2)|^2 dx dt \\ + 2 \int_0^{T_2} \int_0^L |\phi_1''(x)(1 - \frac{t}{T_2}) + \phi_2'' \frac{t}{T_2}|^2 dx dt \leq k_1 \|\phi_2 - \phi_1\|$$

La constante k_1 depende de $\|v_2\|_{\infty, T_2}$, de L y de $\|\phi_1''\|$ y $\|\phi_2''\|$. Que estas dos últimas normas sean acotadas es una consecuencia del efecto regularizante del flujo determinístico. El resultado preciso está en el Lema 1 del Apéndice. El funcional de acción de v_4 se estima exactamente igual, y finalmente se obtiene que $I(v_\varphi)$ satisface (4.1.5). Tomando $\delta < b/2$ se satisface (4.1.4) por construcción . □

La estimación del numerador en (4.1.3) es un poco más delicada, ya que se debe mostrar que todas las trayectorias que dan lugar al evento considerado tienen funcional de acción grande comparado con la cota obtenida para el denominador, de forma que el cociente tienda a cero con ε . Los tres lemas que siguen proporcionan las estimaciones necesarias.

En el próximo se estima el funcional de acción de las trayectorias que visitan conjuntos de mayor potencial que el inicial, lo que, mediante los resultados de grandes desvíos, permite estimar las probabilidades correspondientes.

Para cada $\mathcal{E} \subset C_D[0, L]$ y $r > 0$ definimos

$$\mathcal{E}^r = \{\psi : d(\psi, \mathcal{E}) < r\}.$$

Lema 4.1.2. *Sea $\psi \in C_D[0, L]$ de clase C^2 y $\mathcal{F} \subset C_D[0, L]$ un conjunto cerrado tal que para $r > 0$ con $d(\psi, \mathcal{F}) > 3r$, $\inf_{\xi \in \mathcal{F}^{2r}} S(\xi) > K > S(\psi)$. entonces se cumple que, para $T > 0$ y $\varepsilon \ll 1$,*

$$(a) \quad \mathbb{P}_\psi\{\tau(\mathcal{F}^{\frac{3}{2}r}) \leq T\} \leq e^{-2\frac{(K-S(\psi))}{\varepsilon}}.$$

(b) *Si $\mathcal{L} \subset C_D[0, L]$ es un conjunto acotado, dado $T > 0$ existe $a > 0$ tal que $\mathbb{P}_\varphi\{\tau(\mathcal{F}^r) \leq T, \tau(C_D[0, L] \setminus \mathcal{L}) > \tau(\mathcal{F}^r)\} \leq e^{-2\frac{(K-S(\psi))}{\varepsilon}}$, para todo $\varphi \in B_a(\psi)$.*

Demostración. Si $u \in \{\tau(\mathcal{F}^{2r}) \leq T\}$, $u(0) = \psi$ y u es regular, entonces

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2} \int_0^{\tau(\mathcal{F}^{2r})} \langle \partial_t u + S'(u), \partial_t u + S'(u) \rangle dt = \\ &\frac{1}{2} \int_0^{\tau(\mathcal{F}^{2r})} \|\partial_t u - S'(u)\|_2^2 dt + 2 \int_0^{\tau(\mathcal{F}^{2r})} \langle \partial_t u, S'(u) \rangle dt > 2(K - S(\psi)) \end{aligned}$$

Por la proposición 3.2.1-(e), tenemos que esta cota vale también para $u \in C_{D,\psi}([0, L] \times [0, T])$ tal que $I(u) < \infty$. Entonces la parte (a) del lema sigue de (b) en el Teorema 3.2.1. La parte (b) del lema sigue de la parte (a) por un argumento de continuidad en las condiciones iniciales, similar al empleado en la proposición 2.2.2 después de observar que el ruido correspondiente permanece en un conjunto acotado si u lo está. \square

El siguiente lema acota la probabilidad de que las trayectorias permanezcan en un conjunto acotado y sin llegar cerca de los puntos de equilibrio por mucho tiempo. Supongamos que hay $2J + 1$ puntos de equilibrio. Para cada $r > 0$ consideramos $\mathcal{C}_r = \cup_{j=1}^J B_r(\pm m_j) \cup B_r(0)$. Recordamos que todos los puntos de equilibrio tipo silla están en la frontera entre los dominios de atracción \mathcal{D}^+ y \mathcal{D}^- .

Lema 4.1.3. *Sea $\mathcal{L} \subset C_D[0, L]$ un conjunto cerrado y acotado. Dados $K > 0$ y $r > 0$, existe $T > 0$ tal que para toda $\varphi \in \mathcal{L}$, $\varepsilon \ll 1$,*

$$\mathbb{P}_\varphi\{\tau^{(\varepsilon)}(\mathcal{C}_r) \wedge \tau^{(\varepsilon)}(C_D[0, L] \setminus \mathcal{L}) > T\} \leq e^{-\frac{K}{\varepsilon}}. \quad (4.1.6)$$

Demostración. Sean r y K dados. Para cada $T > 0$ y $\varphi \in \mathcal{L}$ definimos el conjunto

$$A(T, \varphi) = \{v \in C_{D, \varphi}([0, L] \times [0, T]) : v(\cdot, t) \in \mathcal{L}^r \setminus \mathcal{C}_{r/2}, \forall t \leq T\}$$

Para demostrar este lema, basta encontrar h y T_0 positivos tales que

$$I(A(T_0, \varphi)) > 2h \forall \varphi \in \mathcal{L} \quad (4.1.7)$$

ya que en ese caso se tiene de la parte (b) del Teorema 3.2.1,

$$\mathbb{P}_\varphi(\tau^{(\varepsilon)}(\mathcal{C}_r) \wedge \tau^{(\varepsilon)}(C_D[0, L] \setminus \mathcal{L}) > T_0) \leq \mathbb{P}_\varphi(d_{T_0}(u^{(\varepsilon)}, J^{2h}) \geq \frac{r}{2}) \leq e^{-\frac{h}{\varepsilon}},$$

de donde, por la propiedad fuerte de Markov, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_\varphi(\tau^{(\varepsilon)}(\mathcal{C}_r) \wedge \tau^{(\varepsilon)}(C_D[0, L] \setminus \mathcal{L}) > nT_0) \leq (e^{-\frac{h}{\varepsilon}})^n,$$

y entonces (4.1.6) sigue, después de escoger $n > \frac{K}{h}$ y $T = nT_0$.

Para demostrar (4.1.7) usamos el hecho de que si $T_d(\varphi)$ es el tiempo que le toma a la trayectoria determinística para llegar al conjunto $\mathcal{C}_{\frac{r}{4}} \cup C_D[0, L] \setminus \mathcal{L}^{2r}$, entonces $\sup_{\varphi \in \mathcal{L}} T_d < \infty$ (ver Lema 1 del Apéndice), y escogiendo $T_0 > T_d$, se tiene que para cada φ , $I(A(T_0, \varphi)) > h(\varphi)$, por la Proposición 3.2.1–(d). Veamos que $\inf_{\varphi \in \mathcal{L}} h(\varphi) > 0$, para lo cual, por absurdo, suponemos que existe una sucesión $v_n \in A(T_0, \varphi_n)$ tal que $I(v_n) \rightarrow 0$. Sean u_n las correspondientes trayectorias determinísticas con la misma condición inicial φ_n . Sabemos por la desigualdad (3.2.3) que $\|v_n - u_n\|_{\infty, T_0} \leq C \|\Phi_\varphi^{-1}(v_n)\|_{\infty, T_0}$. Por la definición de funcional de acción y las propiedades de G tenemos que $G^{-1}(\Phi_\varphi^{-1}(v_n)) \rightarrow 0$ en $L^2 \Rightarrow \|\Phi_\varphi^{-1}(v_n)\|_{\infty, T_0} \rightarrow 0 \Rightarrow \|v_n - u_n\|_{\infty, T_0} \rightarrow 0$, lo cual contradice que $v_n \in A(T_0, \varphi_n)$. \square

Lema 4.1.4. *Para toda $\psi \in B_c(\pm m_2)$, con c suficientemente pequeño, existe $C > 0$ tal que $\forall \varepsilon \ll 1$,*

$$\mathbb{P}_\psi(u^{(\varepsilon)}(\tau) \in \partial A^+ \setminus B_\delta(\pm m_2), \tau(\gamma_a) > \tau) \leq e^{-\frac{C}{\varepsilon}} \mathbb{P}_\psi(\tau(\gamma_a) > \tau)$$

Demostración. Sea $\Gamma(c) = \{\psi \in C_D[0, L] : \|\psi \pm m_2\| = c\}$ y la sucesión de tiempos de parada

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_n = \inf\{t > \xi_{n-1} + 1 : u^{(\varepsilon)}(t) \in \Gamma(c)\}.$$

Sea $M = \inf\{n : \xi_n > \tau\}$. Procediendo como en (4.1.3), basta mostrar que existe $c > 0$ tal que $\forall \psi \in \Gamma(c)$,

$$\frac{\mathbb{P}_\psi(u^{(\varepsilon)}(\tau) \in \partial\mathcal{A}^+ \setminus B_\delta(\pm m_2), \tau(\gamma_a) > \tau, M = 1)}{\mathbb{P}_\psi(\tau(\gamma_a) > \tau, M = 1)} \leq e^{-\frac{c}{\varepsilon}}. \quad (4.1.8)$$

Por el mismo argumento empleado en la demostración del Lema 4.1.1, para estimar por debajo el denominador basta encontrar, para cada $\psi \in \Gamma(c)$ con c pequeño, una trayectoria v_ψ tal que $I(v_\psi) \leq kb$ y tal que toda trayectoria en un entorno de ella salga de \mathcal{A}^+ en tiempo menor que uno. Para construir tal trayectoria, sea c tal que las trayectorias determinísticas comenzando en $B_c(\pm m_2)$ no abandonan $B_b(\pm m_2)$ antes de tiempo 1. Sea $\psi_1 = u(\frac{1}{2}; \psi)$. La trayectoria mencionada se construye pegando tres tramos: el primero es $u(t; \psi)$ por tiempo $t \leq 1/2$, el segundo es la interpolación lineal entre ψ_1 y ψ_2 tal que $\psi_2 \in v_{2,-1}$, $d(\psi, \pm m_2) = b$. El tercer tramo sigue el flujo hasta $B_c(-m_1)$, y el argumento concluye como en la demostración del lema 4.1.1.

Para encontrar una cota superior para el numerador, definimos

$$\tau_2 = \tau^{(\varepsilon)}(B_c(\pm m_2)) \quad \text{y} \quad \tau_0 = \tau^{(\varepsilon)}((\partial\mathcal{A}^+ \setminus B_\delta(\pm m_2))^d), \quad (4.1.9)$$

donde $c < \delta$ y $d < \frac{\delta-c}{2}$ serán escogidos convenientemente pequeños. Llamamos Λ al evento en el numerador, y lo descomponemos según $\tau_2 \wedge \tau > T$ o $\tau_2 < T$. Para T suficientemente grande, obtenemos que, dado K , $\mathbb{P}_\psi(\Lambda, \tau(\partial\mathcal{A}^+)^d \wedge \tau > T) \leq e^{-\frac{K}{\varepsilon}}$, por el Lema 4.1.3. Escogemos después d pequeño tal que

$$\inf_{\xi \in (\partial\mathcal{A}^+ \setminus B_\delta(\pm m_2))^d} S(\psi) - S(m_2) > 2h > 0,$$

lo cual se puede hacer porque S es semicontinuo inferiormente. El Lema 4.1.2 permite concluir que $\mathbb{P}_\psi(\Lambda, \tau_2 < T) \leq e^{-\frac{h}{\varepsilon}}$, y basta tomar b suficientemente pequeño para concluir. \square

Conclusión de la demostración del Teorema 4.1.1 Vimos que la demostración se reduce a mostrar que (4.1.3) $\rightarrow 0$ con ε . Para estimar el numerador descomponemos el evento de interés según el orden de ocurrencia de los tiempos τ_0, τ_2, T, τ , con $T > 0$ que será fijado enseguida, y sea

$$Q := \{Y_1 \in \partial\mathcal{A}^+ \setminus B_\delta(\pm m_2)\} = Q \cap \{T < \tau_0 \wedge \tau_2 \wedge \tau\} \cup Q \cap \{\tau_0 < T \wedge \tau_2 \wedge \tau\} \\ \cup Q \cap \{\tau_2 < T \wedge \tau_0 \wedge \tau\} =: Q_I \cup Q_{II} \cup Q_{III} \quad (4.1.10)$$

Por el Lema 4.1.3 podemos escoger T suficientemente grande como para que

$$\mathbb{P}_\varphi(Q_I) \leq e^{-\frac{(2\Delta S+1)}{\varepsilon}} \quad \forall \varphi \in B_a(m_1). \quad (4.1.11)$$

Escogemos después d como en el lema anterior. Tomando

$$\mathcal{F} = \partial\mathcal{A}^+ \setminus B_\delta(\pm m_2), 2r = d, \psi = m_1$$

y T como antes, por el Lema 4.1.2 obtenemos

$$\mathbb{P}_\varphi(Q_{II}) \leq e^{-\frac{(2\Delta S+h)}{\varepsilon}} \quad \forall \varphi \in B_a(m_1). \quad (4.1.12)$$

Finalmente, observamos que de la propiedad fuerte de Markov y el Lema 4.1.4 se obtiene

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_\varphi(Y_1 \in \partial\mathcal{A}^+ \setminus B_\delta(\pm m_2), \tau_2 < T \wedge \tau_0 \wedge \tau) = \\ & \mathbb{E}_\varphi(\mathbb{P}_{u^{(\varepsilon)}(\tau_2)}(u^{(\varepsilon)}(\tau) \in \partial\mathcal{A}^+ \setminus B_\delta(\pm m_2), \tau(\gamma(a)) > \tau) \mathbb{1}_{\tau_2 < T \wedge \tau_0 \wedge \tau}) \\ & \leq e^{-\frac{c}{\varepsilon}} \mathbb{P}_\varphi(Y_1 \in \partial\mathcal{A}^+ \setminus B_\delta(\pm m_2)) \end{aligned}$$

De la descomposición (4.1.10), esta última desigualdad junto con (4.1.11) y (4.1.12) permiten estimar el numerador en (4.1.3) lo que junto con la cota obtenida en el Lema 4.1.1 completa la demostración. \square

Cabe preguntarse si la cadena de Markov Y_n definida en (4.1.2) está bien definida, pudiendo alguno de los tiempos de parada σ_n tomar el valor $+\infty$. El siguiente ejercicio aclara ese punto mostrando que el tiempo de salida de cualquier boreliano acotado tiene esperanza finita para cada ε fijo, por lo que en particular es finito con probabilidad uno.

Ejercicio 4.1.1. Demuestre que si $\mathcal{A} \subset C_D[0, L]$ es un abierto acotado cualquiera, entonces existe $K > 0$ tal que $\mathbb{E}(\tau^{(\varepsilon)}(C_D[0, L] \setminus \mathcal{A})) \leq e^{\frac{K}{\varepsilon}}$. Sugerencia:

- Muestre primero que existe $T > 0$ tal que $\forall \varphi \in \mathcal{A}$ $\mathbb{P}_\varphi(\tau^{(\varepsilon)}(C_D[0, L] \setminus \mathcal{A}) < T) \geq e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}}$ para algún $\gamma > 0$.
- Utilice la propiedad fuerte de Markov para estimar

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\psi(\tau^{(\varepsilon)}(C_D[0, L] \setminus \mathcal{A})) & \leq T \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_\psi(\tau^{(\varepsilon)}(C_D[0, L] \setminus \mathcal{A}) > nT) \\ & \leq T \sum_{n \geq 1} (1 - e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}})^n \end{aligned}$$

4.2. La magnitud del tiempo de pasaje

No debería ser difícil convencerse de que el tiempo de pasaje desde $\varphi \in B_c(m_1)$ a $B_c(-m_1)$

$$T^{(\varepsilon)} = \inf\{t > 0 : u^{(\varepsilon)}(t; \varphi) \in B_c(-m_1)\}. \quad (4.2.1)$$

tiende a infinito cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. El siguiente resultado establece cuál es –al menos en escala logarítmica– el orden de éste.

Teorema 4.2.1. *Dado cualquier $\eta > 0$,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}_\varphi \left(e^{\frac{(2\Delta S - \eta)}{\varepsilon}} < T^{(\varepsilon)} < e^{\frac{(2\Delta S + \eta)}{\varepsilon}} \right) = 1 \quad (4.2.2)$$

uniformemente en $\varphi \in B_c(m_1)$, para c suficientemente pequeño.

Demostración. Para cada $\varphi \in \mathcal{A}$, definimos

$$S^{(\varepsilon)} = \inf\{t > 0 : u^{(\varepsilon)}(t; \varphi) \in (C_D[0, L] \setminus \mathcal{A}) \cup B_c(-m_1)\}$$

Por un procedimiento muy similar al empleado para mostrar el Teorema 4.1.1, se muestra que $\forall \varphi \in B_c(m_1)$, $\mathbb{P}_\varphi(S^{(\varepsilon)} < T^{(\varepsilon)}) \rightarrow 0$ con ε . Como por definición $S^{(\varepsilon)} \leq T^{(\varepsilon)}$, basta mostrar (4.2.2) para $S^{(\varepsilon)}$ en vez de $T^{(\varepsilon)}$, lo que tiene la ventaja de tener que considerar solamente conjuntos acotados. Sea ahora $\eta > 0$ dado, y veamos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}_\varphi \left(S^{(\varepsilon)} > e^{\frac{(2\Delta S + \eta)}{\varepsilon}} \right) = 0. \quad (4.2.3)$$

Para esto, basta mostrar, para cada $\psi \in \mathcal{A}$, una trayectoria $w_\psi \in C_{D,\psi}([0, L] \times [0, T])$ tal que $I(w_\psi) < 2\Delta S + \frac{\eta}{3}$, y $w(T; \psi) \in B_{c/2}(-m_1)$, ya que en ese caso, por el Teorema 3.2.1–(a), tenemos $\mathbb{P}_\psi(S^{(\varepsilon)} < T) \geq e^{-\frac{(2\Delta S + \eta/2)}{\varepsilon}}$, si $\varepsilon \ll 1$. Por la propiedad fuerte de Markov, concluimos entonces

$$\mathbb{P}_\psi(S^{(\varepsilon)} \geq NT) \leq \left(1 - e^{-\frac{(2\Delta S + \eta/2)}{\varepsilon}}\right)^N.$$

Escogiendo $N = \lceil e^{\frac{(2\Delta S + 3\eta/4)}{\varepsilon}} \rceil$, se tiene (4.2.3), y resta mostrar una trayectoria w_ψ como especificado. En caso $\psi \in B_a(m_1)$ para a pequeño, la trayectoria v_φ mostrada en la demostración del Lema 4.1.1 es adecuada, escogiendo b suficientemente pequeño. Si $\psi \in \mathcal{A} \setminus B_a(m_1)$, sea

$u(t; \psi)$ la evolución por el flujo determinístico hasta alcanzar una vecindad $B_b(m)$ de algún punto crítico m , lo cual sucede en un tiempo a lo sumo $T(\psi)$, uniformemente acotado para $\psi \in \mathcal{A}$. Si $m = -m_1$, esta trayectoria cumple lo deseado. Si es m_1 , se puede concatenar con v_ϕ , y esta cumple lo especificado. Si m es alguno de los puntos de silla digamos m_κ , entonces se puede interpolar linealmente hasta la órbita $v_{\kappa, -1}$ como en la demostración del Lema 4.1.1, con funcional de acción acotado por $k_1 b$, de forma que agregando un tramo que sigue después por esta órbita hasta $B_c(-m_1)$, se tiene la trayectoria buscada.

Veamos a continuación que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}_\varphi(\tau^{(\varepsilon)} < e^{\frac{(2\Delta S - \eta)}{\varepsilon}}) = 0, \quad (4.2.4)$$

con lo que se concluye la demostración ya que $S^{(\varepsilon)} > \tau^{(\varepsilon)}$. Consideremos radios a y b , conjuntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$, tiempos de parada $\{\sigma_n\}_{n \geq 1}$ y $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$ y variables aleatorias N y Y_n como en la demostración del Teorema 4.1.1. Por la propiedad fuerte de Markov, para cada $m \in \mathbb{N}$ y $\varphi \in B_c(m_1)$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\varphi(\tau^{(\varepsilon)} < e^{\frac{(2\Delta S - \eta)}{\varepsilon}}) &\leq \mathbb{P}_\varphi(\tau^{(\varepsilon)} < \tau^{(\varepsilon)}(\gamma(a))) + \sup_{\psi \in \gamma(a)} \mathbb{P}_\psi(N \leq m) \\ &\quad + \sup_{\psi \in \gamma(a)} \mathbb{P}_\psi(\sigma_m < e^{\frac{(2\Delta S - \eta)}{\varepsilon}}, N > m) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Ya vimos que $\mathbb{P}_\varphi(\tau^{(\varepsilon)} < \tau^{(\varepsilon)}(\gamma(a))) \rightarrow 0$ con ε uniformemente en $\varphi \in B_c(m_1)$. A partir de los lemas 4.1.2 y 4.1.3, se obtiene que $\forall \psi \in \gamma(a)$, existe $h > 0$ tal que

$$\mathbb{P}_\psi(N = 1) \leq e^{-\frac{(2\Delta S - h)}{\varepsilon}} \Rightarrow \mathbb{P}_\psi(N > 1) \geq 1 - e^{-\frac{(2\Delta S - h)}{\varepsilon}}$$

Por la propiedad fuerte de Markov, para $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\psi(N > m) &\geq \mathbb{E}_\psi(\mathbb{1}_{\{N > m-1\}} \mathbb{P}_{u^{(\varepsilon)}(\sigma_{m-1})}(N > 1)) \\ &\geq \mathbb{P}_\psi(N > m-1) (1 - e^{-\frac{(2\Delta S - h)}{\varepsilon}}) \end{aligned}$$

por lo que

$$\mathbb{P}_\psi(N \leq m) \leq 1 - (1 - e^{-\frac{(2\Delta S - h)}{\varepsilon}})^m,$$

que converge a cero si tomamos $m = \lceil e^{\frac{(2\Delta S - 2h)}{\varepsilon}} \rceil$.

Si $i \leq m$, de la elección de a y b , por la Proposición 3.2.1-(c) obtenemos, para algún M positivo y ε suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{P}_{u^{(\varepsilon)}(\sigma_{i-1})}(\sigma_i - \sigma_{i-1} > 1 \mid N > m)) &\geq \inf_{\psi \in \gamma(a)} \mathbb{P}_\psi(\tau(\gamma(b)) > 1) \\ &\geq 1 - e^{-\frac{M}{\varepsilon}} > \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Escribiendo en forma teléscopica $\sigma_m = \sigma_1 - \sigma_0 + \sigma_2 - \sigma_1 + \dots + \sigma_m - \sigma_{m-1}$, tenemos que $\forall \psi \in \gamma(a)$

$$\mathbb{P}_\psi(\sigma_m < e^{\frac{(2\Delta S - \eta)}{\varepsilon}}, N > m) \leq \mathbb{P}_\psi(\Sigma_m < e^{\frac{(2\Delta S - \eta)}{\varepsilon}}),$$

siendo $\Sigma_m = \sum_{i \leq m} X_i$, con X_i una sucesión de variables aleatorias *i.i.d* tales que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{2}{3} = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0)$. Tomando entonces $h < \frac{\eta}{2}$, la ley de los grandes números garantiza la convergencia a cero del último término en (4.2.5). \square

En la sección 4.4, veremos cuál es la distribución límite del tiempo $T^{(\varepsilon)}$, convenientemente normalizado, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

4.3. Estabilidad de las medias temporales

Por los resultados de la sección anterior sabemos que el tiempo de pasaje $T^{(\varepsilon)} \asymp e^{\frac{2\Delta S}{\varepsilon}}$. Para normalizar precisamente este tiempo, consideremos β_ε definido implícitamente por

$$\mathbb{P}_{m_1}\{T^{(\varepsilon)} > \beta_\varepsilon\} = \frac{1}{e} \tag{4.3.1}$$

Ejercicio 4.3.1. Muestre que dado $\eta > 0$, $\beta_\varepsilon \in [e^{\frac{(2\Delta S - \eta)}{\varepsilon}}, e^{\frac{(2\Delta S + \eta)}{\varepsilon}}]$

En el siguiente resultado se consideran las medias temporales de funciones continuas y acotadas, evaluadas sobre las trayectorias de $u^{(\varepsilon)}(\cdot; \varphi)$ (con $\varphi \in B_c(m_1)$, para c pequeño), cuando tomadas en tiempos que tienden a infinito exponencialmente, si bien tienden a cero en la escala del orden del tiempo de pasaje. Se muestra que estas medias permanecen, por tiempos cuya diferencia con el tiempo de pasaje tiende a cero en la escala indicada, próximas del valor de la función evaluada en el mínimo

correspondiente a la condición inicial, como si el otro mínimo no estuviera presente. A este comportamiento nos referimos como estabilidad de las medias temporales, y como fue discutido en la introducción de este capítulo, es una de las características que definen el comportamiento metaestable.

Teorema 4.3.1. *Existe una secuencia $R_\varepsilon \rightarrow \infty$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ tal que $\frac{R_\varepsilon}{\beta\varepsilon} \rightarrow 0$ y tal que para cada $\delta > 0$ y $f : C_D[0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}_\varphi \left(\sup_{0 \leq t \leq T^{(\varepsilon)} - 2R_\varepsilon} \left| \frac{1}{R_\varepsilon} \int_t^{t+R_\varepsilon} f(u^{(\varepsilon)}(s)) - f(m_1) ds \right| > \delta \right) = 0,$$

$\forall \varphi \in B_c(m_1)$, para c suficientemente pequeño.

Demostración. Una primera simplificación es que es suficiente mostrar el teorema para la clase de funciones $\{\mathbb{I}_\theta\}_{\theta>0}$, para $\mathbb{I}_\theta(u) = \mathbb{I}_{\{\|u-m_1\|_\infty < \theta\}}(u)$, ya que, dada $f \in C_D[0, L]$ con $\|f\|_\infty = B$, sea θ tal que

$$\|u - m_1\|_\infty < \theta \Rightarrow |f(u) - f(m_1)| < \frac{\delta}{2}.$$

Se cumple en este caso

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{R} \int_t^{t+R} f(u^{(\varepsilon)}(s)) - f(m_1) ds \right| > \delta \Rightarrow \\ \left| \frac{1}{R} \int_t^{t+R} \mathbb{I}_\theta(u^{(\varepsilon)}(s)) - 1 ds \right| > \frac{\delta}{4B} \end{aligned}$$

Como explicado en la demostración del Teorema 4.2.1, es suficiente considerar $S^{(\varepsilon)}$ en vez de $T^{(\varepsilon)}$. Para $R_\varepsilon \gg 0$ que será escogido después, dividimos el intervalo $[0, \infty) = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} [\ell R_\varepsilon, (\ell + 1)R_\varepsilon)$, y sea ℓ_ε tal que el tiempo $S^{(\varepsilon)} \in [\ell_\varepsilon R_\varepsilon, (\ell_\varepsilon + 1)R_\varepsilon)$. Es suficiente mostrar entonces que $\forall \varphi \in B_c(m_1)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}_\varphi \left(\left| \frac{1}{R_\varepsilon} \int_{(\ell-1)R_\varepsilon}^{\ell R_\varepsilon} \mathbb{I}_\theta(u^{(\varepsilon)}) - 1 ds \right| < \delta/2 \forall 1 \leq \ell \leq \ell_\varepsilon - 1, \ell_\varepsilon > 1 \right) = 1$$

para lo cual es suficiente mostrar

- (a) $\mathbb{P}_\varphi(\ell_\varepsilon > 1) \rightarrow 1$ para δ y θ cualesquiera

$$(b) \mathbb{P}_\varphi \left(\left| \frac{1}{R_\varepsilon} \int_{(\ell-1)R_\varepsilon}^{\ell R_\varepsilon} \mathbb{I}_\theta(u^{(\varepsilon)}) - 1 ds \right| > \delta \text{ para algún } \ell < \ell_\varepsilon, \ell_\varepsilon > 1 \right) \\ \rightarrow 0 \text{ para } \delta \text{ y } \theta \text{ cualesquiera.}$$

Por el Teorema 4.2.1, tenemos que $\mathbb{P}_\varphi(\ell_\varepsilon > 1) = \mathbb{P}_\varphi(S^{(\varepsilon)} > R_\varepsilon) \rightarrow 1$, si tomamos $R_\varepsilon = e^{\frac{2\Delta S - \eta}{\varepsilon}}$ con $\eta \in (0, 2\Delta S)$.

Para estimar (b), descomponemos el evento según $\ell_\varepsilon > K$ o no, para $K = K(\varepsilon)$ que escogeremos adecuadamente después. Estimamos

$$\mathbb{P}_\varphi \left(\left| \frac{1}{R_\varepsilon} \int_{(\ell-1)R_\varepsilon}^{\ell R_\varepsilon} \mathbb{I}_\theta(u^{(\varepsilon)}) - 1 ds \right| > \delta \text{ para algún } \ell < \ell_\varepsilon, \ell_\varepsilon > 1 \right) \\ \leq \sum_{n=1}^K \mathbb{P}_\varphi \left(\bigcup_{\ell=1}^{n-1} \left| \frac{1}{R_\varepsilon} \int_{(\ell-1)R_\varepsilon}^{\ell R_\varepsilon} \mathbb{I}_\theta(u^{(\varepsilon)}) - 1 ds \right| > \delta, \ell_\varepsilon = n \right) + \mathbb{P}_\varphi(\ell_\varepsilon > K).$$

para obtener convergencia a cero del penúltimo término, por la propiedad de Markov basta demostrar que $\forall \psi \in \mathcal{A} \setminus B_c(-m_1)$,

$$K^2 \mathbb{P}_\psi \left(\left| \frac{1}{R_\varepsilon} \int_0^{R_\varepsilon} \mathbb{I}_\theta(u^{(\varepsilon)}) - 1 ds \right| > \delta, S^{(\varepsilon)} > R_\varepsilon, \right) \rightarrow 0. \quad (4.3.2)$$

La idea para estimar este término es dividir el intervalo $[0, R_\varepsilon]$ en intervalos disjuntos de tamaño $t_\varepsilon \ll R_\varepsilon$, tal que en cada uno de ellos el proceso visita una vecindad de m_1 y permanece cerca la mayor parte del intervalo, con probabilidad ≈ 1 .

Por un razonamiento semejante al empleado en la demostración de (4.2.3), se puede mostrar que dado $\gamma > 0$, para $t_\varepsilon = e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}}$,

$$\sup_{\psi \in \mathcal{A} \setminus B_c(-m_1)} \mathbb{P}_\psi(\tau(B_r(m_1)) > \sqrt{t_\varepsilon}, S^{(\varepsilon)} > t_\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (4.3.3)$$

y de allí se concluye que existe $c(\delta) > 0$ tal que

$$\sup_{\psi \in \mathcal{A} \setminus B_c(-m_1)} \mathbb{P}_\psi \left(\left| \frac{1}{R_\varepsilon} \int_0^{R_\varepsilon} \mathbb{I}_\theta(u^{(\varepsilon)}) - 1 ds \right| > \delta, S^{(\varepsilon)} > R_\varepsilon, \right) \leq e^{-c(\delta) \frac{R_\varepsilon}{t_\varepsilon}}$$

Los detalles de estas demostraciones pueden encontrarse en [7]. Finalmente, habiendo escogido $R_\varepsilon = e^{\frac{2\Delta S - \eta}{\varepsilon}}$, escogemos $K_\varepsilon = e^{\frac{\xi}{\varepsilon}}$ con $\xi > \eta$, que garantiza (4.3.2) y también que $\mathbb{P}_\varphi(\ell_\varepsilon > K_\varepsilon) \leq \mathbb{P}_\varphi(S^{(\varepsilon)} > R_\varepsilon K_\varepsilon) \rightarrow 0$ pues $\xi > \eta$. \square

4.4. Distribución límite del tiempo de pasaje

Para completar el estudio de metaestabilidad del proceso $u^{(\varepsilon)}$, consideramos la distribución (convenientemente normalizada) del tiempo de llegada de uno al otro mínimo, $T^{(\varepsilon)}$. El siguiente resultado se debe a F. Martinelli, E. Olivieri y E. Scoppola [Teorema 4.1 de [32]].

Teorema 4.4.1. *Sea β_ε como definido en (4.3.1). Entonces*

- (a) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}_{m_1}(T^{(\varepsilon)} > \beta_\varepsilon t) = e^{-t}$
- (b) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_{m_1} T^{(\varepsilon)}}{\beta_\varepsilon} = 1$

Teniendo en cuenta el comportamiento de las trayectorias del proceso $u^{(\varepsilon)}$ que se ha estudiado en las secciones anteriores, se puede anticipar un resultado como el enunciado en (a): para $\varepsilon \ll 1$, una trayectoria comenzando en m_1 se mantendrá cerca de esta configuración, fluctuando por efecto del ruido, y será forzada por el potencial a retornar a una vecindad de m_1 cuando se aleje, con probabilidad muy cercana a uno. Una gran fluctuación finalmente lo llevara a pasar a \mathcal{D}^- , y una vez allí será atraída rápidamente a una vecindad de $-m_1$, para repetir en sentido inverso la historia anterior. Si pensamos en la cadena Y_n definida en (4.1.2), para $\varepsilon \ll 1$, ésta pasa de $\gamma(a)$ a $\gamma(a)$ con probabilidad casi uno, de manera que el tiempo de salida se comporta como el tiempo hasta aparecer la primera cara en lanzamientos de una moneda con probabilidad de cara $p \ll 1$, que es una distribución sin memoria que en el continuo aproxima la exponencial. La demostración de la parte (a) del teorema en cierta forma, y después de sortear delicados problemas técnicos, formaliza la idea anterior. El siguiente lema corresponde con el lema 4.1 de [32], donde puede verse su demostración. Está basada en un resultado de aproximación exponencial (en el tiempo) de las trayectorias del proceso con condición inicial $\varphi \in B_\delta(m_1)$ cuando todas son realizadas como función del mismo ruido, más precisamente, como $\Phi_\varphi(\sqrt{\varepsilon}Z)$, como en la sección 3.2, usando el mismo Z para toda φ .

Lema 4.4.1. *Para $t > 0$ y δ suficientemente pequeño,*

$$\sup_{\varphi \in B_\delta(m_1)} \left| \mathbb{P}_\varphi(T^{(\varepsilon)} > \beta_\varepsilon t) - \mathbb{P}_{m_1}(T^{(\varepsilon)} > \beta_\varepsilon t) \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Demostración del Teorema 4.4.1-(a). Por el argumento explicado en la demostración del Teorema 4.2.1, basta mostrar el resultado para $S^{(\varepsilon)}$ en vez de $T^{(\varepsilon)}$. Sean $t, s > 0$. Para cada s , definimos el tiempo de parada

$$r_s^{(\varepsilon)} = \inf\{\ell > s\beta_\varepsilon : u^{(\varepsilon)}(\ell) \in B_\delta(m_1)\},$$

donde δ es como en el Lema 4.4.1. Sea $t_\varepsilon = e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}}$, con $\gamma \in (0, 2\Delta S)$. Tenemos, de la propiedad de Markov en el tiempo $s\beta_\varepsilon$ y de (4.3.3), que, si $t_0 > 0$ dado, $\forall t > t_0, s > 0$,

$$\begin{aligned} \sup_{\psi \in \mathcal{A} \setminus B_c(-m_1)} \mathbb{P}_\psi(S^{(\varepsilon)} > (t+s)\beta_\varepsilon, r_s^{(\varepsilon)} \geq s\beta_\varepsilon + t_\varepsilon) &\leq \\ \sup_{\psi \in \mathcal{A} \setminus B_c(-m_1)} \mathbb{P}_\psi(S^{(\varepsilon)} > t_\varepsilon, \tau(B_\delta(m_1)) > t_\varepsilon) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

lo que implica, ya que $t\beta_\varepsilon > t_\varepsilon$ por el Teorema 4.2.1, que

$$\mathbb{P}_{m_1}(S^{(\varepsilon)} > (t+s)\beta_\varepsilon) = E(\varepsilon) + \mathbb{P}_{m_1}(S^{(\varepsilon)} > (t+s)\beta_\varepsilon, r_s^{(\varepsilon)} < s\beta_\varepsilon + t_\varepsilon),$$

para $E(\varepsilon) \rightarrow 0$ uniformemente para $s > 0, t > t_0$. De la propiedad fuerte de Markov en el tiempo $r_s^{(\varepsilon)}$ obtenemos las siguiente cotas para la última probabilidad:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{m_1}(S^{(\varepsilon)} > (t+s)\beta_\varepsilon, r_s^{(\varepsilon)} < s\beta_\varepsilon + t_\varepsilon) & \\ \leq \mathbb{P}_{m_1}(S^{(\varepsilon)} > s\beta_\varepsilon) \sup_{\varphi \in B_\delta(m_1)} \mathbb{P}_\varphi(S^{(\varepsilon)} > t\beta_\varepsilon - t_\varepsilon) & \\ \mathbb{P}_{m_1}(S^{(\varepsilon)} > (t+s)\beta_\varepsilon, r_s^{(\varepsilon)} < s\beta_\varepsilon + t_\varepsilon) & \\ \geq \mathbb{P}_{m_1}(S^{(\varepsilon)} > s\beta_\varepsilon + t_\varepsilon, r_s^{(\varepsilon)} < s\beta_\varepsilon + t_\varepsilon) \inf_{\varphi \in B_\delta(m_1)} \mathbb{P}_\varphi(S^{(\varepsilon)} > t\beta_\varepsilon) & \end{aligned}$$

Por el Lema 4.4.1, si llamamos $U_\varepsilon(t) = \mathbb{P}_{m_1}(S^{(\varepsilon)} > t\beta_\varepsilon)$, hemos mostrado que

$$U_\varepsilon(s + \delta_\varepsilon)(U_\varepsilon(t) - \rho_\varepsilon) \leq U_\varepsilon(t + s) \leq U_\varepsilon(s)(U_\varepsilon(t - \delta_\varepsilon) + \rho_\varepsilon), \quad (4.4.2)$$

donde $\delta_\varepsilon \rightarrow 0$ y $\rho_\varepsilon \rightarrow 0$ para todo $t > 0$. Es fácil ver de esta desigualdad que la familia de distribuciones en \mathbb{R} $F_\varepsilon(t) := \mathbb{P}(S^{(\varepsilon)} \leq t)$ es tensa o “tight”, en inglés. (Es decir, dado $h > 0$, existe un compacto K en \mathbb{R} tal que $\int_K dF_\varepsilon > 1 - h \forall \varepsilon > 0$). En efecto, escogiendo δ_ε y ρ_ε suficientemente

pequeños, y $t = 2$, de (4.3.1) podemos hacer $U_\varepsilon(2 - \delta_\varepsilon) + \rho_\varepsilon = \alpha < 1$, y de la última desigualdad (para $t = 2$) sigue entonces que $U_\varepsilon(2 + s) \leq \alpha U_\varepsilon(s)$ de donde inductivamente se obtiene $U_\varepsilon(2k + 1) \leq \alpha^k U_\varepsilon(1)$, que implica la condición buscada. La secuencia U_ε tiene entonces un límite digamos U_0 , el cual debe satisfacer la ecuación $U_0(t + s) = U_0(t)U_0(s)$ si t y s son puntos de continuidad. pero por la continuidad a la derecha de la correspondiente distribución, y como los puntos de continuidad son densos, debe satisfacerla en todo t, s , de modo que $U_\varepsilon(t) \rightarrow e^{-\lambda t}$. Por la normalización (4.3.1) tiene que ser $\lambda = 1$. \square Para una demostración de la parte (b), se sugiere consultar [32].

Comentario. F. Barret en [3] calculó recientemente el orden exacto del tiempo $T^{(\varepsilon)}$, en el contexto más general en que el potencial permite la existencia de varios mínimos locales. En el artículo de N. Beglunds y B. Gentz [4] se muestra también este resultado, usando técnicas similares. Este tipo de resultado se conoce en la literatura como leyes de Eyring–Kramers, y fueron estudiados inicialmente en relación con reacciones químicas. En los dos artículos mencionados se encuentran referencias al respecto.

Capítulo 5

Fluctuaciones de la interface

En este capítulo, consideramos algunos resultados para la ecuación de Allen–Cahn en el caso $x \in \mathbb{R}$. En particular, vamos a considerar soluciones en el caso en que la condición inicial es (o está cerca) de una solución estacionaria \bar{m} que interpola las “fases puras” ± 1 . Precisamente, consideramos

$$\partial_t u = \frac{1}{2} \partial_{xx} u - V'(u) + \sqrt{\varepsilon} \dot{W} \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.0.1)$$

Para la ecuación determinística ($\varepsilon = 0$) se tienen los siguientes resultados, demostrados en [20] y [21].

- Las funciones ± 1 son estacionarias y son las únicas soluciones estables.
- Existe además una solución estacionaria creciente, que llamaremos \bar{m} , tal que $\bar{m}(-\infty) = -1$, $\bar{m}(\infty) = 1$ y que satisface la condición de centramiento $\bar{m}(0) = 0$.
- La linealización del operador $\frac{1}{2} \partial_{xx} u - V'(u)$ alrededor de \bar{m} tiene un autovalor 0, con autofunción proporcional a \bar{m}' , y el resto del espectro en el eje negativo, y a distancia positiva de 0.
- Por la invariancia de la ecuación por traslaciones,

$$\bar{m}_{x_0} := \bar{m}(x - x_0)$$

también resulta estacionaria. La solución de la ecuación con condición inicial $\varphi(x) = \bar{m}(x) + h(x)$, para h una perturbación pequeña satisface que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t; \varphi) = m_{x_0} \quad \text{para algún } x_0 \in \mathbb{R}$$

- El conjunto $\mathcal{M} = \{\bar{m}_{x_0} : x_0 \in \mathbb{R}\}$ resulta entonces estacionario y estable, pero no necesariamente es estable cada \bar{m}_{x_0} .

Ejercicio 5.0.1. Verifique que en el caso específico que hemos fijado, $V'(u) = u^3 - u$

1. $\bar{m}(x) = \tanh(x)$
2. $\bar{m}'(x)$ es autovector de la linealización.
3. $\|\bar{m}'\|_2^2 = \frac{4}{3}$.

Tanto en experimentos reales con fenómenos modelados por esta ecuación o ecuaciones relacionadas, como en experimentos numéricos (ver por ejemplo [10]), se observa el siguiente comportamiento. Tomando una configuración inicial acotada, y con oscilaciones sobre y bajo 0, la solución, en tiempos cortos, se aproxima a perfiles que están próximos de +1 o de -1 en diferentes regiones del espacio, interpolados por traslaciones convenientes de \bar{m} o $-\bar{m}$. La dinámica después se hace más lenta, y se van produciendo, en otra escala de tiempo, colapsos de estas “islas” de +1 y -1. Interesa por esto estudiar la evolución de perfiles cercanos a la interfase. Hay una amplia literatura respecto de este problema en el caso determinístico, en especial estudiando la convergencia de las soluciones con condición inicial $\approx \bar{m}$ a una fase pura, en el caso de un volumen finito $[-L(\varepsilon), L(\varepsilon)]$, $L(\varepsilon) \rightarrow \infty$, lo cual sucede a lo largo de \mathcal{M} , con una velocidad que tiende a 0 con ε . El considerar el efecto del ruido en este tipo de dinámica resulta natural

En el siguiente resultado se considera la ecuación (5.0.1), por razones técnicas en el intervalo $[-\varepsilon^{-\beta}, \varepsilon^{-\beta}]$, para $\beta = 1$, con condiciones de Neumann. Podría tomarse cualquier valor $\beta \geq 1$ sin afectar nada de lo que sigue, y puede pensarse de hecho que el intervalo es toda la recta, haciendo algunas salvedades técnicas.

Denotamos por $C_N[a, b]$ el espacio de funciones continuas con condiciones de Neumann en el intervalo $[a, b]$, y por $\|\cdot\|$ la norma del supremo

en este espacio. Se tiene precisamente el siguiente resultado, donde \xrightarrow{d} denota convergencia en distribución.

Teorema 5.0.2. *Sea $u^{(\varepsilon)}$ la solución de la ecuación (1.0.1) para $x \in [-\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}]$ con condiciones de Neumann en este intervalo y condición inicial $\varphi(x) \in C_N[-\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}]$ tal que $\|\varphi - \bar{m}_{x_0}\| \leq \varepsilon^{1/2}$, para algún x_0 tal que $|x_0| < k\varepsilon^{-1}$, $k < 1$. Entonces existe un proceso ξ_t , adaptado a la filtración \mathcal{F}_t tal que, $\forall T > 0$,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(\sup_{t \leq \varepsilon^{-1}T} \|u^{(\varepsilon)}(t; \varphi) - \bar{m}_{\xi_t}\| > \varepsilon^{1/4}\right) = 0 \quad (5.0.2)$$

Más aún, el proceso

$$X(t) = \xi_{\varepsilon^{-1}t} - x_0 \xrightarrow{d} \sqrt{3/4}B(t) \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (5.0.3)$$

para $B(t)$ un movimiento browniano.

Tenemos entonces que la solución de la ecuación de Allen–Cahn estocástica con condición inicial suficientemente cerca de \mathcal{M} permanece cerca de \mathcal{M} por tiempos del orden de ε^{-1} , y, cuando el tiempo es reescalado por ε^{-1} , oscila como un movimiento browniano. Usando técnicas diferentes, e hipótesis ligeramente distintas, además de un escalamiento también en el espacio que convierte la interface en una función escalera, T.Funaki obtiene un resultado análogo en [24]. En [5] se generaliza el teorema 5.0.2, mostrando que vale para cualquier escala de tiempo polinomial en ε^{-1} . No vamos a presentar una demostración del teorema anterior, pero se puede dar una idea de los argumentos que llevan a la demostración, cuyos detalles pueden verse en [6].

Supongamos para simplificar que consideramos la ecuación en volumen infinito, e ignoremos las condiciones de contorno, de forma que \bar{m} es estacionaria. Consideremos la ecuación linealizada alrededor de \bar{m} , y supongamos que la condición inicial es precisamente \bar{m} , para obtener la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u^{(\varepsilon)} - \bar{m}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^{(\varepsilon)} - \bar{m}) - V''(\bar{m})(u^{(\varepsilon)} - \bar{m}) \\ &\quad - V'''(\bar{m}) \frac{(u^{(\varepsilon)} - \bar{m})^2}{2} - V''''(\bar{m}) \frac{(u^{(\varepsilon)} - \bar{m})^3}{6} + \sqrt{\varepsilon} \dot{W} \end{aligned} \quad (5.0.4)$$

Sea $L = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V''(\bar{m})$ la parte lineal del lado derecho de (5.0.4), y consideramos el operador $H = \left(\frac{\partial}{\partial t} - L\right)^{-1}$. Se puede verificar (por ejemplo, de la fórmula de Feynman-Kac) que el operador H es un operador integral, cuyo núcleo llamamos $h(x, y, t)$, y de la misma manera que en la sección 1.4, podemos escribir una ecuación integral equivalente a (5.0.4), en términos de H . Llamemos N_l los términos no lineales en la ecuación, es decir, $N_l = V'''(\bar{m}) \frac{(u-\bar{m})^2}{2} - V''''(\bar{m}) \frac{(u-\bar{m})^3}{6}$. Tenemos entonces

$$(u^{(\varepsilon)} - \bar{m})(x, t) = \int_0^t \int h(x, y, t-s) N_l(y, s) dy ds \quad (5.0.5) \\ + \sqrt{\varepsilon} \int_0^t \int h(x, y, t-s) dW_{y,s}$$

Consideremos la ecuación anterior en el tiempo $t\varepsilon^{-\gamma}$, para $\gamma \in (0, 1]$ de momento. El término estocástico es nuevamente un proceso gaussiano, que denominamos Y . Sea

$$Y^{(\varepsilon)}(x, t) = Y(x, t\varepsilon^{-\gamma}) = \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t\varepsilon^{-\gamma}} \int h(x, y, t\varepsilon^{-\gamma} - s) dW_{y,s}$$

Sabemos calcular su covariancia, que después de un simple cambio de variables resulta ser

$$\mathbb{E}(Y^{(\varepsilon)}(x, t) Y^{(\varepsilon)}(x', t')) = \\ \varepsilon^{1-\gamma} \int_0^{t \wedge t'} \int h(x, y, (t-s)\varepsilon^{-\gamma}) h(x', y, (t'-s)\varepsilon^{-\gamma}) dy ds$$

Por las propiedades del núcleo h , se puede verificar que

$$\varepsilon^{\gamma-1} \mathbb{E}(Y^{(\varepsilon)}(x, t) Y^{(\varepsilon)}(x', t')) \rightarrow \frac{3}{4} \bar{m}'(x) \bar{m}'(y) (t \wedge t')$$

En otras palabras, al menos en el sentido de las distribuciones finito-dimensionales, el proceso

$$\varepsilon^{\frac{\gamma-1}{2}} Y^{(\varepsilon)}(x, t) \rightarrow \sqrt{\frac{3}{4}} \bar{m}'(x) B(t),$$

para $B(t)$ un movimiento browniano. Se puede demostrar que la correspondiente familia de leyes es tensa, de donde se concluye convergencia

débil del proceso. Más aún, tomando $\gamma < \frac{1}{3}$, resulta que el término que contiene N_l en (5.0.5) converge a cero con ε , con lo que se obtiene la aproximación

$$u(x, t\varepsilon^{-\gamma}) \approx \bar{m}(x) + \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} \bar{m}'(x) \sqrt{3/4} B(t) \approx \bar{m}(x + \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} \sqrt{3/4} B(t))$$

Es decir, en un tiempo del orden de $\varepsilon^{-\gamma}$, para $\gamma < 1/3$, el perfil \bar{m} se desplaza (infinitesimalmente) $\varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} \sqrt{3/4} B(t)$. Para obtener un desplazamiento no-infinitesimal, hace falta tomar $\gamma = 1$. Esta es la escala correcta, pero para $\gamma = 1$ no se pueden controlar directamente los términos no lineales. Un procedimiento iterativo, sin embargo, permite concluir, después de linealizar alrededor de $\bar{m}_{\xi(t)}$, con $\xi(t)$ convenientemente escogido. La suma de los desplazamientos, cuando reescalada, da un movimiento browniano, y los errores se pueden controlar.

Comentario. Para una discusión de resultados recientes sobre modelos estocásticos para interfases en modelos con dos fases, se puede ver [25] y las referencias allí citadas.

Apéndice

Lema 1 (Algunas propiedades de la solución determinística).

Sea $u(x, t; \varphi)$ la solución de la ecuación de Allen Cahn determinística (1.1.1) con condición inicial φ . Sea $\mathcal{A} \subset C_D[0, L]$ un conjunto acotado.

- Sean $0 < T_0 < T_1$ dados. Entonces existe una constante $K > 0$ tal que

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{A}, t \in [T_0, T_1]} \|\partial_{xx} u(\cdot, t; \varphi)\|_\infty \leq K$$

- Supongamos que $N\pi < L < (N+1)\pi$. Para cada $r > 0$, definimos una vecindad de los puntos críticos, $\mathcal{C}_r = \cup_{j=1}^N B_r(\pm m_j) \cup B_r(0)$. Si

$$T_r(A) = \sup_{\varphi \in \mathcal{A}} \inf_{t \geq 1} \{t : u(t; \varphi) \in \mathcal{C}_r\}$$

Entonces $T_r(A) < \infty$.

La demostración de este resultado puede encontrarse en [7].

Proposición 1 (Desigualdad de Gronwall). Sea $v(t)$ una función no-negativa que satisface, para ciertas constantes A y C ,

$$v(t) \leq C + A \int_0^t v(s) ds \quad t \in [0, T].$$

Entonces

$$v(t) \leq C e^{At} \quad t \in [0, T].$$

Proposición 2 (Desigualdad de Young para convoluciones). Sean p y q tales que $1 \leq p, q \leq \infty$, y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, y sea r definido por $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces la convolución $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, y

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Bibliografía

- [1] Adler, Robert J.: *An introduction to continuity, extrema, and related topics for general Gaussian processes*. IMS Lecture Notes - Monograph Series. 12. Hayward, CA: Institute of Mathematical Statistics. vii, 160 p. , 1990.
- [2] Allen, S. M. y J. W. Cahn: *A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening*. Acta Metallurgica, 27:1085–1095, 1979.
- [3] Barret, F.: *Sharp asymptotics of metastable transition times for one dimensional SPDEs*. arXiv:1201.4440v1[math.PR], 2012.
- [4] Berglund, N. y B. Gentz: *Sharp estimates for metastable lifetimes in parabolic SPDEs: Kramers' law and beyond*. arXiv:1202.0990v1, 2012.
- [5] Brassesco, S., P. Buttà, A. De Masi y E. Presutti: *Interface fluctuations and couplings in the $D = 1$ Ginzburg-Landau equation with noise*. J. Theor. Probab., 11(1):25–80, 1998.
- [6] Brassesco, S., A. De Masi y E. Presutti: *Brownian fluctuations of the interface in the $D = 1$ Ginzburg-Landau equation with noise*. Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat., 31(1):81–118, 1995.
- [7] Brassesco, Stella: *Some results on small random perturbations of an infinite dimensional dynamical system*. Stochastic Processes Appl., 38(1):33–53, 1991.
- [8] Cabaña, E.M.: *The vibrating string forced by white noise*. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., 15:111–130, 1970.

- [9] Cairoli, R. y John B. Walsh: *Stochastic integrals in the plane*. Acta Math., 134:111–183, 1975.
- [10] Carr, J. y R.L. Pego: *Metastable patterns in solutions of $u_t = \varepsilon^2 u_{xx} - f(u)$* . Commun. Pure Appl. Math., 42(5):523–576, 1989.
- [11] Cassandro, Marzio, Antonio Galves, Enzo Olivieri y Maria Eulália Vares: *Metastable behavior of stochastic dynamics: A pathwise approach*. J. Stat. Phys., 35:603–634, 1984.
- [12] Chafee, N. y E.F. Infante: *A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type*. Appl. Analysis, 4:17–37, 1974.
- [13] Chafee, Nathaniel y E.F. Infante: *Bifurcation and stability for a nonlinear parabolic partial differential equation*. Bull. Am. Math. Soc., 80:49–52, 1974.
- [14] Da Prato, Giuseppe y Jerzy Zabczyk: *Stochastic equations in infinite dimensions*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. 44. Cambridge: Cambridge University Press. xviii, 454 p., 1992.
- [15] De Masi, A., P.A. Ferrari y J.L. Lebowitz: *Reaction-diffusion equations for interacting particle systems*. J. Stat. Phys., 44:589–644, 1986.
- [16] Doering, Charles R.: *Nonlinear parabolic stochastic differential equations with additive colored noise on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$: A regulated stochastic quantization*. Commun. Math. Phys., 109:537–561, 1987.
- [17] Dudley, R.M.: *Real analysis and probability. Repr.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 74. Cambridge: Cambridge University Press. x, 555 p., 2002.
- [18] Faris, William G. y Giovanni Jona-Lasinio: *Large fluctuations for a nonlinear heat equation with noise*. J. Phys. A, 15:3025–3055, 1982.
- [19] Feller, W.: *An introduction to probability theory and its applications. Vol II. 2nd ed.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York : John Wiley and Sons, Inc. XXIV, 669 p., 1971.

- [20] Fife, Paul C. y J.B. McLeod: *The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions*. Arch. Ration. Mech. Anal., 65:335–361, 1977.
- [21] Fife, Paul C. y J.B. McLeod: *A phase plane discussion of convergence to travelling fronts for nonlinear diffusion*. Arch. Ration. Mech. Anal., 75:281–314, 1981.
- [22] Freidlin, Mark I.: *Random perturbations of reaction-diffusion equations: The quasi-deterministic approximation*. Trans. Am. Math. Soc., 305(2):665–697, 1988.
- [23] Freidlin, M.I. y A.D. Wentzell: *Random perturbations of dynamical systems. Transl. from the Russian by Joseph Szuecs. 2nd ed.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. 260. New York, NY: Springer. xi, 430 p. , 1998.
- [24] Funaki, T.: *The scaling limit for a stochastic PDE and the separation of phases*. Probab. Theory Relat. Fields, 102(2):221–288, 1995.
- [25] Funaki, Tadahisa: *Stochastic interface models*. Dembo, Amir et al., Lectures on probability theory and statistics. Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXIII – 2003. Lectures given at the 33rd probability summer school, Saint-Flour, France, July 6–23, 2003. Berlin: Springer. Lecture Notes in Mathematics 1869, 105–274., 2005.
- [26] Galves, Antonio, Enzo Olivieri y Maria Eulália Vares: *Metastability for a class of dynamical systems subject to small random perturbations*. Ann. Probab., 15:1288–1305, 1987.
- [27] Gihman, I.I. y A.V. Skorohod: *The theory of stochastic processes I. Transl. from the Russian by S. Kotz*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 210. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag. VIII, 574 p. , 1974.
- [28] Gihman, I.I. y A.V. Skorohod: *The theory of stochastic processes II. Translated from the Russian by S. Kotz*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Band 218. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. VII, 441 p., 1975.

- [29] Henry, Dan: *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Lecture Notes in Mathematics. 840. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag., 1981.
- [30] Henry, Daniel B.: *Some infinite-dimensional Morse-Smale systems defined by parabolic partial differential equations*. J. Differ. Equations, 59:165–205, 1985.
- [31] Khoshnevisan, Davar: *A primer on stochastic partial differential equations*. Khoshnevisan, Davar (ed.) et al., A minicourse on stochastic partial differential equations. Papers based on the presentations at the minicourse, Salt Lake City, UT, USA, May 8–19, 2006. Berlin: Springer. Lecture Notes in Mathematics 1962, 1-38., 2009.
- [32] Martinelli, F., E. Olivieri y E. Scoppola: *Small random perturbations of finite- and infinite-dimensional dynamical systems: Unpredictability of exit times*. Journal of Statistical Physics, 55:477–504, Mayo 1989.
- [33] Olivieri, Enzo y Maria Eulália Vares: *Large deviations and metastability*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 100. Cambridge: Cambridge University Press. xv, 512 p., 2004.
- [34] Reed, Michael y Barry Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics Vol. I: Functional Analysis*. Academic Press Inc. , 1972.
- [35] Ventsel', A. D. y M. I. Freidlin: *On Small Random Perturbations of Dynamical Systems*. Russ. Math. Surveys, 25(1):1–55, 1970.
- [36] Walsh, John B.: *A stochastic model of neural response*. Adv. Appl. Probab., 13:231–281, 1981.
- [37] Walsh, John B.: *An introduction to stochastic partial differential equations*. École d'été de probabilités de Saint-Flour XIV - 1984, Lect. Notes Math. 1180, 265-437., 1986.

Índice alfabético

- condiciones de Dirichlet, 2
- condiciones de Neumann, 16, 76
- continuidad de procesos, 10
- convergencia en distribución, 77

- derivada de Radon–Nicolom, 46
- desigualdad de Gronwall, 81
- distribución del tiempo de pasaje, 71
- distribución exponencial, 71
- distribución geométrica, 56, 71
- distribución normal, 6
- distribución normal multivariada, 6
- dominio de atracción, 5

- estabilidad de Lyapunov, 5
- existencia de procesos gaussianos, 7

- fórmula de Feynman-Kac, 78
- filtración, 10, 36
- filtración natural, 37
- función de covarianza, 6
- funcional de acción, 45, 51

- hoja browniana, 9

- integral de Wiener, 9, 13

- leyes de Eyring–Kramers, 73

- medias temporales, 68

- metaestabilidad, 55
- movimiento browniano, 9, 77

- operadores de traza finita, 18

- potencial, 3
- proceso adaptado, 36
- proceso continuo, 11
- proceso de Markov, 37
- proceso estocástico, 7
- proceso gaussiano, 7
- proceso isonormal, 8
- propiedad de Feller, 40
- propiedad fuerte de Markov, 40, 41
- puntos críticos, 4

- ruido blanco, 6

- solución “mild”, 20

- tiempo de parada, 40
- tiempo de pasaje, 66
- tiempo de salida de un conjunto acotado, 65
- tunnelling, 58

- variable aleatoria, 6
- versión continua, 11

Asociación Matemática Venezolana

Presidente: Rafael Sánchez Lamonedá

Consejo Directivo Nacional

Rafael Sánchez Lamonedá
Capítulo Capital

Alexander Carrasco
Capítulo de Centro Occidente

Oswaldo Araujo
Capítulo de Los Andes

Said Kas-Danouche
Capítulo de Oriente

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela.

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela
<http://amv.ivic.gob.ve>

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Consejo Directivo

Director

Eloy Sira

Subdirector

Alberto Quintero

Representantes del Ministerio del Poder Popular para la Ciencia, Tecnología e Innovación

Guillermo Barreto

Juan Luis Cabrera

Representante del Ministerio del Poder Popular para la Educación Universitaria

Prudencio Chacón

Representantes Laborales

José Garzaro

Víctor Peña

William Espinoza (Suplente)

Sirvia Ávila (Suplente)

Gerencia General

Lira Parra

Comisión Editorial

Eloy Sira (Coordinador)

Lucía Antillano

Horacio Biord

Jesús Eloy Conde

María Teresa Curcio

Rafael Gassón

Pamela Navarro

Héctor Suárez

Erika Wagner