

XXV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS  
EMALCA - VENEZUELA 2012

---

## CÁLCULO DIFERENCIAL COMBINATORIO

\*

Miguel A. Méndez

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC)  
mmendezenator@gmail.com, mmendez@ivic.gob.ve

---

MÉRIDA, VENEZUELA, 2 AL 8 DE SEPTIEMBRE DE 2012

## XXV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana.

La XXV Escuela Venezolana de Matemáticas recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Banco Central de Venezuela, el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) y Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA).

2010 Mathematics Subject Classification: 05A15, 05A19.

©Ediciones IVIC

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Rif: G-20004206-0

**Cálculo Diferencial Combinatorio**

Miguel A. Méndez

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas

Preprensa e impresión: Gráficas Lauki C. A.

Depósito legal If66020125102162

ISBN 978-980-261-136-2

Caracas, Venezuela

2012

# Prefacio

El propósito de este curso hacer una presentación históricamente motivada de varios resultados dispersos en la literatura relacionados con la noción combinatorial e intuitiva de derivada, introducida por Alexander Percy MacMahon a principios del siglo XX, y luego formalizada por A. Joyal en 1981. Usaremos esta noción para introducir y resolver varios problemas que relacionan el cálculo diferencial y la teoría combinatoria, en particular la interpretación combinatoria de la solución de una ecuación diferencial autónoma, cuyo primer ejemplo fue introducido por Desiré André en el siglo XIX.

MacMahon en [15] dió la siguiente descripción combinatoria del proceso del cálculo de la derivada enésima del monomio  $x^n$ . Escribiendo  $x^n$  como un producto  $x^n = xx \dots x$ , usando la regla de la derivada de un producto y el hecho de que  $(x)' = 1$ , se obtiene

$$\frac{d}{dx} x^n = \frac{d}{dx} (xx \dots x) = 1x \dots x + x1x \dots x + \dots + xx \dots x1$$

Vamos ahora a identificar 1 con el símbolo  $*$ ,

$$\frac{d}{dx} x^n = \frac{d}{dx} xx \dots x = *x \dots x + x * x \dots x + \dots + xx \dots x*$$

Para obtener la segunda derivada, aplicamos el mismo procedimiento a cada sumando. Por ejemplo, aplicándolo al primero

$$\frac{d}{dx} (*xx \dots) = *1x \dots x + *x1x \dots x + \dots + *x \dots x1$$

Substituyendo de nuevo 1 por  $*$ , pero esta vez colocando subíndices para distinguir el primer proceso de derivación del segundo, se obtiene

$$\frac{d^2}{dx^2} (xx \dots x) = *_1 *_2 x \dots x + *_1 x *_2 x \dots x + *_1 x \dots x *_2 + *_2 *_1 x \dots x + \dots + x *_1 \dots x *_2 + \dots$$

Es decir, reemplazamos dos de las  $n$  equis por el par  $*_1$  y  $*_2$  en todas las posiciones y ordenes posibles. Continuando de ese modo se obtiene que al calcular la derivada  $n$ -ésima queda la suma de palabras obtenidas de reemplazar cada una de las equis del producto por los símbolos  $*_1, *_2, \dots, *_n$  en todos los ordenes posibles:

$$\frac{d^n}{dx^n}(xx\dots x) = *_1 *_2 \cdots *_n + *_2 *_1 *_3 \cdots *_n + \dots$$

Así, suponiendo conocido el resultado  $\frac{d^n x^n}{dx^n} = n!$  este procedimiento demuestra que el número de permutaciones de  $n$  elementos es  $n!$ , o en el orden inverso, si sabemos que el número de permutaciones de  $n$  objetos es  $n!$  obtenemos  $\frac{d^n x^n}{dx^n} = n!$ . Este procedimiento parece banal, pero solo lo es aparentemente dada la simplicidad del ejemplo con que lo ilustramos. Puede ser aplicado a situaciones más complejas, incluso usando derivadas parciales, dando lugar a interpretaciones combinatorias de ciertos operadores diferenciales y a soluciones combinatorias de ecuaciones diferenciales.

Désiré André por su parte hizo el descubrimiento que pasamos a describir. Consideremos el conjunto  $[n]$  de enteros positivos totalmente ordenados entre 1 y  $n$ . Una permutación sobre  $[n]$ ,  $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$  se llama alternante si  $\sigma_1 < \sigma_2 > \sigma_3 < \sigma_4 \dots$ . Por ejemplo las permutaciones alternantes de  $[3]$  son sólo dos 213 y 312. Las permutaciones alternantes de  $[4]$  son 5:

$$2134, 3241, 3142, 4132, 4231.$$

Pues bien, en 1879 André se dió cuenta del siguiente hecho maravilloso: los coeficientes de la serie de Taylor de la función secante cuentan las permutaciones alternantes de longitud par, y los de la de la función tangente las permutaciones alternantes de longitud impar. Veamos los primeros términos de la expansión en serie de Taylor de la función  $\sec(t) + \tan(t)$ :

$$\sec(t) + \tan(t) = 1 + t + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{5}{4!}x^4 + \frac{16}{5!}x^5 + \frac{61}{6!}x^6 + \frac{272}{7!}x^7 + \dots$$

con ella podemos construirnos una pequeña tabla con los números de permutaciones alternantes:

$n$	$a_n$
1	1
2	1
3	2
4	5
5	16
6	61
7	272

En otras palabras, André demostró que la *serie generatriz de tipo exponencial* de los coeficientes  $a_n$  es  $\sec(t) + \tan(t)$ . La obtuvo mediante el siguiente procedimiento: dedujo una fórmula recursiva para dichos coeficientes, y de ella la ecuación diferencial para su serie generatriz exponencial. Al resolverla encontró las funciones antes mencionadas. Veamos esto en detalle.

- Primero demostró que  $a_n$  satisface la siguiente fórmula recurrente

$$2a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k}.$$

con la condición inicial  $a_0 = 1$ .

- Luego demostró que dicha recurrencia es equivalente a la ecuación diferencial para su serie generatriz  $Y$ ,

$$\begin{cases} 2Y' = Y^2 + 1 \\ Y(0) = 1. \end{cases}$$

- Finalmente consiguió la solución de dicha ecuación en la forma

$$\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sec(t) + \tan(t).$$

En 1981 A. Joyal introdujo una noción combinatoria de derivada, en el contexto de su *Teoría de especies combinatorias* [11], para la comprensión de las operaciones conjuntísticas o combinatorias que están detrás de las operaciones usuales entre series formales. El concepto combinatorio de derivada introducido por Joyal es un formalismo simple y a la vez riguroso de la idea intuitiva usada por MacMahon explicada mas arriba. Usando esta maquinaria, Leroux y Viennot [14] dieron una interpretación combinatoria general a la solución de una ecuación diferencial autónoma en términos de árboles crecientes. Las permutaciones alternantes son un ejemplo del tipo de problemas que resuelve dicha teoría.

En esta monografía estudiamos diversos aspectos del cálculo diferencial combinatorio, introduciendo antes nuestra herramienta fundamental: la interpretación combinatoria detrás de las operaciones entre series formales. Ésta es esencialmente la formulado por A. Joyal, [11, 3], pero sin introducir el concepto de especie combinatoria. Creemos que de esta manera la presentación de estos tópicos es más simple e inmediata, por que se evita el uso, innecesario para nuestros fines en el contexto de esta monografía, del lenguaje de Teoría de Categorías.

Hacemos una introducción breve al cálculo umbral, sistematizado por G-C. Rota y sus colaboradores [19], [23], [22]. Estudiamos luego el aspecto combinatorio de cierto tipo de ecuaciones integrales, usando el modelo de composiciones de un

entero. Mostramos que éstas se reducen a ecuaciones diferenciales lineales. También hacemos un recuento breve del trabajo de Leroux-Viennot [14] relacionado con la resolución combinatoria de ecuaciones diferenciales autónomas. Expone-mos como estas técnicas se aplican al problema del orden normal de operadores de creación y aniquilación de la mecánica cuántica [12], [16],[18]. La parte final del curso es un material no publicado a esta fecha. Resolvemos desde el punto de vista combinatorial una clase de ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden, que dependen un número numerable de parámetros, y cuyo lado derecho está modificado por un desplazamiento (shift), en los parámetros. Las soluciones combinatorias a este tipo de ecuaciones son importantes en el estudio estadístico de la profundidad de nodos en los árboles de búsqueda, y otros tipos de estructuras de datos en teoría de la computación [2], [8], [9].

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>III</b>
<b>1. Nociones preliminares de combinatoria</b>	<b>1</b>
1.1. Composiciones . . . . .	4
1.2. Números de Stirling y números de Bell . . . . .	4
1.3. Permutaciones y números de Stirling del primer tipo . . . . .	7
1.4. Grafos y árboles . . . . .	9
<b>2. Funciones generatrices y operaciones</b>	<b>11</b>
2.0.1. Topología de las series formales . . . . .	12
2.1. Operaciones fundamentales con funciones generatrices . . . . .	12
2.2. La combinatoria de las operaciones fundamentales . . . . .	14
2.2.1. Algunas configuraciones elementales . . . . .	16
2.2.2. Substitución y Fórmula exponencial . . . . .	18
2.2.3. <u>Ejercicios</u> . . . . .	25
2.3. Cálculo Umbral: Familias de tipo binomial, de Sheffer, y de Appèl . . . . .	26
2.3.1. Ejercicios . . . . .	29
2.4. Derivada, Integral, y sus interpretaciones combinatorias . . . . .	30
2.5. Operadores integrales y ecuaciones diferenciales lineales . . . . .	32
2.6. Operadores de creación y aniquilación . . . . .	35
<b>3. Funciones generatrices en dos y más variables.</b>	<b>39</b>
3.1. Conjuntos coloreados y operaciones combinatorias . . . . .	39
3.2. Ecuaciones diferenciales autónomas . . . . .	43
3.2.1. Árboles binarios crecientes . . . . .	43
3.2.2. Permutaciones alternantes . . . . .	44
3.2.3. Fórmula de Lie-Gröbner-Taylor . . . . .	47

<b>4. Pletismo de desplazamiento y ecuaciones diferenciales autónomas</b>	<b>51</b>
4.1. Operaciones combinatorias . . . . .	52
4.2. Fórmula de Lie-Gröbner-Taylor multivariada . . . . .	54
4.3. Pletismo de desplazamiento y fórmula de Lie-Gröbner-Taylor pletística . . . . .	59



# Capítulo 1

## Nociones preliminares de combinatoria

Denotaremos por  $D^C$  al conjunto de funciones de un conjunto  $C$  (finito) al conjunto  $D$  (finito). Se demuestra fácilmente  $|D^C| = |D|^{|C|}$ , donde  $|\cdot|$  denota el cardinal de un conjunto. Para un par de enteros  $m, n$ ,  $(m)_n$  y  $(m)^n$  denotan respectivamente los factoriales decrecientes y crecientes

$$\begin{aligned}(m)_n &= m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1) \\ m^{(n)} &= m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)\end{aligned}$$

El número de funciones inyectivas de  $C$  en  $D$  es igual a  $(|C|)_{|D|}$ . Consideremos un alfabeto (conjunto finito totalmente ordenado)  $\mathbb{A}$ . Una palabra de longitud  $n$ , con letras en  $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  es cualquier sucesión  $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$  de letras en  $\mathbb{A}$ . Denotemos por  $[n]$  al conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ . El conjunto de todas las palabras de longitud  $n$  con letras en el alfabeto  $\mathbb{A}$  se puede identificar con el conjunto  $\mathbb{A}^{[n]}$  de todas las funciones  $f: [n] \rightarrow \mathbb{A}$ . Luego, el cardinal de dicho conjunto es  $m^n$ .

De la misma manera  $(m)_n$  cuenta el número de palabras inyectivas de longitud  $n$  sobre  $\mathbb{A}$ ; es decir, el número de palabras de longitud  $n$ , sin repetición de letras, tomadas del alfabeto  $\mathbb{A}$  (funciones inyectivas de  $[n]$  en el alfabeto  $\mathbb{A}$ , cuya cardinalidad es  $m$ ).

Una palabra inyectiva de longitud  $m = |\mathbb{A}|$ , con letras de  $\mathbb{A}$  se llama un *orden lineal sobre A* o lista de los elementos de  $\mathbb{A}$ . El número de ordenes lineales sobre cualquier conjunto de cardinalidad  $m$  es

$$(m)_m = m(m-1)(m-2)\dots 1 = m!.$$

El factorial creciente  $m^{(n)}$  cuenta el número de *disposiciones* de un conjunto de cardinal  $n$  en otro de cardinal  $m$ . Una disposición es una función  $d: [n] \rightarrow [m]$  mas

un orden lineal en cada una de sus preimágenes  $d^{-1}(j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . La mejor manera de entender lo que es una disposición es pensando  $d$  como una manera de colocar  $n$  banderas distintas en  $m$  astas. Para colocar la primera, tenemos  $m$  posibles astas que elegir. Para colocar la segunda bandera tenemos  $m - 1$  posibilidades en las astas libres más dos posibilidades en el asta ocupada por la primera bandera (por debajo, o por arriba de la primera bandera), total  $m + 1$  posibilidades. Para colocar la tercera bandera tenemos  $m + 2$  posibilidades. Así hasta agotar las banderas. El total es igual a  $m(m + 1)(m + 2) \dots (m + n - 1)$ .

Recordemos que los coeficientes binomiales  $\binom{n}{k}$  se definen por la fórmula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n)_k}{k!}.$$

**Ejercicio 1.1.** Verificar que los coeficientes binomiales cuentan el número de subconjuntos de cardinalidad  $k$  de un conjunto de cardinalidad  $n$ . ♣

**Proposición 1.1.** Para todo entero no-negativo  $n$  se tiene la identidad

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

*Demostración.*  $2^n$  cuenta el número de funciones de un conjunto  $C$  cualquiera de cardinalidad  $n$ , en el conjunto  $\{0, 1\}$ . La correspondencia

$$f \mapsto f^{-1}(\{1\})$$

establece una biyección entre el conjunto  $\{0, 1\}^C$  y el conjunto  $\mathcal{P}[C]$  de todas las partes de  $C$ . Por otro lado,  $\binom{n}{k}$  es el cardinal del conjunto  $\mathcal{P}_k[C]$ , cuyos elementos son los subconjuntos de  $C$  con cardinal  $k$ .  $\square$

**Proposición 1.2.** Los coeficientes binomiales satisfacen la siguiente fórmula recursiva (Identidad de Pascal)

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1 \\ \binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \end{aligned} \tag{1.1}$$

*Demostración.* El conjunto  $\mathcal{P}_k[n+1]$  se descompone en dos clases disjuntas: el conjunto de las partes de  $[n+1]$  que no contienen a  $n+1$  y el conjunto de las partes que lo contienen. El primer conjunto es exactamente  $\mathcal{P}_k[n]$  y existe una biyección entre el segundo conjunto y  $\mathcal{P}_{k-1}[[n]]$ .  $\square$

**Ejercicio 1.2.** Demuestre biyectivamente las siguientes identidades:

1.  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2.  $(m+1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^k$
3. Identidad de Vandermonde:  $\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}$



**Ejercicio 1.3.** Demuestre biyectivamente la identidad binomial

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Ayuda: Demuestre la identidad para valores enteros arbitrarios de  $x$  e  $y$ . Luego use el principio de *extensión de identidades algebraicas*: dos polinomios son iguales si coinciden en un número de valores mayor que su grado. ♣

**Ejercicio 1.4.** Definamos el coeficiente multinomial

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!},$$

donde  $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ . Demuestre que  $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m}$  cuenta el número de tuplas  $(C_1, C_2, \dots, C_m)$  de subconjuntos de un conjunto  $C$  de cardinalidad  $n$ , tales que

$$|C_i| = n_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^m C_i = C.$$

Aquí, y de ahora en adelante, el símbolo de suma denota unión disjunta de conjuntos. ♣

**Ejercicio 1.5.**

1. Usando la interpretación de los coeficientes multinomiales en términos de tuplas de conjuntos disjuntos dos a dos, y del coeficiente  $m^n$  en términos de funciones, dar una demostración biyectiva de la identidad

$$m^n = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_m=n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m}$$

2. Interprete los coeficientes multinomiales en términos de palabras con repetición. Usando esa interpretación demuestre (biyectivamente) la identidad del problema anterior.



## 1.1. Composiciones.

Una *composición* de un número entero positivo  $n$  es una tupla de enteros positivos cuya suma da  $n$ . Por ejemplo, las composiciones de 3 son 4:  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 1)$  y  $(1, 2)$  y  $(3)$ . Las composiciones de 4 son 8:  $(1, 1, 1, 1)$ ,  $(2, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 1)$ ,  $(1, 1, 2)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(1, 3)$ , y  $(4)$ . Una composición de  $n$  con  $k$  partes la llamaremos una  $k$ -composición. El número de 3 composiciones de 4 es tres. En general se tiene:

**Proposición 1.3.** *El número de  $k$  composiciones de  $n$ ,  $k \leq n$ , es igual a  $\binom{n-1}{k-1}$ . El número total de composiciones de  $n$  es  $2^{n-1}$*

*Demostración.* Sea  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$  un conjunto totalmente ordenado. Cada  $k$ -composición de  $n$ ,  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  la representaremos poniéndole barras a la palabra  $c_1 c_2 c_3 \dots c_n$ , una después de cada uno de los elementos:

$$c_{n_1}, c_{n_1+n_2}, c_{n_1+n_2+n_3}, \dots, c_{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}}.$$

Por ejemplo, representamos a la composición  $(2, 3, 2, 1)$  de 8 así:

$$c_1 \bar{c}_2 c_3 c_4 \bar{c}_5 c_6 \bar{c}_7 c_8 \rightsquigarrow c_1 c_2 | c_3 c_4 c_5 | c_6 c_7 | c_8$$

La palabra queda así dividida por  $k-1$  barras en  $k$  segmentos, el primero de longitud  $n_1$ , el segundo de longitud  $n_2$ , etc. Esto se puede hacer de  $\binom{n-1}{k-1}$  maneras, puesto que estamos seleccionando  $k-1$  elementos de los elementos del conjunto  $\{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}\}$ . La suma de esos coeficientes binomiales nos da  $2^{n-1}$ .  $\square$

El número de muchos tipos de composiciones se pueden calcular mediante el método de sucesiones recurrentes. Por ejemplo, si denotamos por  $F_n$  el número de composiciones de  $n$  cuyas partes todas son 1 o 2 solamente, y suponemos que el cero consta de sólo una parte, entonces se tiene:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

con  $F_0 = 1$  y  $F_1 = 1$ . La recursión sale de clasificar las composiciones de acuerdo al tamaño de la primera componente.

**Ejercicio 1.6.** Hallar una fórmula recursiva para el número  $F_n^{(k)}$  de composiciones de  $n$  en las cuales todas las partes son menores o iguales a  $k$ . ♣

## 1.2. Números de Stirling y números de Bell

Recordemos que una partición de un conjunto finito  $C$  es una colección de subconjuntos de  $C$ , disjuntos dos a dos, y cuya unión es  $C$ . Los elementos (conjuntos) de una partición se llaman *bloques*.

Consideremos el conjunto  $\Pi[C]$ , de todas las particiones del conjunto  $C$ . Para  $C = \emptyset$ ,  $\Pi[\emptyset]$  consta de un solo elemento, la partición vacía.

El número de Bell  $B_n$  se define como el cardinal de  $\Pi[n]$ . Por ejemplo, para  $C = \{a, b, c\}$ , los elementos de  $\Pi[C]$  son los conjuntos

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \{\{a, b\}, \{c\}\}, \{\{a, c\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{b, c\}\}, \{\{a, b, c\}\}.$$

Por lo tanto se tiene  $B_3 = 5$ . Los números de Bell se llaman también números exponenciales [1], la razón de este nombre la veremos luego.

El número de Stirling de segundo tipo  $S(n, k)$ ,  $n$  y  $k$  enteros no-negativos, se define como el cardinal del conjunto de las particiones con  $k$  bloques sobre un conjunto de  $n$  elementos. En otras palabras  $S(n, k) = |\Pi_k[[n]]|$ , donde  $\Pi_k[[n]]$  denota el conjunto de particiones de  $[n]$  que tienen  $k$  bloques. Por ejemplo  $S(3, 2) = 3$ . Claramente se tiene la identidad:

$$B_n = \sum_{k=1}^n S(n, k)$$

**Proposición 1.4.** *Los números de Bell satisfacen la siguiente recurrencia*

$$B_0 = 1$$

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} \tag{1.2}$$

*Demostración.* Es claro que  $B_0 = 1$ . Consideremos el conjunto

$$\Lambda = \{(C, \tau) : C \subseteq [n], \tau \in \Pi[[n] - C]\}.$$

El cardinal de  $\Lambda$  es igual a la suma del lado derecho de (1.2), por que  $\Lambda = \sum_{k=1}^n \Lambda_k$ , donde  $\Lambda_k$  es el subconjunto de  $\Lambda$  tal que el cardinal de  $C$  es igual a  $k$ . Es claro que  $|\Lambda_k| = \binom{n}{k} B_{n-k}$ , por que el subconjunto  $C$  se puede escoger de  $\binom{n}{k}$  maneras, y la partición  $\tau$ , de  $B_{n-k}$  maneras. Ahora basta definir una biyección  $\psi$  de  $\Pi[n+1]$  en  $\Lambda$ . para una partición  $\pi$  de  $\Pi[n+1]$  se escoge el único bloque  $B$  en  $\pi$  que contiene a  $n+1$ , y definimos  $\psi(\pi) = (B - \{n+1\}, \pi - \{B\})$ . Es fácil verificar que  $\psi$  tiene una inversa, y por lo tanto es una biyección (¿Cuál es su inversa?).  $\square$

**Proposición 1.5.** *Los números de Stirling  $S(n, k)$  satisfacen la siguiente fórmula recursiva:*

$$S(0, 0) = 1, S(n, 0) = 0, n > 0$$

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k) \tag{1.3}$$

*Demostración.* La demostración es similar a la demostración de las proposiciones previas, y se deja al lector.  $\square$

**Ejercicio 1.7.** Demuestre biyectivamente la relación de recurrencia

$$S(n+1, k) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} S(j, k-1).$$



**Ejercicio 1.8.** Demuestre biyectivamente la identidad

$$x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k)(x)_k$$

donde  $(x)_k = x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)$  es el factorial decreciente.

Ayuda: Demuestre la identidad suponiendo que  $x$  es un número entero  $m$ , y luego use el principio de extensión de identidades algebraicas. ♣

**Ejercicio 1.9.** Demuestre que el número de funciones sobreyectivas de un conjunto de cardinalidad  $n$  en un conjunto de cardinalidad  $k$  es igual a  $k!S(n, k)$ . ♣

La *clase o tipo* de una partición  $\pi \in \Pi[n]$  es una tupla  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $n = |C|$ , donde  $\alpha_i$  es el número de bloques de  $\pi$  de cardinalidad  $i$ . El tipo de una partición  $\Pi[n]$  obviamente satisface  $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + \alpha_n = n$ . Por simplicidad en la notación esto se indica como  $\alpha \vdash n$ .

**Ejercicio 1.10.** Demuestre que el número de particiones de  $\Pi[n]$  de tipo  $\alpha$  es igual a

$$\frac{n!}{1^{\alpha_1} \alpha_1! 2^{\alpha_2} \alpha_2! \dots n^{\alpha_n} \alpha_n!}.$$

Explique el porqué de la identidad

$$B_n = \sum_{\alpha \vdash n} \frac{n!}{1^{\alpha_1} \alpha_1! 2^{\alpha_2} \alpha_2! \dots n^{\alpha_n} \alpha_n!}.$$



**Ejercicio 1.11.** Un apareamiento es una partición cuyos bloques son todos de tamaño dos. Una involución es una partición cuyos bloques tienen a lo sumo tamaño 2. Demostrar que el número de apareamientos en un conjunto de cardinal  $2n$  es

$$(2n)!! = (2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 3, 1,$$

y que el número de involuciones en  $n$  elementos, con exactamente  $k$  bloques de tamaño dos,  $2k \leq n$ , es igual a

$$\frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}.$$



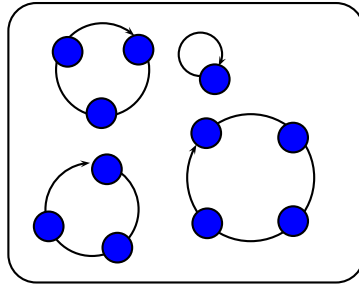


Figura 1.1: Descomposición de una permutación en ciclos

### 1.3. Permutaciones y números de Stirling del primer tipo

Una permutación sobre un conjunto  $C$  es una biyección  $\sigma : C \rightarrow C$ . Una permutación se llama cíclica si la órbita de cualquier elemento es el conjunto  $C$ , es decir:

$$C = \{c, \sigma(c), \sigma^2(c), \sigma^3(c), \dots, \sigma^{n-1}(c)\}.$$

En general, toda permutación se descompone en ciclos o permutaciones cíclicas. Es decir, las órbitas de  $\sigma$  forman una partición  $\pi$  de  $C$  de tal modo que cada restricción  $\sigma_B, B \in \pi$ , es una permutación cíclica. La partición de las órbitas se llama *partición subyacente* a  $\sigma$  y diremos que  $p(\sigma) = \pi$ .

Cuando el conjunto  $C$  está totalmente ordenado  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ , hay varias maneras de hacerle corresponder de una manera natural a  $\sigma$  una lista u orden total sobre  $C$ . La primera forma es hacerle corresponder la lista de sus imágenes, en el orden dado por  $C$ :

$$\sigma \mapsto \sigma(c_1)\sigma(c_2)\dots\sigma(c_n).$$

La segunda construcción que mostraremos aquí pasa primero por las permutaciones cíclicas. Si  $\sigma$  es cíclica, se coloca el menor elemento de  $C$  de primero en la lista, y luego en orden sus imágenes por  $\sigma$

$$\sigma \mapsto c_1\sigma(c_1)\sigma^2(c_1)\dots\sigma^{n-1}(c_1).$$

Así, a una permutación cíclica le corresponde un orden lineal cuyo primer elemento es el mínimo de  $C$ . El número de permutaciones cíclicas es entonces  $(n - 1)!$  Si  $\sigma$  se descompone en ciclos  $\sigma = \{\sigma_B\}_{B \in \pi}$ , se ordenan primero los bloques de  $\pi$  en orden decreciente de sus mínimos y luego a cada ciclo se le asigna su orden lineal correspondiente, y se yuxtaponen de acuerdo al orden de los bloques:

$$\sigma \mapsto \sigma_{B_k}\sigma_{B_{k-1}}\dots\sigma_{B_1}.$$

Por ejemplo, a la permutación  $(c_2, c_4, c_1)(c_5, c_9, c_3), (c_7, c_6, c_8)$  le corresponde la lista:

$$c_6 c_8 c_7 c_3 c_5 c_9 c_1 c_2 c_4.$$

Esta biyección es claramente reversible. Por ejemplo a la lista 798564132 le corresponde la permutación  $\sigma = (798)(56)(4)(132)$ , la cual se obtiene consiguiendo primero los mínimos locales recorriendo la lista de izquierda a derecha, y luego descomponiendo la lista en ciclos, cada uno con los con los elementos entre dos mínimos locales:

$$798564132 \mapsto 798|56|4|132 \mapsto (798)(56)(4)(132).$$

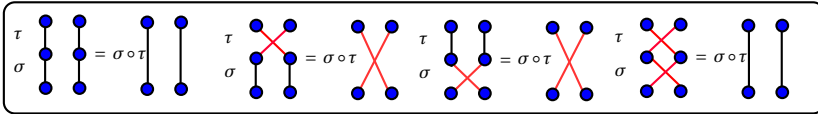
En lo que sigue, cuando se trate de conjuntos ordenados, identificaremos permutaciones con listas y ciclos con listas cuyo primer elemento es el mínimo de  $C$ . Denotaremos por  $S_n$  el conjunto de permutaciones de  $[n]$ .

Sea  $\sigma \in S_n$ . Un subconjunto  $A$  de  $[n]$  de cardinal dos se llama una *inversión* de  $\sigma$  si  $\sigma$  transpone el orden natural de sus dos elementos, es decir si  $i, j \in A, i < j \Rightarrow \sigma(i) > \sigma(j)$ . El *signo de una permutación* está dado por la paridad del número de inversiones:

$$\text{sig}(\sigma) = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2[n]} I(\sigma, \{i, j\}),$$

donde

$$I(\sigma, \{i, j\}) = \begin{cases} -1 & \text{si } \{i, j\} \text{ es una inversión de } \sigma \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$



Es fácil verificar que  $I(\sigma \circ \tau, \{i, j\}) = I(\sigma, \{\tau(i), \tau(j)\})I(\tau, \{i, j\})$  (ver figura arriba). Luego tenemos

$$\begin{aligned} \text{sig}(\sigma \circ \tau) &= \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2[n]} I(\sigma \circ \tau, \{i, j\}) = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2[n]} I(\sigma, \{\tau(i), \tau(j)\})I(\tau, \{i, j\}) \\ &= \prod_{\{r,s\} \in \mathcal{P}_2[n]} I(\sigma, \{r, s\}) \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}_2[n]} I(\tau, \{i, j\}) = \text{sig}(\sigma)\text{sig}(\tau). \end{aligned}$$

Se obtiene entonces que el signo es una función multiplicativa

$$\text{sig}: S_n \rightarrow \{1, -1\}.$$

El signo del ciclo  $(123 \dots n)$  es  $(-1)^{n-1}$ , puesto que tiene  $n - 1$  inversiones. Para un ciclo arbitrario  $\tau = (1, \tau(1), \tau^2(1), \dots, \tau^{n-1}(1))$  existe una permutación  $\eta$  tal que

$$(123 \dots n) = \eta \tau \eta^{-1}. \tag{1.4}$$



Por la multiplicatividad del signo, tenemos entonces que  $\text{sig}(\tau) = (-1)^{n-1}$  para cualquiera que sea el ciclo  $\tau$  de longitud  $n$ . El signo de una permutación se  $S_n$  depende entonces solamente del número  $k$  de sus ciclos.

$$\text{sig}(\sigma) = \prod_{B \in \pi} (-1)^{|B|-1} = (-1)^{n-k}.$$

Los números de Stirling de primer tipo se definen como la suma de los signos de las permutaciones de  $n$  con exactamente  $k$  ciclos:

$$s(n, k) = \sum_{\pi \in \Pi_k[n]} \sum_{p(\sigma) = \pi} \prod_{B \in \pi} (-1)^{|B|-1}.$$

Como el número de permutaciones cuya partición subyacente es  $\pi$  es

$$\prod_{B \in \pi} (|B| - 1)!$$

tenemos finalmente

$$s(n, k) = \sum_{\pi \in \Pi_k[n]} \prod_{B \in \pi} (-1)^{|B|-1} (|B| - 1)! = (-1)^{n-k} \sum_{\pi \in \Pi_k[n]} \prod_{B \in \pi} (|B| - 1)! \quad (1.5)$$

Observar que el valor absoluto de  $s(n, k)$  es el número de permutaciones de  $S_n$  con exactamente  $k$  bloques.

**Ejercicio 1.12.** Escribir explícitamente la permutación  $\eta$  de la ecuación (1.4). ♣

**Ejercicio 1.13.** Demostrar que la suma de los signos de todas las permutaciones de  $S_n$  es cero, para  $n > 0$ . Deducir que:

$$\sum_{k=1}^n s(n, k) = \delta_{n,1}.$$

♣

## 1.4. Grafos y árboles

Un *grafo simple* consta de un conjunto de vértices y un conjunto de lados,

$$g = (V, E).$$

Los lados están formados por pares no ordenados de vértices, es decir  $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ . Un *camino* de longitud  $n$  entre un par de vértices  $u, v$  de un grafo  $g$  es una sucesión de vértices  $u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_n = v$ , tal que para todo  $i = 0, \dots, n-1$ , el par  $\{v_i, v_{i+1}\}$  es un lado de  $g$ . Un grafo se llama *conexo*, si entre cualquier par de vértices existe un camino.

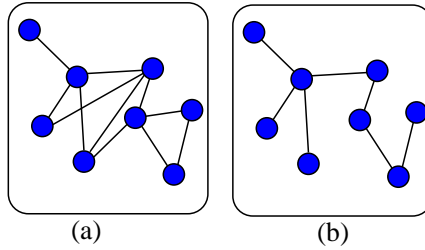


Figura 1.2: (a) Grafo simple y (b) Árbol, sobre el mismo conjunto de vértices

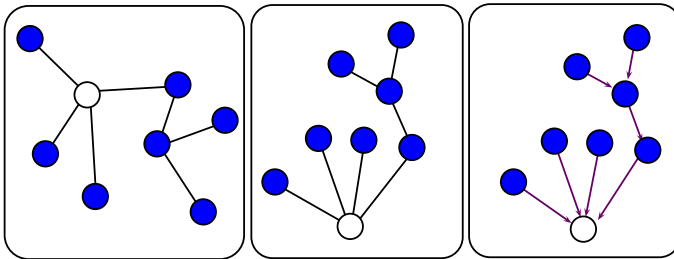


Figura 1.3: Tres representaciones del mismo árbol con raíz

Un *árbol* es un tipo especial de grafo en el cual cualquier par de vértices siempre está unido por un único camino (ver figura 1.2). Un árbol con raíz es un árbol con un vértice distinguido al cual llamamos raíz. En general pensamos a los árboles con raíz, con sus lados orientados en dirección a ella. La *fibra* de un vértice de un árbol es el conjunto de vértices que lo preceden inmediatamente bajo en esa orientación de lados. La *profundidad* de un vértice de un árbol es la longitud del camino que lo une a la raíz.

Un árbol planar es uno topológicamente inmerso en el plano. Esto es equivalente a decir que cada una de las sus fibras está dotada de un orden total. Al cambiar cualquiera de esos ordenes, obtenemos otro árbol planar.

**Ejercicio 1.14.** Calcular el número de grafos que se pueden construir con  $n$  vértices. ♣

## Capítulo 2

# Funciones generatrices y operaciones

Fue Laplace quien descubrió el método de funciones generatrices y la correspondencia entre operaciones conjuntísticas y operaciones entre series formales de potencias. Usó eficientemente este método para resolver problemas de combinatoria, porque requería de esas herramientas para sus investigaciones en teoría de probabilidades [13].

Comenzamos por explicar lo que es una serie generatriz o serie formal de tipo exponencial, junto con las operaciones desde el punto de vista algebraico, para luego, siguiendo el punto de vista de Joyal [11], explicar su correlato conjuntístico o combinatorio.

Una *serie formal de tipo exponencial* es una expresión de la forma:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{t^n}{n!}, \quad (2.1)$$

donde los coeficientes (o términos)  $f_n$  pertenecen en general a un cuerpo como el de los reales o los complejos, o a un anillo conmutativo con identidad que contenga a  $\mathbb{Q}$  como subanillo (tal como cualquier anillo de polinomios en una o varias variables con coeficientes en  $\mathbb{C}$ ). Para simplificar la notación, en general nos referiremos a series formales genéricas con letras mayúsculas, y a sus coeficientes con la misma letra, pero en minúsculas. Con frecuencia denotaremos como  $F(0)$  al término constante  $f_0$  de  $F(t)$ .

Dada una sucesión de coeficientes (términos)  $f_n$ , diremos que la serie formal (2.1) es su *función generatriz exponencial* o simplemente, su función (o serie) generatriz. Fijando el anillo de coeficientes  $\mathcal{R}$ , denotaremos el conjunto de las series formales en la indeterminada  $t$  y con coeficientes en  $\mathcal{R}$  como  $\mathcal{R}[[t]]$ .

**Ejemplo 2.1.** Muchas veces llamamos a series formales con los mismos nombres de las funciones analíticas que ellas representarían en el caso de que tengan un radio de convergencia positivo. Por ejemplo, la serie generatriz cuyos coeficientes son todos 1 es la exponencial

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Si  $\mathcal{R} = \mathbb{R}[x]$ , el anillo de polinomios en la indeterminada  $x$ , la serie generatriz de las potencias de  $x$ ,  $(1, x, x^2, \dots)$  se denota

$$e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!}.$$

De igual manera, la serie generatriz de la sucesión de los factoriales  $(1, 2, 6, 24, \dots)$ , es la serie geométrica

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$



### 2.0.1. Topología de las series formales

Podemos definir una topología en  $\mathcal{R}[[t]]$  usando la siguiente definición de convergencia de sucesiones. Dada una sucesión de series formales  $F_k(t)$ , diremos que  $F_k(t)$  converge a la serie formal  $F(t)$  si cada coeficiente de  $F_k(t)$  es igual al correspondiente coeficiente de  $F(t)$  cuando  $k$  se hace lo suficientemente grande. Mas precisamente: dado  $n$  entero, existe un entero  $K_n$  (que depende de  $n$ ) tal que cuando  $k > K_n$  entonces  $f_n^{(k)} = f_n$  ( $f_n^{(k)}$  es el coeficiente enésimo de  $F_k(t)$ ). Si identificamos a cada serie formal con la sucesión de sus coeficientes,  $F \equiv (f_0, f_1, f_2, \dots)$ , la topología que recién definimos en  $\mathcal{R}[[t]] \equiv \mathcal{R}^{\mathbb{N}}$  no es otra que la topología producto con la topología discreta en cada componente  $\mathcal{R}$ . Dicha topología es 1-numerable, y por lo tanto está completamente caracterizada por sus sucesiones convergentes.

**Ejemplo 2.2.** La sucesión de potencias  $t^n$  converge a cero en la topología de series formales. En general, si se define la función  $\rho(F(t)) = \min\{k \mid f_k \neq 0\}$ , se puede demostrar que  $F_k(t) \rightarrow 0$  si y sólo si  $\rho(F_k(t)) \rightarrow \infty$  para  $k \rightarrow \infty$ . ♠

## 2.1. Operaciones fundamentales con funciones generatrices

Las operaciones fundamentales entre funciones generatrices son la suma, el producto y la substitución, las cuales pasamos a describir. Dadas dos funciones ge-

neratrices  $F$  y  $G$ , se define su suma como la función generatriz de la suma término a término de sus respectivos coeficientes:

$$(F + G)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n + g_n) \frac{t^n}{n!}.$$

De una manera mas general, bajo ciertas condiciones se puede definir la suma formal de una sucesión infinita de series formales. Una sucesión de series formales  $\{F_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$  se llama *sumable* si para todo  $n$ , el coeficiente  $n$ -ésimo de  $F_k$  se anula para  $k$  lo suficientemente grande. Si  $F_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)} \frac{t^k}{k!}$ , entonces se define  $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$  como la suma término a término de las series respectivas

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_k^{(n)} \right) \frac{t^k}{k!}.$$

La definición tiene sentido por que solamente hay un número finito de elementos diferentes de cero en la suma interna.

La condición de sumabilidad se puede reformular en términos de la topología de series formales arriba definida. Ella es equivalente a la condición de convergencia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = 0.$$

Es fácil demostrar la siguiente proposición, y se deja como ejercicio al lector.

**Proposición 2.1.** *Sea  $\{F_k(t)\}_{n=0}^{\infty}$  una sucesión de series formales en  $\mathcal{R}[[t]]$ . La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$  correspondiente es convergente si y sólo si  $F_n(t)$  converge a cero.*

Así, tenemos la equivalencia:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) \text{ es sumable} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) \text{ es convergente.} \quad (2.2)$$

El producto de dos series se define de una manera similar al producto de polinomios, aplicando propiedad distributiva y agrupando términos semejantes, teniendo en cuenta que el resultado debe expresarse también como una serie formal de tipo exponencial:

$$(F.G)(x) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{t^k}{k!} \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} g_j \frac{t^j}{j!} \right) = \sum_{k,j=0}^{\infty} f_k g_j \frac{t^{k+j}}{k! j!}.$$

Haciendo  $k + j = m$ , y substituyendo  $j$  por  $m - k$ , obtenemos

$$(F.G)(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^m f_k g_{m-k} \frac{1}{k!(m-k)!} \right) t^m.$$

Dividiendo y multiplicamos por  $m!$  obtenemos finalmente

$$(F.G)(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f_k g_{m-k} \right) \frac{t^m}{m!}. \quad (2.3)$$

De una manera similar al caso de la suma, se puede definir el producto de una familia infinita de series formales:  $\prod_{k=1}^{\infty} F_k(t)$ . Diremos que una familia de series formales  $\{F_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$  es *multiplicable* si la sucesión de productos parciales

$$\prod_{k=1}^n F_k(t)$$

es convergente. En el ejercicio 2.2.1 el lector puede ver un criterio similar al de la suma para la convergencia del producto infinito de series formales.

Si  $G(0) = 0$  definimos la *substitución* de  $G$  en  $F$  como la serie

$$F(G(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{G^k(t)}{k!} \quad (2.4)$$

Requerimos de la condición  $G(0) = 0$  para que la serie en (2.4) sea convergente, y la definición tenga sentido para  $F$  arbitraria (ver ejercicio 2.2.1).

## 2.2. La combinatoria de las operaciones fundamentales

A menudo las series formales tienen asociadas familias de estructuras combinatorias que utilizan como base un conjunto finito. Más precisamente, en muchos casos el coeficiente  $f_n$  es el cardinal de un conjunto  $F_n$  de ‘estructuras combinatorias’ construidas sobre un conjunto de  $n$  elementos (pensados frecuentemente como ‘vértices’). Por ejemplo, la serie geométrica  $L(x) = \frac{1}{1-x}$  es la función generatriz de los factoriales  $(1!, 2!, 3!, \dots)$ , cuyo término  $n$ -ésimo es el cardinal del conjunto  $S_n$  de permutaciones que se pueden hacer de un conjunto con  $n$  elementos. De esa manera la serie geométrica tiene asociada naturalmente a la familia de permutaciones (u ordenes lineales).

Un *conjunto con pesos* es un conjunto  $C$  junto con una función  $w : C \rightarrow \mathcal{R}$  (pesos) de  $C$  en el anillo de coeficientes de la serie. El *inventario*  $|C|_w$  de  $(C, w)$  se define como la suma de los pesos de los elementos de  $C$ ;

$$|C|_w = \sum_{c \in C} w(c).$$

Otras veces  $f_n$  es el inventario de un conjunto de  $n$  elementos con pesos. Siguiendo el ejemplo anterior, si a cada permutación  $\sigma$  se le asigna el peso  $w(\sigma) = x^{k(\sigma)}$ , donde

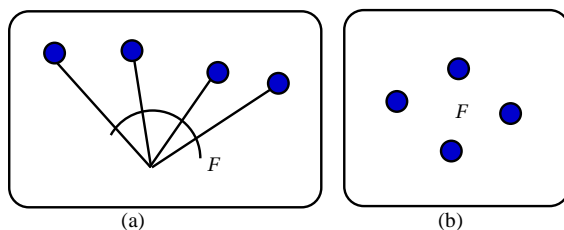


Figura 2.1: Dos representaciones del coeficiente  $F[4]$ .

$k(\sigma)$  es el número de ciclos de  $\sigma$ , el inventario de  $S_n$  es

$$|S_n|_w = \sum_{\sigma \in S_n} x^{k(\sigma)} = \sum_{\sigma \in S_n} |s(n, k)| x^k,$$

el cual es un polinomio en la variable  $x$ . En este caso la función generatriz de las permutaciones, inventariadas de acuerdo al número de ciclos, es, como veremos mas adelante

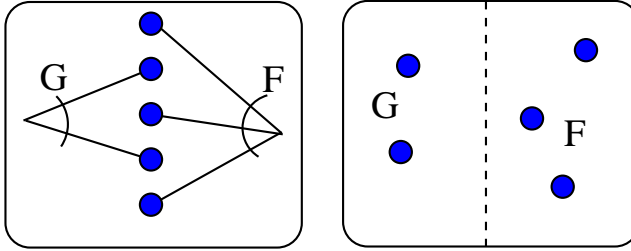
$$L(x, t) = \left( \frac{1}{1-t} \right)^x.$$

Las familias de estructuras combinatorias que estudiaremos pueden construirse sobre un conjunto finito de vértices  $C$ . A estas estructuras combinatorias, con pesos o sin ellos, asociadas a la serie formal en cuestión las llamaremos *configuraciones*. Las operaciones entre series formales se traducen entonces en operaciones entre las configuraciones asociadas a las series involucradas, y se pueden expresar de una manera mas simple y compacta cuando ponemos los términos de las series a depender de conjuntos finitos arbitrarios en vez del subíndice  $n$  o el conjunto particular  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 2.1.** Sea  $C$  un conjunto finito arbitrario de cardinal  $n$ . Dada una serie formal  $F$ , se define  $F[C]$  como el coeficiente  $n$ -ésimo de la serie  $F(t)$ ,

$$F[C] := f_n.$$

Representaremos gráficamente el coeficiente  $F[C]$  usando la forma de G. Labeled, como en la figura 2.1 (a). Otras veces como la letra  $F$  rodeada de los elementos del conjunto  $C$  (figura 2.1(b)).



### 2.2.1. Algunas configuraciones elementales

Denotaremos por  $\mathbb{I}_P$  la función de verdad de una proposición  $P$

$$\mathbb{I}_P = \begin{cases} 1 & \text{si } P \text{ es cierta} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

1. Para la serie monomial  $t^n$  tenemos

$$t^n[C] = n! \mathbb{I}_{(|C|=n)}.$$

Podemos asociar a  $t^n$  los ordenes lineales o permutaciones de longitud  $n$ .

2. Para la potencia dividida  $\frac{t^n}{n!}$ ,

$$\frac{t^n}{n!}[C] = \mathbb{I}_{(|C|=n)}.$$

Le asociamos a  $\frac{t^n}{n!}$  una sólo configuración, que puede ser el conjunto de vértices  $C$  sin ninguna estructura adicional.

3. Para la serie  $L(t) = \frac{1}{1-t}$  se tiene  $L[C] = n!$ , para  $C$  de tamaño arbitrario (finito). Entonces le asociamos los ordenes lineales o permutaciones de tamaño arbitrario.
4. Para la exponencial  $e^t$  se tiene que  $e^t[C] = 1$  para cualquier  $C$  finito. Las configuraciones asociadas a  $e^t$  son los conjuntos de tamaño arbitrario, sin estructura adicional.

Es claro que

$$(F + G)[C] = F[C] + G[C].$$

La siguiente proposición sale directamente de la ecuación (2.3).



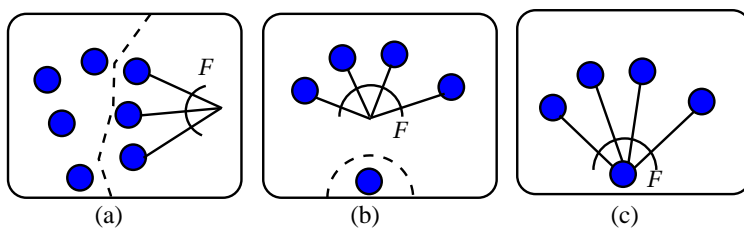


Figura 2.2: En la figura (a) se representa el producto  $e^t F(t)$ , en las figuras (b) y (c) un  $F$ -árbol pequeño,  $tF(t)$ .

**Proposición 2.2.** El coeficiente del producto  $(F.G)[C]$  viene dado por la fórmula

$$(F.G)[C] = \sum_{C_1+C_2=C} F[C_1] \cdot G[C_2], \quad (2.5)$$

donde el símbolo  $+$  en el subíndice denota unión disjunta de conjuntos.

La suma de arriba es entonces sobre todas las descomposiciones de  $C$ ,  $(C_1, C_2)$ , en pares de subconjuntos disjuntos cuya unión da  $C$ . Como un ejemplo, calculando el coeficiente del producto de la serie exponencial con otra serie arbitraria  $F$ , obtenemos

$$(e^t F(t))[C] = \sum_{C_1+C_2=C} e^{x[C_1]} \cdot F[C_2] = \sum_{C_1+C_2=C} F[C_2] = \sum_{C' \subseteq C} F[C']. \quad (2.6)$$

El coeficiente genérico del producto  $e^t F(t)$  puede representarse como en la figura 2.2(a). De igual forma, el producto  $tF(t)$  se puede representar como el árbol pequeño en la figura 2.2(b).

Podemos deducir fácilmente de la proposición 2.2 la siguiente fórmula para el producto de  $n$  series formales

$$\left( \prod_{j=1}^k F_j \right)[C] = \sum_{C_1+C_2+\dots+C_k=C} \prod_{j=1}^k F_j[C_k], \quad (2.7)$$

donde la suma es sobre todas las descomposiciones de  $C$  en  $k$ -tuplas de conjuntos  $(C_1, C_2, \dots, C_k)$  (cuya unión disjunta es  $C$ ).

En particular obtenemos la fórmula para la potencia  $G^k(t)$  de una serie.

$$G^k[C] = \sum_{C_1+C_2+\dots+C_k=C} \prod_{j=1}^k G[C_j] \quad (2.8)$$

**Ejercicio 2.1.** Sea  $\{F_k(t)\}_{k=1}^\infty$  una sucesión de series formales. Demostrar que si la sucesión  $F_k(t)$  converge a 1 entonces entonces la familia es multiplicable. El recíproco no es cierto:  $x^k \rightarrow 0$  y el producto  $\prod_{k=1}^n x^k$  converge a cero. ♣  
Usando la fórmula (2.8) y la proposición 2.1, obtenemos

**Proposición 2.3.** La serie  $\sum_{k=0}^{\infty} G^k(t)$  es convergente si y sólo si  $G(0) = 0$ .

**Definición 2.2.** Se dice que una serie formal  $F(t)$  es invertible si existe otra serie  $K(t)$  tal que  $F(t).K(t) = 1$ . La serie  $K(t)$  se denota como  $K(t) = F^{-1}(t) = \frac{1}{F(t)}$ .

Por ejemplo, se puede verificar fácilmente que la inversa de la serie geométrica alternante  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$  es la serie polinomial  $1 + x$ . El siguiente criterio de invertibilidad es fácil de demostrar. Hacemos un esquema de la prueba y se dejan los detalles al lector.

**Proposición 2.4.** Una serie formal  $F(t) \in \mathbb{C}[[t]]$  es invertible si y sólo si su término constante  $f_0$  es distinto de cero.

*Demostración.* Si  $F(0) \neq 0$ , como  $F(t) = f_0 \cdot (\frac{F(t)}{f_0})$  la invertibilidad de  $F(t)$  es equivalente a la de  $\frac{F(t)}{f_0}$  y podemos suponer que  $F(0) = 1$ . En ese caso expresamos a  $F$  de la forma  $F(t) = 1 + F_+(t)$ , donde  $F_+(0) = 0$ . Como  $F_+^k(t) \rightarrow 0$ , se verifica fácilmente que

$$F^{-1}(t) = \frac{1}{1 + F_+(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k F_+^k(t).$$

Recíprocamente, si  $F(0) = 0$ , no existe  $K(t)$  tal que  $K(t)F(t) = 1$ , por que de lo contrario tendríamos  $0 = K(0)F(0) = 1$ .  $\square$

Si suponemos que  $G(0) = 0$ , todos los componentes de las tuplas de conjuntos en la fórmula (2.8) son no vacías. Por esta razón, dada una partición  $\pi$  con exactamente  $k$  bloques, ordenando los bloques de  $\pi$  de todas las maneras posibles obtenemos  $k!$  de tales tuplas. De donde obtenemos que

$$\frac{G^k(t)}{k!} [C] = \sum_{\pi \in \Pi_k[C]} \prod_{B \in \pi} G[B], \quad (2.9)$$

donde  $\Pi_k[C]$  es el conjunto de particiones de  $C$  que tienen exactamente  $k$  bloques.

Previo a la demostración de la fórmula combinatoria para la operación de substitución, debemos verificar antes que ella está bien definida.

**Ejercicio 2.2.** Demostrar que la serie  $F(G(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{G^k(t)}{k!}$  es convergente para toda serie  $F$  si y sólo si  $G(0) = 0$ .  $\clubsuit$

### 2.2.2. Substitución y Fórmula exponencial

**Proposición 2.5.** Sea  $G$  una serie formal tal que  $G(0) = 0$  y  $F$  una serie formal arbitraria. Entonces se tiene que los términos de la substitución  $F(G)(t)$  se obtienen mediante la fórmula

$$F(G)[C] = \sum_{\pi \in \Pi[C]} F[\pi] \prod_{B \in \pi} G[B]. \quad (2.10)$$

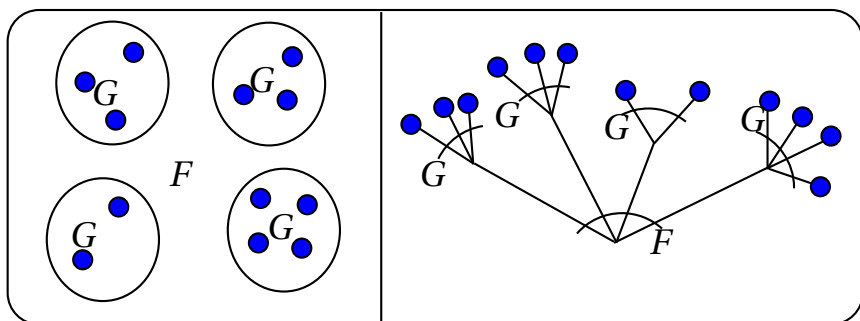


Figura 2.3: Dos representaciones gráficas de la fórmula de sustitución

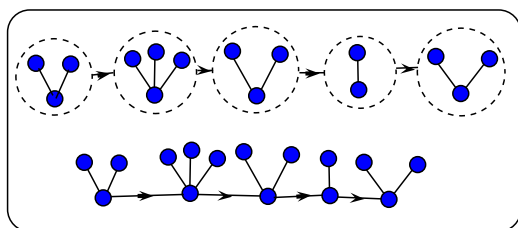


Figura 2.4: Estructura contada por  $F(t) = \frac{1}{1-te^t}$ , la sustitución de  $te^t$  (árboles pequeños) en  $L(t) = \frac{1}{1-t}$  (órdenes lineales).

*Demostración.* Por la fórmula(2.9) se obtiene

$$F(G(t))[C] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{G^k(t)}{k!}[C] = \sum_{k=0}^{|C|} f_k \sum_{\pi \in \Pi_k[C]} \prod_{B \in \pi} G[B] = \sum_{k=0}^{|C|} \sum_{\pi \in \Pi_k[C]} f_{|\pi|} \prod_{B \in \pi} G[B].$$

La cual es equivalente a (2.10). □

Observar el significado combinatorio de esta fórmula: para obtener las configuraciones de  $F(G(t))$  en un conjunto se colocan configuraciones asociadas a  $G$  ‘dentro’ de una configuración externa asociada a  $F$ , de todas las maneras posibles, una para cada partición  $\pi$  del conjunto. Los bloques de  $\pi$  se interpretan como vértices ‘gordos’ para las configuraciones de  $F$ . En la figura 2.2.2 se pueden apreciar dos representaciones gráficas de las configuraciones asociadas a la sustitución. Como una consecuencia inmediata de la fórmula de sustitución, los coeficientes de la serie formal  $e^{G(t)}$  tiene la siguiente expresión, conocida como fórmula exponencial

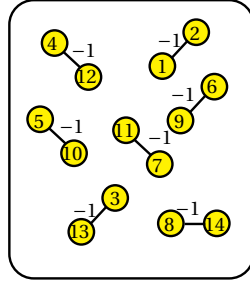


Figura 2.5: Una configuración de  $e^{-t^2/2}$ .

(ver [7])

$$e^{G(t)}[C] = \sum_{\pi \in \Pi[C]} \prod_{B \in \pi} G[B]. \quad (2.11)$$

**Ejemplo 2.3.** Calculando el coeficiente de enésimo de la Gaussiana  $e^{-t^2}$ :

$$e^{-t^2/2}[n] = \sum_{\pi \in \Pi[n]} \prod_{B \in \pi} (-t^2/2)[B] = \sum_{\pi \in \Pi[n]} \prod_{B \in \pi} (-\mathbb{I}_{(|B|=2)}),$$

obtenemos que sus configuraciones son las particiones con bloques de tamaño 2 (apareamientos), con peso (-1) en cada par (ver Fig. 2.5).

Los polinomios de Hermite se pueden definir mediante su función generatriz

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{xt - t^2/2}. \quad (2.12)$$

Calculando los coeficientes de la serie  $e^{xt - t^2/2}$  obtenemos la interpretación combinatoria clásica de los polinomios de Hermite (ver [7]),

$$h_n(x) = e^{xt - t^2/2}[n] = \sum_{\pi \in \Pi[n]} \prod_{B \in \pi} (xt - t^2/2)[B] = \sum_{\pi \in \Pi[n]} \prod_{B \in \pi} (x\mathbb{I}_{(|B|=1)} - \mathbb{I}_{(|B|=2)}).$$

Las configuraciones asociadas a la serie  $e^{xt - t^2/2}$  que definen los polinomios de Hermite son entonces las particiones con bloques de tamaño a lo sumo 2, los bloques de tamaño 1 tienen peso  $x$  y los de tamaño 2 tienen peso  $-1$ . De allí se obtiene la expresión explícita:

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{2^{n-k} k!(n-2k)!} (-1)^k x^{n-2k}. \quad (2.13)$$

Normalizando a su vez  $h_n(x)$  para obtener una función generatriz de tipo exponencial, se tiene que

$$h_n[C] = \frac{n!}{2^{n-k} k!(n-2k)!} (-1)^k (n-2k)!,$$

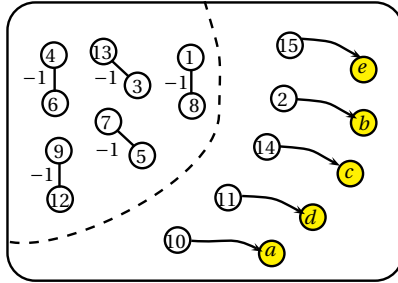


Figura 2.6: Configuración de  $h_{15}[\{a, b, c, d, e\}]$ .

para cualquier conjunto  $C$  de cardinal  $n - 2k$ . Luego, a los coeficientes  $h_n[C]$  le podemos asociar el siguiente tipo de configuración:

- Un conjunto de cardinal  $n$  (disjunto de  $C$ ) más una partición  $\pi \in \Pi[n]$  con  $k$  bloques de tamaño 2 y  $n - 2k$  bloques de tamaño 1 (el número de dichas particiones está dado por  $\frac{n!}{2^{n-k} k!(n-2k)!}$ ).
- Los bloques de tamaño 2 tienen peso  $-1$  y los de tamaño 1, peso 1 (dado por el factor  $(-1)^k$ ).
- Una biyección del conjunto de bloques de tamaño 1 en el conjunto  $C$  (el número de éstas está dado por el factor  $(n - 2k)!$ ).

Ver figura 2.6. ♠

**Ejemplo 2.4.** El número de permutaciones cíclicas sobre un conjunto de  $n$  elementos es  $(n - 1)!$ . La serie generatriz de las permutaciones cíclicas es entonces

$$\mathcal{C}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1)! \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} u^n du = \int_0^t \frac{du}{1 - u} = \ln\left(\frac{1}{1 - t}\right) \quad (2.14)$$

Por la fórmula exponencial obtenemos que la función generatriz de las permutaciones, pesadas con el peso  $w(\sigma) = x^{k(\sigma)}$ , donde  $k(\sigma)$  es el número de ciclos en los que se descompone  $\sigma$ , es igual a

$$L(x, t) = e^{x \ln\left(\frac{1}{1-t}\right)} = \left(\frac{1}{1-t}\right)^x.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} e^{x \ln\left(\frac{1}{1-t}\right)} [n] &= \sum_{\pi \in \Pi[n]} \prod_{B \in \pi} x \ln\left(\frac{1}{1-t}\right) [B] = \sum_{\pi \in \Pi[n]} \prod_{B \in \pi} x(|B| - 1)! \\ &= \sum_{\pi \in \Pi[n]} x^{|\pi|} \prod_{B \in \pi} (|B| - 1)!, \end{aligned}$$

el número de permutaciones cuya partición inducida por sus ciclos es  $\pi$  es igual a  $\prod_{B \in \pi} (|B| - 1)!$  y  $x^{|\pi|}$  es el peso de cada una de ellas. Al sumar sobre todas las particiones de  $[n]$  estamos calculando el inventario de  $S_n$ . Por otro lado

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^x [n] = \frac{d^n}{dx^n} (1-t)^{-x} \downarrow_{t=0} = x^{(n)}.$$

De donde obtenemos además que

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^n |s(n, k)| x^k.$$



**Ejemplo 2.5.** La expansión en serie de potencias de  $\ln(1+t)$  se obtiene de  $\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)$  por cambio de signos

$$\ln(1+t) = -\ln\left(\frac{1}{1-t}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{t^n}{n!}. \quad (2.15)$$

De donde

$$\ln(1+t)[n] = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

Sea el  $\mathfrak{C}_n$  el conjunto de las permutaciones cíclicas de  $n$ , y  $\text{sig} : \mathfrak{C}_n \rightarrow \{-1, 1\}$  el peso que le asigna a cada permutación cíclica su signo  $\text{sig}(\sigma) = (-1)^{n-1}$ . Como hay  $(n-1)!$  permutaciones cíclicas y cada una de ellas tiene peso (signo)  $(-1)^{n-1}$ , el inventario de  $\mathfrak{C}_n$ :

$$|\mathfrak{C}_n|_{\text{sig}} = (-1)^{n-1} (n-1)!,$$

nos da el coeficiente  $n$ -ésimo de  $\ln(1+t)$ .

Por la fórmula exponencial obtenemos que el coeficiente  $n$ -ésimo de

$$(1+t)^x = e^{x \ln(1+t)}$$

es el inventario de las permutaciones de  $S_n$  pesadas con el peso:

$$w(\sigma) = \text{sign}(\sigma) x^{k(\sigma)}.$$

En efecto:

$$e^{x \ln(1+t)} [n] = \sum_{\pi \in \Pi[n]} \prod_{B \in \pi} x(|B|-1)! (-1)^{(|B|-1)} = \sum_{\pi \in \Pi[n]} x^{|\pi|} \prod_{B \in \pi} (|B|-1)! (-1)^{(|B|-1)}.$$

Obtenemos entonces que:

$$(x)_n = (1+t)^x [n] = \sum_{k=1}^n x^k \sum_{\pi \in \Pi_k[n]} \prod_{B \in \pi} (|B|-1)! (-1)^{(|B|-1)} = \sum_{k=1}^n s(n, k) x^k. \quad (2.16)$$



**Ejercicio 2.3.** De las identidades

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{k=1}^n S(n, k)(x)_k \\ (x)_n &= \sum_{k=1}^n s(n, k)x^k, \end{aligned}$$

deducir que la matriz  $(s(n, k))_{n,k}$  es la inversa de  $(S(n, k))_{n,k}$ . ♣

**Ejercicio 2.4.** Denotemos por  $\text{Gr}(t)$  la serie generatriz de los grafos, y por  $\text{Gr}^c(t)$  la de los grafos conexos. De la fórmula exponencial se obtiene.

$$\text{Gr}(t) = e^{\text{Gr}^c(t)}. \tag{2.17}$$

De allí obtener una fórmula para el número de grafos conexos con  $n$  vértices. ♣

**Ejemplo 2.6. (Polinomios de Bell)** Los polinomios de Bell completos pueden definirse por medio de su serie generatriz (ver [1])

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{t^n}{n!} = e^{\sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{t^k}{k!}}. \tag{2.18}$$

Hallamos su forma combinatoria explícita tomando el coeficiente enésimo de su serie

$$\begin{aligned} b_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(t, \mathbf{x})[n] &= \sum_{\pi \in \Pi[n]} \prod_{B \in \pi} \left( \sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{t^k}{k!} [B] \right) \\ &= \sum_{\pi \in \Pi[n]} \prod_{B \in \pi} \left( \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{I}_{(B=k)} \right) = \sum_{\pi \in \Pi[n]} \prod_{B \in \pi} x_{|B|} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Equivalentemente, clasificando las particiones de  $[n]$  de acuerdo a su tipo, obtenemos

$$b_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \vdash n} \frac{n!}{1!^{\alpha_1} \alpha_1! 2!^{\alpha_2} \alpha_2! \dots n!^{\alpha_n}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$



**Ejemplo 2.7.** Sea  $Y_n(t)$  la sucesión de series formales definida recursivamente por

$$\begin{aligned} Y_1 &= t \\ Y_n &= t e^{Y_{n-1}(t)}, \quad n > 1. \end{aligned} \tag{2.20}$$

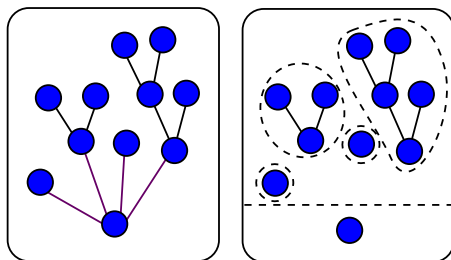


Figura 2.7: La ecuación implícita  $\mathcal{A}(t) = t e^{\mathcal{A}(t)}$ .

Se puede demostrar por inducción que para cualquier conjunto finito  $B$ , si  $n, m \geq |B|$  se tiene  $Y_n[B] = Y_m[B]$ . Por lo tanto  $Y_n(t)$  converge. Por la ecuación (2.20) el límite  $\mathcal{A}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(t)$  obviamente satisface la ecuación implícita

$$\mathcal{A}(t) = t e^{\mathcal{A}(t)}. \quad (2.21)$$

Las configuraciones enumeradas por  $\mathcal{A}(t)$  son los árboles con raíz (ver figura ??). De una manera similar la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{aligned} Z_1 &= t \\ Z_n &= \frac{t}{1 - Z_{n-1}(t)}, \quad n > 1, \end{aligned} \quad (2.22)$$

converge a  $\mathcal{A}_L(t)$ , que satisface la ecuación implícita

$$\mathcal{A}_L(t) = \frac{t}{1 - \mathcal{A}_L(t)}. \quad (2.23)$$



**Ejemplo 2.8.** Sea  $W_n^F(t)$  la sucesión de series formales definida recursivamente por

$$\begin{aligned} W_0^F &= t \\ W_n^F &= t + F(W_{n-1}^F), \quad n > 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde la serie  $F(t)$  satisface  $F[0] = F[1] = 0$  (es decir,  $\rho(F(t)) \geq 2$ ). Se puede demostrar que para todo conjunto  $B$ , si  $n, m \geq |B| - 1$ , entonces se tiene que  $W_n^F[B] = W_m^F[B]$ . La demostración es por inducción en el cardinal de  $B$  usando la recursión (2.24). El límite de esta sucesión  $\mathcal{H}_F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n^F(t)$  satisface la ecuación implícita

$$\mathcal{H}_F(t) = t + F(\mathcal{H}_F(t)). \quad (2.25)$$

La serie  $\mathcal{H}_F(t)$  cuenta los  $F$ -árboles de Schröder [24]. Con la letra  $\mathcal{H}$  que usamos aquí le hacemos honor a Hiparco, astrónomo y matemático helénico, quien fué el



primero en estudiar y contar este tipo de estructuras. Ver [20], y [25], para conocer una historia fascinante en relación a los árboles de Schröder-Hiparco. ♠

**Definición 2.3.** *La serie formal  $t$  es la identidad respecto a la operación de sustitución en el conjunto  $\mathbb{C}_+[[t]]$  de series formales cuyo coeficiente constante es nulo. Una serie se llama reversible si ella tiene inversa con respecto a la operación de sustitución. Es decir,  $F(t)$ , con  $F(0) = 0$ , se llama reversible si existe una serie formal denotada por  $F^{(-1)}(t)$  (reversa de  $F(t)$ ) tal que*

$$F^{(-1)}(F(t)) = F(F^{(-1)}(t)) = t.$$

**Proposición 2.6.** *Una serie formal  $F(t) \in \mathbb{C}_+[[t]]$  es reversible si y sólo si  $F[1] \neq 0$ .*

*Demostración.* Si  $f_1 = F[1] \neq 1$ , como  $F(t) = f_1 \cdot \frac{F(t)}{f_1}$ , la reversibilidad de  $F(t)$  es equivalente a la de  $\frac{F(t)}{f_1}$ , y podemos suponer que  $f_1 = 1$ . En ese caso expresamos a  $F$  de la forma  $F(t) = t + F_{2+}(t)$ , donde  $F_{2+}[0] = F_{2+}[1] = 0$ . La serie formal  $\mathcal{H}_{-F_{2+}}(t)$  satisface la ecuación

$$\mathcal{H}_{-F_{2+}}(t) = t - F_{2+}(\mathcal{H}_{-F_{2+}}(t)). \tag{2.26}$$

De donde se obtiene que

$$\mathcal{H}_{-F_{2+}}(t) + F_{2+}(\mathcal{H}_{-F_{2+}}(t)) = t = (t + F_{2+}) \circ (\mathcal{H}_{-F_{2+}}(t)) = F(\mathcal{H}_{-F_{2+}}(t)).$$

Luego  $F(t)$  es reversible por la derecha. Como  $\mathcal{H}_{-F_{2+}}[1] = 1$ , el mismo argumento vale para  $\mathcal{H}_{-F_{2+}}(t)$ , y ella también es reversible por la derecha: existe  $\hat{F}$  tal que  $\mathcal{H}_{-F_{2+}}(\hat{F}(t)) = t$ . Por asociatividad se tiene  $\hat{F}(t) = F(t)$  y

$$F^{(-1)}(t) = \mathcal{H}_{-F_{2+}}(t). \tag{2.27}$$

Recíprocamente, si  $F[1] = 0$ , no existe  $G(t)$  tal que  $F(G)(t) = t$ , por que de lo contrario tendríamos  $0 = F[1]G[1] = F(G)[1] = t[1] = 1$ . □

### 2.2.3. Ejercicios

**Ejercicio 2.5.** Sea la serie

$$H(t) = \frac{1}{1 - t - t^2}.$$

Demostrar que  $H[n] = n!F_n$ , donde  $F_n$  es el número de Fibonacci definido por:  $F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ . Ayuda: hallar primero las estructuras que enumera dicha serie, y luego demostrar que  $\frac{H[n]}{n!}$  satisface la recursion de los números de Fibonacci. ♣

**Ejercicio 2.6.** Interpretar combinatorialmente los coeficientes de las siguientes series:

$$\begin{aligned} \text{Pulpo}(t) &= \ln\left(\frac{1}{1-\frac{t}{1-t}}\right) = \ln\left(\frac{1-t}{1-2t}\right) \\ \text{Medusa}(t) &= \ln\left(\frac{1}{1-te^{\frac{t}{1-t}}}\right) \\ \text{Vert}(t) &= \frac{1}{1-\mathcal{A}(t)} \end{aligned}$$



**Ejercicio 2.7.** Demostrar la condición de convergencia de la sucesión  $Y_n$  en (2.2.2).

¿Qué estructuras combinatorias cuenta  $Y_n(t)$ ? ♣

**Ejercicio 2.8.** Calcular la serie generatriz  $\mathcal{A}_L(t)$  usando la ecuación implícita que ella satisface. ¿Qué estructuras cuenta  $\mathcal{A}_L(t)$ ? ♣

**Ejercicio 2.9.** Demostrar la condición de convergencia de la sucesión  $W_n^F(t)$ . ¿Que configuraciones cuenta  $W_n^F(t)$ ? ♣

**Ejercicio 2.10.** Dar una interpretación combinatoria de los coeficientes de la serie reversa  $F^{(-1)} = \mathcal{H}_{-F_2^+}(t)$ , basandose en la ecuación implícita (2.26). ♣

**Ejercicio 2.11.** Sea  $F(t)$  una serie formal tal que  $F(0) = 1$ . Argumente la razón de la existencia de una solución única para la ecuación implícita

$$\mathcal{A}_F(t) = tF(\mathcal{A}_F). \quad (2.28)$$

De una manera similar, argumente el porqué de la unicidad de la solución de la ecuación (2.25). Demostrar que  $\mathcal{A}_F(t)$  es la reversa de  $tF^{-1}(t)$ , y por lo tanto se tiene la identidad

$$\mathcal{A}_F(t) = \mathcal{H}_{-G}(t),$$

donde  $G(t) = t(F^{-1}(t) - 1) = tF^{-1}(t) - t$ . Este es un caso en el que dos familias de configuraciones completamente diferentes tienen la misma serie generatriz. ♣

### 2.3. Cálculo Umbral: Familias de tipo binomial, de Sheffer, y de Appèl

Damos una breve introducción al cálculo umbral, desarrollado desde principios del siglo pasado por muchos autores tales como Pincherle, Sheffer, Steffensen, y Riordan. En la década de los 70, fue formalizado por G-C. Rota y sus colaboradores [19, 23, 22]. El punto de partida son las familias de polinomios de tipo binomial. Ellas satisfacen, tomando como modelo las potencias, la propiedad de la identidad binomial.

**Definición 2.4.** Una familia de polinomios  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  se llama de tipo binomial si  $p_0(x) = 1$ , el grado de cada  $p_n(x)$  es  $n$  y satisfacen la identidad binomial

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y). \quad (2.29)$$

De la identidad binomial se deduce fácilmente que  $p_n(t)$  tiene término constante nulo para todo  $n > 0$ . Las familias de polinomios de tipo binomial están caracterizados por su serie generatriz. Para demostrar dicho resultado nos será útil el siguiente

**Lema 2.1.** Una familia de polinomios de tipo binomial  $p_n(x)$  está completamente determinada por sus valores en 1. Es decir, si  $q_n(x)$  es otra familia de tipo binomial tal que para todo  $n$ ,  $p_n(1) = q_n(1)$ , entonces ambas familias son la misma,  $p_n(x) = q_n(x)$ .

*Demostración.* Como ambas familias satisfacen la identidad binomial, se tiene que para todo  $j \geq 1$  entero,

$$\begin{aligned} p_k(j) &= p_k(\overbrace{1+1+\dots+1}^j) = \sum_{k_1+\dots+k_j=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_j} p_{k_1}(1) p_{k_2}(1) \dots p_{k_j}(1) \\ &= \sum_{k_1+\dots+k_j=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_j} q_{k_1}(1) q_{k_2}(1) \dots q_{k_j}(1) = q(j). \end{aligned}$$

Por ser ambos polinomios, obtenemos  $p_n(x) = q_n(x)$ . □

**Proposición 2.7.** Una familia de polinomios  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  es de tipo binomial si y sólo si su serie generatriz es de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{xF(t)} \quad (2.30)$$

donde  $F$  es una serie formal reversible.

*Demostración.* Suponiendo que se satisface la identidad (2.30), por propiedades de la exponencial se tiene que:

$$\begin{aligned} p_0(t) &= e^0 = 1, \\ \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x+y) \frac{t^n}{n!} &= e^{(x+y)F(t)} = e^{xF(t)} e^{yF(t)} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) \frac{t^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n(y) \frac{t^n}{n!} \right), \end{aligned}$$

de donde se deduce (2.29). De la fórmula exponencial obtenemos

$$p_n(x) = e^{xF(t)} [n] = \sum_{\pi \in \Pi[n]} \prod_{B \in \pi} xF[B] = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{\pi \in \Pi_k[n]} \prod_{B \in \pi} F[B] \right) x^k \quad (n > 0). \quad (2.31)$$

Por lo tanto el coeficiente de  $x^n$  es  $f_1^n \neq 0$ , y  $p_n(x)$  tiene grado  $n$ . Recíprocamente, si la familia es de tipo binomial, sea  $F(t)$  la serie formal

$$F(t) = \ln \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(1) \frac{t^n}{n!} \right).$$

Claramente  $F(0) = 0$ . El término constante de  $p_1(x)$  es cero y por lo tanto  $F[1] = F'[0] = p_1(1) \neq 0$ . Por la primera parte de la demostración se tiene entonces que la familia de polinomios definida por

$$e^{xF(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

es de tipo binomial. Se tiene además que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(1) \frac{t^n}{n!} = e^{F(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(1) \frac{t^n}{n!}.$$

Por el lema anterior  $p_n(x) = q_n(x)$ . □

**Ejercicio 2.12.** Los polinomios de Touchard [26], o polinomios exponenciales forman la familia de tipo binomial definida por la serie generatriz

$$\sum_{k=0}^n T_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{x(e^t-1)}. \quad (2.32)$$

1. Verificar que  $T_n(x) = \sum_{k=1}^n S(n, k) x^k$ , donde los coeficientes  $S(n, k)$  son los números de Stirling de segundo tipo.
2. Verificar que, pensando a  $T_n(t)$  como serie formal de tipo exponencial (polinomial), el coeficiente  $T_n[C]$  cuenta el número de funciones sobreyectivas que van de un conjunto con  $n$  elementos en  $C$ .
3. Demostrar la identidad (fórmula de Dobinski [5])

$$T_n(t) e^t = \sum_{k=1}^{\infty} k^n \frac{t^k}{k!}. \quad (2.33)$$

Ayuda: el coeficiente en  $C$  de la serie del lado derecho cuenta el número de funciones de un conjunto de  $n$  elementos en  $C$ .



Denotamos por  $D_x$  al operador derivada actuando en el espacio de los polinomios en la variable  $x$ ,  $D_x : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$ . Dada una serie  $G(t)$ ,  $G(D_x)$  representará al operador

$$G(D_x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \frac{D_x^k}{k!},$$

que actúa también sobre  $\mathbb{C}[x]$ .  $G(D_x)$  se extiende naturalmente al anillo de las series formales con coeficientes en  $\mathbb{C}[x]$  mediante la acción,

$$G(D_x) \sum_{k=0}^{\infty} q_n(x) \frac{t^n}{n!} := \sum_{k=0}^{\infty} G(D_x) q_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Es fácil verificar que

$$G(D_x)e^{xF(t)} = G(F(t))e^{xF(t)}. \tag{2.34}$$

Estamos listos entonces para demostrar la siguiente proposición:

**Proposición 2.8.** *Sea una familia de tipo binomial  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  como la definida por la ecuación (2.30). Si  $F^{(-1)}(t)$  la reversa de  $F(t)$ , se tiene que*

$$F^{(-1)}(D_x)p_n(x) = np_{n-1}(x). \tag{2.35}$$

*Demostración.* Por la ecuación (2.34)

$$\sum_{n=0}^{\infty} F^{(-1)}(D_x)p_n(x) \frac{t^n}{n!} = F^{(-1)}(D_x)e^{xF(t)} = F^{(-1)}(F(t))e^{xF(t)} = te^{xF(t)}.$$

Como

$$te^{xF(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}(x) \frac{t^n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} np_{n-1}(x) \frac{t^n}{n!},$$

igualando término a término obtenemos el resultado. □

La familia  $p_n(t)$  se dice *asociada* al operador  $F^{(-1)}(D_x)$ , y *conjugada* al operador  $F(D_x)$ .

### 2.3.1. Ejercicios

**Ejercicio 2.13.** Demostrar que  $x^{(n)}$  es una familia de polinomios de tipo binomial, asociada al operador  $\nabla = 1 - e^{D_x}$ . ♣

**Ejercicio 2.14.** Demostrar que  $(x)_n$  es una familia de polinomios de tipo binomial, y que está asociada al operador  $\Delta = e^{D_x} - 1$ . ♣

**Ejercicio 2.15.** Los polinomios de Abel forman la familia de tipo binomial asociada al operador  $De^{-D}$ . Dar una interpretación combinatoria de dichos polinomios usando la serie del operador conjugado (reversa de  $te^{-t}$ ). ♣

**Ejercicio 2.16.** Los polinomios de Laguerre forman la familia de tipo binomial asociada al operador  $\frac{D}{D-1} = -L_+(D)$ . Dar una interpretación combinatoria de dichos polinomios. ♣

**Definición 2.5.** Una familia de polinomios  $\{s_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  se llama de Sheffer si existe una serie formal  $A(t)$  invertible, y una  $F(t)$  reversible, tales que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x) \frac{t^n}{n!} = A(t)e^{xF(t)}. \quad (2.36)$$

Si  $F(t) = t$ , la familia definida por (2.36) se llama de Appèl.

Por la ecuación (2.34) se tiene:

$$A(F^{(-1)}(D_x))e^{xF(t)} = A(F^{(-1)}(F(t)))e^{xF(t)} = A(t)e^{xF(t)},$$

de donde obtenemos

$$s_n(x) = A(F^{(-1)}(D_x))p_n(x). \quad (2.37)$$

En particular, una sucesión de polinomios de Appèl  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \frac{t^n}{n!} = A(t)e^{xt}$  satisface  $a_n(x) = A(D_x)x^n$ .

Los polinomios de Hermite son una familia de Appèl con  $A(t) = e^{-t^2/2}$ . Se tiene entonces

$$h_n(x) = e^{-D_x^2/2}x^n.$$

**Ejercicio 2.17.** Describir las configuraciones asociadas a la serie generatriz de los polinomios de Sheffer (2.36). Analizar el caso particular de los polinomios de Appèl,  $F(t) = t$ . ♣

## 2.4. Derivada, Integral, y sus interpretaciones combinatorias

Denotamos ahora por  $D$  el operador derivada actuando sobre el anillo de las series formales  $\mathcal{R}[[t]]$ . Tanto la derivada como la integral se definen sobre una serie formal como operadores que actúan de la manera usual sobre cada sumando:

$$DF(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n D \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

y

$$\int_0^t F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \int_0^t \frac{u^n}{n!} du = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!},$$

de donde obtenemos

$$DF(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} \frac{t^n}{n!} \quad (2.38)$$

$$\int_0^t F = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} \frac{t^n}{n!}. \quad (2.39)$$

Para un conjunto finito arbitrario  $C$ , el coeficiente  $DF[C]$  es igual entonces al coeficiente de  $F$  en un conjunto obtenido de  $C$  agregándole un elemento adicional (que no está en  $C$ ),

$$DF[C] = F[\{*\} + C]. \tag{2.40}$$

Al elemento adicional  $*$  lo denominaremos elemento *fantasma*. De la misma manera obtenemos que

$$D^n F[C] = F[\mathfrak{F}_n + C] = F[\{*_n, *_n, \dots, *_1\} + C]. \tag{2.41}$$

Donde  $\mathfrak{F}_n$  es una colección de  $n$  elementos fantasmas.

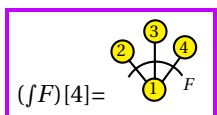
Para obtener  $\int_0^t F[C]$  tenemos que quitarle un elemento a  $C$  y calcular el coeficiente de  $F$  en dicho conjunto. El problema es que no hay una manera sistemática de escoger dicho elemento cuando  $C$  es un conjunto arbitrario, sin estructura adicional. Si suponemos que el conjunto  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  está totalmente ordenado, podemos elegir el menor elemento  $\min(C) = c_1$  (o el máximo) para quitárselo. Así, tenemos que para  $|C| \geq 1$ ,  $C$  totalmente ordenado

$$\left(\int_0^t F\right)[C] = F[C^-], \tag{2.42}$$

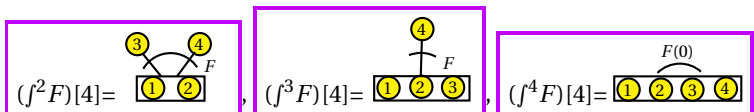
donde  $C^- = C - \{c_1\}$ . El coeficiente  $\int_0^t F[0]$  es cero. Cuando se requiera mayor simplicidad en la notación, denotaremos al operador ‘integral indefinida’ con el símbolo  $\int$ ,

$$(\int F)(t) := \int_0^t F(u) du.$$

El coeficiente en  $C$  de la integral de  $F$  lo representaremos como un árbol pequeño, cuya raíz es el menor de los elementos de  $C$ , y con peso el coeficiente de  $F$  en el conjunto de vértices restantes:



Las integrales iteradas  $(\int^k F)[4]$ ,  $k = 2, 3, 4$ , tienen la forma:



La integral  $(\int^5 F)[4] = 0$ . En general, cualquiera que sea la serie formal  $F$ , se tiene que  $\int^k F \rightarrow 0$ , porque como

$$(\int^k F)[C] = F[\{c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n\}] = F[C - \{c_1, c_2, \dots, c_k\}],$$

$(f^k F)[C] = 0$  si  $k > |C|$ .

Si suponemos también que el conjunto  $C$  en la ecuación (2.40) está totalmente ordenado, el elemento fantasma lo colocamos como primer elemento del nuevo conjunto  $\{*\} + C$ . De una manera similar en (2.41) el primer elemento de  $\mathfrak{F}_n + C$  es  $*_n$  y los subíndices indican el orden en el cual fueron aplicadas sucesivamente las derivadas. Tenemos entonces que el operador  $D$  es inverso a la izquierda de  $f$ ,

$$(Df)F = D(fF) = F.$$

## 2.5. Operadores integrales y ecuaciones diferenciales lineales

Como  $f^n F \rightarrow 0$  para cualquier serie  $F$ , para una sucesión arbitraria  $a_k$  de elementos del anillo de coeficientes  $\mathcal{R}$ , el operador

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k f^k, \quad (2.43)$$

está bien definido en todo el anillo de series formales  $\mathcal{R}[[t]]$ . Por ejemplo se tiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f^k e^t = t e^t,$$

porque evaluando en un conjunto finito  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f^k e^t [C] = \sum_{k=1}^n e^t [C - \{c_1, c_2, \dots, c_k\}] = n,$$

y  $t e^t [C] = n$ .

**Ejemplo 2.9.** Queremos hallar la serie generatriz del número de composiciones de  $n$  de acuerdo al número de partes. Para ello identificamos a una composición de  $n$  con distribuciones de barras en la palabra  $c_1 c_2 \dots c_n$ . Sea  $\gamma$  una tal distribución. Denotemos por  $|\gamma|$  el número de sus partes. Definimos su peso como el monomio  $x^{|\gamma|}$ . Sea  $Y = Y(t, x)$  la serie generatriz de las composiciones contadas con dicho peso. Se puede verificar fácilmente que  $x f Y$  es la función generatriz de las composiciones cuya primer segmento es  $c_1$ . De la misma manera  $x f^k Y$  es la serie generatriz de las composiciones cuyo primer segmento es  $c_1 c_2 \dots c_k$ . Luego, se tiene que  $Y$  satisface la ecuación integral

$$Y = 1 + x(fY + f^2 Y + f^3 Y \dots) = 1 + x f \cdot (1 - f)^{-1} Y. \quad (2.44)$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación por el operador  $(1 - f)$  obtenemos:

$$(1 - f)(Y - 1) = x f Y,$$



y por lo tanto,

$$Y - 1 - f(Y - 1) = x f Y.$$

Derivando a ambos lados obtenemos la ecuación diferencial

$$Y' = (x + 1)Y - 1. \tag{2.45}$$

Resolviéndola, obtenemos

$$Y = C(t, x) = \frac{x e^{(x+1)t} + 1}{(x + 1)}.$$

La inversa de esta serie cambiándole el signo a la variable  $x$  es la serie generatriz de los polinomios de Eulerianos

$$\frac{1}{C(t, -x)} = \frac{1 - x}{1 - x e^{(1-x)t}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{2.46}$$

(ver [6] para ver la motivación analítica que llevó Euler al descubrimiento de estos polinomios. Ver también [7] para el lado combinatorial de ellos). La explicación más satisfactoria de esta interesante identidad (2.46) fue dada por Gessel en [10]. ♠ El problema general es la resolución de una ecuación de la forma

$$Y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k f^k Y, \tag{2.47}$$

cuya solución enumera diversos tipos de composiciones con peso  $a_k$  en las partes de tamaño  $k$ . La solución efectiva puede conseguirse en muchos casos usando técnicas similares a la del ejemplo de arriba. En el caso en el que  $a_k = 0$  para  $k > n$ , aplicando el operador  $D^n$  a ambos lados de (2.47), obtenemos la ecuación diferencial homogénea equivalente:

$$Y^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k Y^{(n-k)},$$

con condiciones iniciales:  $Y(0) = 1$ ,  $Y'(0) = a_1$ ,  $Y''(0) = a_1^2 + a_2$ , etc., obtenidas aplicando  $D^j$  a ambos lados de (2.47) y evaluando en cero.

**Ejemplo 2.10.** La serie generatriz de las composiciones  $\gamma$ , con partes de longitud a lo sumo 2, y con peso  $x^{|\gamma|}$ , satisface la ecuación:

$$Y = 1 + x(fY + f^2 Y),$$

equivalente a la ecuación diferencial lineal homogénea:

$$Y'' = xY' + xY,$$

con condiciones iniciales  $Y(0) = 1$ ,  $Y'(0) = x$ . La solución es:

$$Y(t, x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4x}}{2\sqrt{x^2 + 4x}} \exp\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4x}}{2}t\right) - \frac{x - \sqrt{x^2 + 4x}}{2\sqrt{x^2 + 4x}} \exp\left(\frac{x - \sqrt{x^2 + 4x}}{2}t\right).$$



**Ejercicio 2.18.** Verificar combinatorialmente que  $DL(t) = L^2(t)$ . ♣

**Ejercicio 2.19.** Verificar combinatorialmente que  $\int_0^t L(u) du = \mathcal{C}(t)$ . ♣

**Ejercicio 2.20.** Obtener la ecuación diferencial (2.45) directamente de las configuraciones enumeradas. ♣

**Ejercicio 2.21.** Obtener la serie generatriz  $C(t, x)$  directamente del hecho de que el número de composiciones de  $n$  con  $k$  partes es  $\binom{n-1}{k-1}$ . ♣

**Ejercicio 2.22.** Obtener una ecuación análoga a (2.44) para enumerar las composiciones con todos sus segmentos de longitud par respecto al número de segmentos. Transformarla en una ecuación diferencial y resolverla. ♣

**Ejercicio 2.23.** Sean  $x_1$  y  $x_2$  las indeterminadas del anillo de coeficientes  $\mathcal{R}[x_1, x_2]$ . Resolver la ecuación integral

$$Y = x_1 \int Y + x_2 \int^2 Y + 1 \quad (2.48)$$

o equivalentemente, la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$Y'' = x_1 Y' + x_2 Y, \quad (2.49)$$

con condiciones iniciales  $Y(0) = 1$ ,  $Y'(0) = x_1$ . La ecuación diferencial (2.49) es equivalente a la recursión  $Y[n] = x_1 Y[n-1] + x_2 Y[n-2]$ , con condiciones iniciales  $Y[0] = 1$ ,  $Y[1] = x_1$ . Calcular  $Y[2]$ ,  $Y[3]$ , y  $Y[4]$ , y cotejar con la solución combinatoria obtenida. ♣

**Ejercicio 2.24.** Demostrar la fórmula de Rodrigues para calcular los polinomios de Hermite:

$$h_n(t) = e^{t^2/2} (-1)^n D^n e^{-t^2/2},$$

usando el formalismo introducido y las configuraciones asociadas a la gaussiana y a los polinomios de Hermite. Ayuda: escribir la identidad de la forma

$$h_n(t) e^{-t^2/2} = (-1)^n D^n e^{-t^2/2}.$$



**Ejercicio 2.25.** Demuestre la regla de Leibniz:

$$D^n (F(t)G(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k F(t) D^{n-k} G(t). \quad (2.50)$$



**Ejercicio 2.26.** Demostrar la regla de la cadena:

$$D(F(G(t))) = DF(G(t))DG(t)$$



**Ejercicio 2.27.** Demostrar la regla de la cadena generalizada (Fórmula de Faá di Bruno [4]):

$$D^n(F(G(t))) = \sum_{\pi \in \Pi[n]} (D^{|\pi|}F)(G(t)) \prod_{B \in \pi} D^{|B|}G(t).$$

Clasificando las particiones por tipos deducir:

$$\begin{aligned} D^n(F(G(t))) &= \sum_{k=1}^n F^{(k)}(G(t)) \sum_{\alpha \vdash n, |\alpha|=k} \frac{n!}{1!^{\alpha_1} \alpha_1! \dots n!^{\alpha_n} \alpha_n!} (G'(t))^{\alpha_1} \dots (G^{(n)}(t))^{\alpha_n} \\ &= \sum_{k=1}^n F^{(k)}(G(t)) b_{n,k}(G'(t), G''(t), \dots, G^{(n)}(t)), \end{aligned} \tag{2.51}$$

donde  $b_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es el polinomio de Bell parcial

$$b_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \vdash n, |\alpha|=k} \frac{n!}{1!^{\alpha_1} \alpha_1! \dots n!^{\alpha_n} \alpha_n!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$



## 2.6. Operadores de creación y aniquilación

Sea  $\mathfrak{H}$  un espacio de Hilbert sobre  $\mathbb{C}$ . El espacio de Fock (bosónico) relativo a  $\mathfrak{H}$  se define como la completación del álgebra simétrica (ver por ejemplo [21]):

$$F(\mathfrak{H}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S_k(\mathfrak{H}).$$

Consideraremos aquí sólo el caso en el que  $\mathfrak{H}$  es unidimensional y  $F(\mathfrak{H})$  es isomorfo al espacio de Hilbert  $\ell_2$ . Sea  $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$  una base ortonormal de  $\ell_2$ , se definen los operadores de creación  $a^\dagger$  y de aniquilación  $a$  mediante su acción sobre la base ortogonal

$$\begin{aligned} a^\dagger e_n &= \sqrt{n+1} e_{n+1} \\ a e_n &= \sqrt{n} e_{n-1}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Ambos operadores son no-acotados, y por lo tanto no están definidos en todo  $\ell_2$ . El dominio de ellos es

$$\mathcal{D} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k e_k \mid \sum_{k=0}^{\infty} n |a_k|^2 < \infty \right\}.$$

Los operadores  $a$  y  $a^\dagger$  son adjuntos el uno del otro y satisfacen la regla de conmutación

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = I,$$

donde  $I$  es el operador identidad. Sea  $D$  el operador derivada actuando sobre series formales, y por abuso de lenguaje, denotamos por  $t$  el operador ‘multiplicar por  $t$ ’. Se tiene que

$$(Dt)F(t) = (tF(t))' = F(t) + tF'(t) = (I + tD)F(t).$$

Por lo tanto,  $t$  y  $D$  satisfacen la misma relación de conmutación que  $a^\dagger$  y  $a$ . En problemas de reordenamiento de los operadores de creación y aniquilación podemos identificar a  $a$  con  $D$  y a  $t$  con  $a^\dagger$ , y usar la interpretación combinatoria de  $t$  y  $D$  para obtener una gran variedad de resultados.

Comenzaremos por introducir alguna notación. Sea  $F(a, a^\dagger)$  una expresión que esta formada por una combinación lineal finita (polinomio) o infinita (serie formal) de palabras en el alfabeto  $\{a, a^\dagger\}$ . En el caso de que  $F(a, a^\dagger)$  sea polinomial, dicha expresión representa un operador en un subconjunto  $\mathfrak{l}_2$ . En caso contrario, ella representa un operador si se cumplen condiciones para la convergencia. La *forma normal* del operador  $F(a, a^\dagger)$  se define como la expresión obtenida al mover en cada monomio todos los operadores de aniquilación a la derecha de los operadores de creación usando la relación  $[a, a^\dagger] = I$  en cada paso. La forma normal de  $F(a, a^\dagger)$  se denota  $\mathcal{N}F(a, a^\dagger)$ . Como operadores  $F(a, a^\dagger)$  y  $\mathcal{N}F(a, a^\dagger)$  son iguales. El doble punto  $:F(a, a^\dagger):$  denota la expresión que se obtiene al mover en cada monomio de  $F(a, a^\dagger)$  los operadores de aniquilación a la derecha de los de creación, tratándolos como si ellos conmutaran. Como operadores, en general  $:F(a, a^\dagger):$  es distinto de  $F(a, a^\dagger)$ .

Por ejemplo:

$$(a^\dagger a)^n = \overbrace{(a^\dagger a)(a^\dagger a) \dots (a^\dagger a)}^{n \text{ veces}},$$

mientras que

$$:(a^\dagger a)^n := (a^\dagger)^n a^n.$$

La siguiente proposición fue demostrada por primera vez por Katriel en [12]. La demostración que presentamos se basa en las herramientas combinatorias desarrolladas previamente en este capítulo.

**Proposición 2.9.** *La forma normal del operador  $(a^\dagger a)^n$  está dada por*

$$\mathcal{N}(a^\dagger a)^n = \sum_{k=1}^n S(n, k)(a^\dagger)^k a^k =: T_n(a^\dagger a) : \quad (2.53)$$

donde  $T_n(x)$  es el  $n$ ésimo polinomio de Touchard.

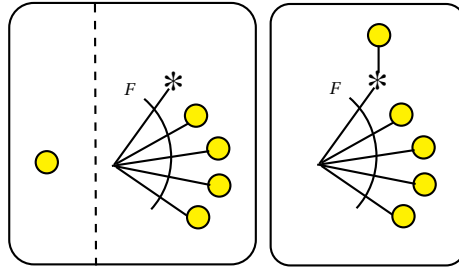


Figura 2.8: Acción del operador  $tD$  sobre  $F$

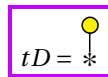
*Demostración.* Por la observación hecha mas arriba, basta demostrar la identidad

$$(tD)^n = \sum_{k=1}^n S(n, k) t^k D^k. \tag{2.54}$$

Aplicando el operador  $tD$  a la derecha a una serie  $F(t)$  y evaluando en un conjunto  $C$  obtenemos

$$(tDF)[C] = \sum_{c \in C} F[C - \{c\} + \{*\}].$$

Las configuraciones de  $(tD)F$  se obtienen de las de  $F$  quitándole un vértice  $c$  y agregándole en vez de él un elemento fantasma  $*$ . Ellas se pueden representar mas pictóricamente como una configuración de  $F$  a la cual le quitamos un vértice y le agregamos un vértice fantasma más un segmento que lo une al vértice que le quitamos (ver Fig. 2.8). Es conveniente para entender las construcciones siguientes, imaginar el operador  $tD$  como una ‘patita’ cuyo pie o extremo inferior es un vértice fantasma, y cuyo extremo superior es un vértice normal.



Iteramos el procedimiento agregando cada vez una pata a la configuración previa, enumerando los vértices fantasmas en orden de aparición. Al final obtendremos un conjunto de cadenas de vértices fantasmas ordenados en forma creciente, en el tope de cada cadena un vértice de  $C$ , el primer vértice fantasma de cada cadena formando parte de los vértices de la configuración inicial que corresponde a  $F$  (ver Fig. (2.9)). Para  $k$  cadenas,  $k \leq n$ , las configuraciones sobre un conjunto finito viene dada por

$$\sum_{C_1 + C_2 = C} S(n, k) t^k [C_1] \cdot D^k F[C_2].$$

Esto por que hay  $S(n, k)$  maneras de agrupar los  $n$  elementos fantasmas en  $k$  bloques,  $t^k [C_2] = k! \mathbb{1}_{(|C_1|=k)}$  maneras de asignarle a cada bloque de la cadena su elemento tope, y  $D^k F[C_2]$  es el peso de la configuraciones correspondientes a  $F$  en el

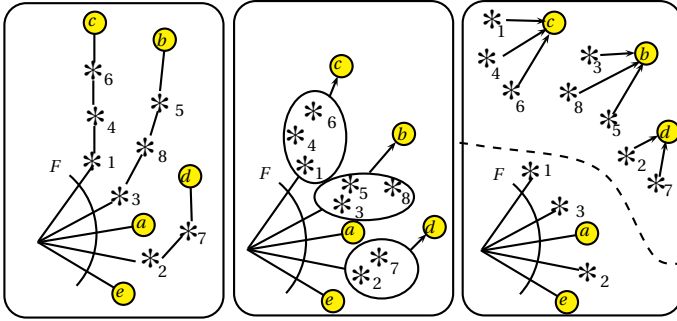


Figura 2.9: Una configuración de  $((tD)^8 F)[\{a, b, c, d, e\}]$ .

conjunto  $C_2$  más el conjunto los  $k$  vértices fantasmas (obtenidos tomando el primero de cada cadena). Sumando sobre el número  $k$  de cadenas, finalmente obtenemos:

$$((tD)^n F)[C] = \sum_{k=1}^n \sum_{C_1+C_2=C} S(n, k) t^k [C_1].D^k F[C_2] = \left( \sum_{k=1}^n S(n, k) t^k .D^k F \right)[C]$$

Como dicha identidad es válida para toda serie formal  $F(t)$ , obtenemos (2.54).  $\square$

De allí obtenemos como corolario

**Corolario 2.1.** *El operador  $e^{\lambda a^\dagger a}$  tiene la forma normal*

$$\mathcal{N} e^{\lambda a^\dagger a} =: e^{\lambda(e^{a^\dagger a} - 1)} :$$

*Demostración.* Por la proposición 2.9

$$\mathcal{N} e^{\lambda a^\dagger a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \mathcal{N} (a^\dagger a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} : T_n(a^\dagger a) : \frac{\lambda^n}{n!}$$

La fórmula exponencial para los polinomios de Touchard (2.3) nos da inmediatamente el resultado.  $\square$

## Capítulo 3

# Funciones generatrices en dos y más variables.

Consideraremos ahora series formales de tipo exponencial en las dos variables  $t$  y  $x$ :

$$F(t, x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{n,m} \frac{t^n x^m}{n!m!} \quad (3.1)$$

De una manera similar al caso univariado, obtenemos el producto  $F(t, x)G(t, x)$ :

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \left( \sum_{k,j=0}^{m,n} \binom{m}{k} \binom{n}{j} g_{m-k,n-j} \right) \frac{t^m x^n}{m!n!}. \quad (3.2)$$

Lo cual motiva la siguiente definición para poder expresar combinatorialmente y de una manera compacta la fórmula del coeficiente del producto de dos series.

**Definición 3.1.** Para una serie bivariada  $F(t, x)$  y dos conjuntos finitos disjuntos  $E$  y  $D$ , se define

$$F[D, E] = F[m, n] := f_{m,n},$$

donde  $m$  y  $n$  son los cardinales de  $D$  y  $E$  respectivamente.

### 3.1. Conjuntos coloreados y operaciones combinatorias

Según la fórmula (3.2) se tiene que

$$(F.G)[E, D] = \sum F[E_1, D_1]G[E_2, D_2], \quad (3.3)$$

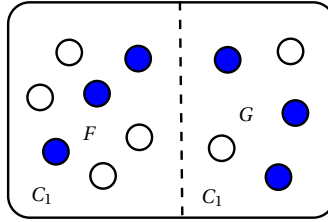


Figura 3.1: Producto de series bivariadas

donde la suma es sobre el conjunto de todas las posibles descomposiciones  $D_1 + D_2 = D$  de  $D$  y  $E_1 + E_2 = E$  de  $E$ . El par ordenado  $(E, D)$  se puede representar de una manera muy intuitiva como un conjunto coloreado usando dos colores,  $(E, D) \cong (C, \kappa)$ , donde  $C = E + D$  y  $\kappa$  es una función  $\kappa : C \rightarrow \{\bullet, \circ\}$  que le asigna a los elementos de  $E$  el color  $\bullet$  y a los elementos de  $D$  el color  $\circ$ . Usando esta notación, la fórmula (3.3) queda

$$(F.G)[C, \kappa] = \sum_{C_1+C_2=C} F[C_1, \kappa_{C_1}] G[C_2, \kappa_{C_2}], \tag{3.4}$$

donde  $\kappa_{C_i}$  denota la restricción de  $\kappa$  a  $C_i$ ,  $i = 1, 2$ . En la Figura 3.1, así como en el resto de éste capítulo hacemos la identificación de colores con indeterminadas como sigue:  $t = \bullet$  y  $x = \circ$ .

El cardinal  $|(C, \kappa)|$  de un conjunto coloreado se define como el par ordenado de los cardinales  $(|\kappa^{-1}(\bullet)|, |\kappa^{-1}(\circ)|)$ . La topología de las series bivariadas se define de una manera similar a la de las series en una variable: se dice que una sucesión  $F_n(t)$  converge a  $F(t)$  si para cada  $(C, \kappa)$ , existe un entero  $N(r, s)$ , que depende del cardinal  $(r, s)$  de  $(C, \kappa)$ , tal que  $F_n[C, \kappa]$  se hace estacionario e igual a  $F[C, \kappa]$  a partir de  $N(r, s)$ :

$$n > N(r, s) \Rightarrow F_n[C, \kappa] = F[C, \kappa].$$

La substitución de una serie bivariada  $G(t, x)$ , con  $G(0, 0) = 0$ , en una univariada  $F(t)$  es posible para toda  $F$ , por que como en el caso univariado se tiene que  $G^k(t, x) \rightarrow 0$  y por lo tanto la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{G(t, x)^n}{n!},$$

es sumable.

Como

$$G^n[C, \kappa] = \sum_{C_1+C_2+\dots+C_n=C} \prod_{i=1}^n G[C_i, \kappa_{C_i}],$$

se tiene

$$\frac{G^n}{n!}[C, \kappa] = \sum_{\pi \in \Pi[C]} \prod_{B \in \pi} G[B, \kappa_B].$$



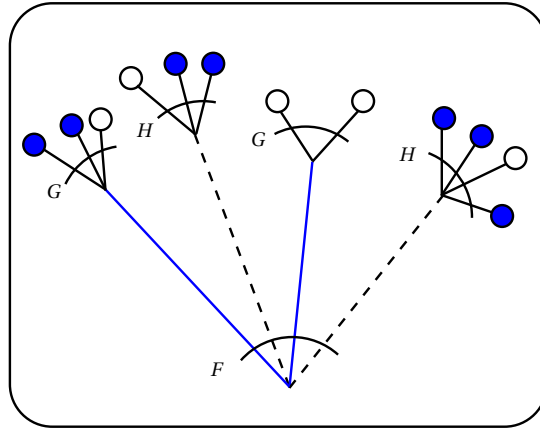


Figura 3.2: Substitución de series bivariadas en una serie bivariada.

El coeficiente de la substitución nos da entonces.

$$F(G(t, x))[C, \kappa] = \sum_{\pi \in \Pi[C]} F[\pi] \sum_{\pi \in \Pi[C]} \prod_{B \in \pi}^n G[B, \kappa_B]$$

Consideremos ahora el caso más general de la substitución de dos series  $G(t, x)$  y  $H(t, x)$ ,  $G(0, 0) = H(0, 0) = 0$ , en  $F(t, x)$  bivariada,

$$F(G(t, x), H(t, x)) = \sum_{m, n=0}^{\infty} f_{m, n} \frac{G(t, x)^m}{m!} \frac{H(t, x)^n}{n!}.$$

Para obtener la descripción conjuntística de su coeficiente genérico tenemos que colorear también los bloques de las particiones en cuestión. Es decir, considerar pares de la forma  $(\pi, \hat{\kappa})$ , donde  $\pi \in \Pi[C]$  y  $\hat{\kappa} : \pi \rightarrow \{\bullet, \circ\}$ . Así

$$F(G(t, x), H(t, x))[C, \kappa] = \sum_{(\pi, \hat{\kappa})} F[\pi, \hat{\kappa}] \prod_{B_1 \in \hat{\kappa}^{-1}(\bullet)} G[B_1, \kappa_{B_1}] \prod_{B_2 \in \hat{\kappa}^{-1}(\circ)} H[B_2, \kappa_{B_2}], \quad (3.5)$$

donde la suma es sobre todas las particiones bicoloradas de  $C$ . La demostración de la fórmula (3.5) es estándar y se deja al lector.

**Ejercicio 3.1.** Describir las estructuras combinatorias bicoloradas que cuentan las series:

$$\begin{aligned} \text{Ciemp}_G(t, x) &= \frac{G(t)}{1 - x^2 G(t)} \\ \text{Oruga}_G(t, x) &= \frac{x^2 G(t)}{1 - x^2 G(t)} \\ \text{Medusa}(t, x) &= \ln\left(\frac{1}{1 - te^{\left(\frac{x}{1-x}\right)}}\right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde  $G(t)$  es una serie arbitraria tal que  $G(0) = 0$ . ♣

La operación conjuntista para cada derivada parcial consiste en agregar un elemento fantasma con el color correspondiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(t, x)}{\partial t}[C, \kappa] &= F[C + \{*\}, \kappa^{+\bullet}] \\ \frac{\partial F(t, x)}{\partial x}[C, \kappa] &= F[C + \{*\}, \kappa^{+\circ}],\end{aligned}$$

donde  $\kappa^{+i}$ ,  $i = \bullet, \circ$ , es la extensión de  $\kappa$  a  $C + \{*\}$ , que colorea el vértice fantasma con el color  $i$ .

**Ejercicio 3.2.** Demostrar combinatorialmente la regla de cadena:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(G(t, x), H(t, x))}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial t}(G(t, x), H(t, x)) \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}(G(t, x), H(t, x)) \frac{\partial H}{\partial t} \\ \frac{\partial F(G(t, x), H(t, x))}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial t}(G(t, x), H(t, x)) \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}(G(t, x), H(t, x)) \frac{\partial H}{\partial x}.\end{aligned}$$

♣

De una manera análoga se define la integral parcial. Para  $(C, \kappa)$  un conjunto bicolorado, con  $C$  un conjunto totalmente ordenado, el coeficiente de la integral respecto a la variable  $t$  en  $(C, \kappa)$  es:

$$(f^t F)[C, \kappa] = \left( \int_0^t F(u, x) du \right) [C, \kappa] = \begin{cases} F[C^{-\bullet}, \kappa_{C^{-\bullet}}] & \text{si } \kappa^{-1}(\bullet) \neq \emptyset \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Donde  $C^{-\bullet} = C - \{c_1\}$ , y  $c_1$  es el elemento mínimo del conjunto  $\kappa^{-1}(\bullet)$ .

Hemos usado series bivariadas, pero todas estas interpretaciones combinatorias se pueden hacer con series en un número finito de variables, considerando conjuntos coloreados  $(C, \kappa)$ ,  $\kappa : C \rightarrow [n]$ , en un número finito de colores, igual al número de variables de las series en consideración. Así, la fórmula (3.5) se generaliza de una manera natural para la substitución de una tupla de series

$$G_j(x_1, x_2, \dots, x_n), j = 1, \dots, m,$$

cada una con término constante nulo, en una serie formal  $m$  variada  $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ :

$$F(G_1(\mathbf{x}), G_2(\mathbf{x}), \dots, G_m(\mathbf{x})) [C, \kappa] = \sum_{\pi \in \Pi[C], \hat{\kappa}: \pi \rightarrow [m]} F[\pi, \hat{\kappa}] \prod_{j=1}^m \prod_{B \in \pi_j} G_j[B, \kappa_B], \quad (3.7)$$

donde  $\pi_j = \hat{\kappa}^{-1}(j)$ .

### 3.2. Ecuaciones diferenciales autónomas

En esta sección estudiaremos la soluciones de ecuaciones diferenciales autónomas

$$Y' = \phi(Y) \tag{3.8}$$

cuya solución es una serie formal  $Y(t)$  que depende de la condición inicial  $Y(0) = y_0 \in \mathbb{C}$ . Si  $y_0 \neq 0$ , en general la sunbstitución  $\phi(Y)$  no se puede hacer a menos que  $\phi$  sea polinomial. por esa razón, cuando estudiemos la existencia de la solución única de (3.8) y su interpretación combinatoria, la condición inicial será la indeterminada  $x$ . En dicha solución se pueden considerar los casos en los cuáles haciendo  $x = c \in \mathbb{C}$ , en los cuáles eso tenga sentido. En general, la solución a (3.8) es una serie formal  $Y(t, x)$  que cuenta cierto tipo de árboles crecientes. Antes de ver la perspectiva general, estudiaremos dos casos particulares de ecuaciones diferenciales que conducen a soluciones combinatorias.

#### 3.2.1. Árboles binarios crecientes

Sea la ecuación diferencial  $Y' = Y^2$  con la condición inicial  $Y(0) = 1$ . Ella es equivalente a la ecuación integral

$$Y = 1 + \int_0^t Y^2. \tag{3.9}$$

Se pueden obtener aproximaciones a la solución de (3.9) calculando iteradamente

$$Y_{n+1} = 1 + \int_0^t Y_n^2$$

partiendo de  $Y_0 = 1$ , se obtiene:

$n$	$Y_n$
0	1
1	$1 + t$
2	$1 + t + t^2 + t^3/3$
3	$1 + t + t^2 + t^3 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{1}{3}t^5 + \frac{1}{9}t^6 + \frac{1}{63}t^7$
4	$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \frac{13}{15}t^5 + \frac{2}{3}t^6 + \frac{29}{63}t^7 + \frac{71}{256}t^8 + \frac{86}{567}t^9 + \frac{22}{315}t^{10} + \frac{5}{189}t^{11} + \dots$

La solución combinatorial se obtiene de la interpretación combinatoria de la integral. Para  $|C| = 0$ ,  $Y[C] = 1$ . Para  $|C| > 0$ , la ecuación (3.9) se escribe coeficiente a coeficiente:

$$Y[C] = \begin{array}{c} \textcircled{Y} \quad \textcircled{Y} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} c_1, \tag{3.10}$$

donde  $c_1$  es el primer elemento de  $C$  y la flecha indica que las  $Y$ 'es en el tope del árbol binario pequeño están ordenadas. Iterando la ecuación (3.10) y usando la

condición  $Y[\emptyset] = 1$  obtenemos que la serie formal  $Y$  cuenta los árboles binarios planares crecientes (en general no completos). Por ejemplo, para  $C = \{1, 2, 3\}$  tenemos:

$$Y[\{1, 2, 3\}] = \# \left\{ \begin{array}{ccccccc} \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} & , & \begin{array}{c} 3 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} & , & \begin{array}{c} 3 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \emptyset \quad 2 \end{array} & , & \begin{array}{c} \emptyset \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} & , & \begin{array}{c} 3 \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \emptyset \quad 1 \end{array} & , & \begin{array}{c} \emptyset \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \emptyset \quad 2 \end{array} & , & \begin{array}{c} \emptyset \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \end{array} \right\} .$$

Resolviendo analíticamente la ecuación obtenemos  $Y(t) = L(t) = \frac{1}{1-t}$ , y por lo tanto tenemos que el número de árboles binarios planares crecientes con  $n$  vértices es igual a  $n!$ . Efectivamente, dado un árbol binario  $T$ , le podemos asociar un orden lineal siguiendo el procedimiento recursivo clásico llamado en ciencias de la computación ‘**Inorder**’ definido como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{In}(\emptyset) &= \emptyset \\ \mathbf{In}(T) &= \mathbf{In}(T_1)r\mathbf{In}(T_2), \end{aligned}$$

donde  $r$  es la raíz del árbol,  $T_1$  su rama izquierda y  $T_2$  su rama derecha. Recíprocamente, a un orden lineal  $l$  le asociamos el árbol  $\mathbf{A}(l)$  con el siguiente procedimiento recursivo. Si  $c_1$  es el primer elemento del conjunto base del orden lineal, y  $l = l_1 c_1 l_2$  entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\emptyset) &= \emptyset \\ \mathbf{A}(l_1 c_1 l_2) &= \begin{array}{c} \mathbf{A}(l_1) \quad \mathbf{A}(l_2) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \\ c_1 \end{array} . \end{aligned}$$

Los procedimientos **In** y **A** son claramente uno el inverso del otro.

### 3.2.2. Permutaciones alternantes

Sea  $Y(t)$  la serie generatriz de las permutaciones alternantes de longitud impar. La derivada  $Y'(t)$  cuenta las permutaciones alternantes de longitud impar donde el mínimo elemento es un vértice fantasma  $*$ . Es decir, si  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{2n}\}$  es un conjunto totalmente ordenado, entonces  $Y'[C] = Y[\{*, c_1, c_2, \dots, c_{2n}\}]$ . Si formamos una permutación alternante con esos elementos, y  $n > 0$ , el primero de ellos ( $*$ ) debe estar entre dos elementos, ambos mayores que él, en una disposición como la siguiente:  $a_1 > a_2 < \dots < a_k > * < a_{k+2} > a_{k+3} \dots < a_{2n}$ . Es decir, el elemento fantasma secciona a la permutación alternante en dos permutaciones alternantes

de longitud impar:  $a_1 > a_2 < \dots < a_k$ , y  $a_{k+2} > a_{k+3} \dots < a_{2n}$ . Cuando  $n = 0$ ,  $C = \emptyset$ , y la única permutación alternante es  $*$ . De donde se deduce que  $Y(t)$  satisface la ecuación diferencial atónoma:

$$Y' = Y^2 + 1, \tag{3.11}$$

con la condición inicial  $Y(0) = 0$ . Ésta es equivalente a la ecuación integral siguiente:

$$Y = \int (Y^2 + 1)(t) = t + (\int Y^2)(t).$$

La ecuación diferencial (3.11) se resuelve analíticamente por separación de variables y se obtiene

$$Y(t) = \tan(t).$$

en este caso, la restricción de la biyección **A** manda permutaciones alternantes impares en árboles binarios completos.

Si denotamos por  $Z(t)$  la serie generatriz de las permutaciones alternantes pares, con un razonamiento similar obtenemos que  $Z$  satisface la ecuación diferencial (no-autónoma):

$$Z'(t) = Z(t) \cdot \tan(t),$$

con la condición inicial  $Z(0) = 1$ . Al resolverla por separación de variables obtenemos:

$$Z(t) = \sec(t). \tag{3.12}$$

Luego, la serie generatriz de las permutaciones alternantes viene dada por

$$\text{Alt}(t) = \sec(t) + \tan(t),$$

el resultado clásico de André comentado en la introducción.

**Teorema 3.1.** *Sea  $\phi(t)$  una serie formal. La ecuación diferencial autónoma*

$$Y' = \phi(Y), \tag{3.13}$$

*sujeta a la condición inicial  $Y(0, x) = x$ , tiene una solución única  $Y(t, x)$ .*

*Demostración.* La ecuación diferencial (3.13) es equivalente a la ecuación integral

$$Y = x + \int_0^t \phi(Y) du. \tag{3.14}$$

Se define la siguiente sucesión de series:

$$\begin{aligned} Y_0 &= x \\ Y_n &= x + \int_0^t \phi(Y_{n-1}) du, \quad n > 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Si demostramos que esa sucesión converge, el límite claramente satisface la ecuación integral (3.14). Vamos a demostrar que para todo conjunto bicolorado  $(C, \kappa)$ ,

si  $m$  y  $n$  son mayores o iguales que  $|\kappa^{-1}(1)|$ , entonces  $Y_m[C, \kappa] = Y_n[C, \kappa]$ . Si eso sucede, obviamente la sucesión converge puesto que  $Y_n[C, \kappa]$  se hace estacionaria a partir de  $|\kappa^{-1}(1)|$ .

Lo demostraremos por inducción en  $|\kappa^{-1}(1)|$ . Para  $|\kappa^{-1}(1)| = 0$ , por la ecuación (3.15) para todo  $n \geq 0$  se tiene  $Y_n[C, \kappa] = x[C, \kappa]$ . Suponiendo que para  $|\kappa^{-1}(1)| < r$  es cierta nuestra hipótesis, si  $|\kappa^{-1}(1)| = r$  y  $n, m \geq r$ , de nuevo por (3.15)

$$Y_n[C, \kappa] = \sum_{\pi \in \Pi[C \cdot \bullet]} \phi[\pi] \prod_{B \in \pi} Y_{n-1}[B, \kappa_B].$$

Como para todo  $B \in \pi$ ,  $|\kappa_B^{-1}(1)| \leq |\kappa^{-1}(1)| - 1 = r - 1$ , se tiene que  $m - 1$  y  $n - 1$  ambos son mayores o iguales a  $|\kappa_B^{-1}(1)|$ , y por hipótesis de inducción  $Y_{n-1}[B, \kappa_B] = Y_{m-1}[B, \kappa_B]$ . Por lo tanto  $Y_m[C, \kappa] = Y_n[C, \kappa]$ .

La unicidad se obtiene también por inducción. Si  $Z(t, x)$  es otra solución de (3.14), como  $Z(0, x) = x = Y_0(t, x)$ , se demuestra por inducción que  $Z[C, \kappa] = Y_n[C, \kappa]$  si  $n \geq |\kappa^{-1}(1)|$ . Luego  $Z(t, x) = Y(t, x)$ . □

Ahora vamos a dar una interpretación combinatoria a los coeficientes de la solución a la ecuación (3.14). Si el conjunto coloreado consta de un sólo elemento de color  $\circ$ ,  $Y$  se representa como un vértice de color blanco. En otro caso, usando la interpretación combinatoria de la integral, se toma el menor de los elementos coloreados con color  $\bullet$  como raíz de un árbol pequeño en cuyo tope hay de nuevo estructuras de  $Y$ . La fibra de la raíz tienen peso dado por los coeficientes de la serie  $\phi$ :

$$Y = \circ + \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \diagdown & | & | & / \\ \bullet & & & \end{array} \phi \end{array} \quad (3.16)$$

Iterando la ecuación (3.16) y usando la condición inicial obtenemos que  $Y[C, \kappa]$  nos da el número de árboles crecientes en los vértices con color  $\bullet$ , los cuáles llamaremos vértices fértiles. Las fibras de dichos vértices tienen peso dado por la serie  $\phi$  (incluyendo las fibras vacías). Los vértices blancos no tienen fibra (y los llamaremos infértiles). Denotaremos de ahora en adelante a la solución  $Y(t, x)$  de la ecuación (3.13) como  $\mathcal{A}_\phi^1(t, x)$ , por enumerar ese tipo de árboles. Observar que los vértices blancos son siempre hojas, y si el término constante de  $\phi(x)$  es cero, los vértices de color  $\bullet$  son todos internos.

**Ejercicio 3.3.** Resolver las ecuaciones diferenciales autónomas, con condición inicial  $Y(0) = x$ . En cada caso interpretar combinatorialmente.

1.  $Y' = Y$
2.  $Y' = Y^2$
3.  $Y' = e^Y$

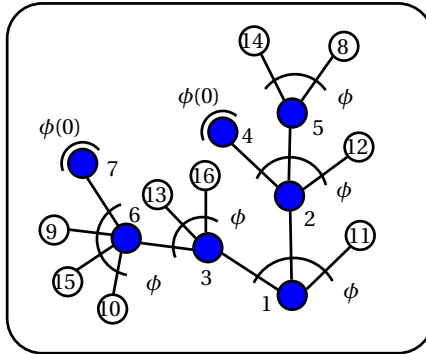


Figura 3.3: Árbol enumerado por la serie  $\mathcal{A}_\phi^1(t, x)$ , solución de la ecuación autónoma  $Y' = \phi(Y)$ ,  $Y(0) = x$ .

- 4.  $Y' = \frac{1}{1-Y}$
- 5.  $Y' = Y^3$
- 6.  $Y' = 1 + Y^2$ .



### 3.2.3. Fórmula de Lie-Gröbner-Taylor

Consideremos el operador

$$e^{t\phi(x)D_x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\phi(x)D_x)^n$$

que actúa sobre series formales que dependen de la variable  $x$ :

$$e^{t\phi(x)D_x} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\phi(x)D_x)^n F(x).$$

Esta acción no es trivial, por que los operadores ‘multiplicar por  $\phi(x)$ ’ y ‘derivar respecto de  $x$ ’ no conmutan. Haciendo algunos cálculos tenemos:

$$\begin{aligned} (\phi(x)D_x)^2 F(x) &= (\phi(x)D_x)(\phi(x)D_x)F(x) \\ &= (\phi(x)D_x)(\phi(x)F'(x)) = \phi(x)\phi'(x)F'(x) + \phi^2(x)F''(x). \end{aligned}$$

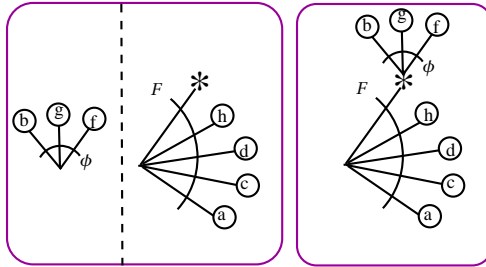


Figura 3.4: Una configuración de  $(\phi(x)D_x F)[C] = \sum_{C_1+C_2=C} \phi[C_1]F[C_2 + \{*\}]$ , para  $C = \{a, b, c, d, f, g, h\}$ .

El cálculo de  $(\phi(x)D_x)^3 F(x)$  es ya bastante engorroso:

$$\begin{aligned}
 (\phi(x)D_x)^3 F(x) &= (\phi(x)D_x)(\phi(x)\phi'(x)F'(x) + \phi^2(x)F''(x)) \\
 &= \phi(x)(\phi'(x))^2 F'(x) + \phi^2(x)\phi''(x)F'(x) + \phi^2(x)\phi'(x)F''(x) \\
 &\quad + 2\phi^2(x)\phi'(x)F''(x) + \phi^3(x)F'''(x).
 \end{aligned}$$

No aparece un patrón legible, al menos para mí, que pueda conducir a una fórmula general para expresar  $(\phi(x)D_x)^n F(x)$  de una manera compacta. Vamos a intentar hacer los cálculos con el método combinatorio. Lo primero es expresar el operador  $\phi(x)D_x$  al estilo ‘vértice fantasma’ como en el caso  $x D_x$  del capítulo anterior.

$$(\phi(x)D_x F)[C] = \sum_{C_1+C_2=C} \phi[C_1]F[C_2 + \{*\}].$$

Podemos representar la configuración obtenida de este modo como un árbol pequeño integrado con una configuración de  $F$ . Las hojas del árbol pequeño son vértices blancos, su raíz es un vértice fantasma y su fibra tiene peso en dado por los coeficientes de la serie  $\phi(x)$ . El vértice fantasma está incorporado a los vértices (blancos) de la configuración que corresponde a  $F$  (ver figura 3.4).

Para obtener las configuraciones de  $(\phi(x)D_x)^2 F(x)$ , usamos el mismo procedimiento anterior agregándole a la configuración de  $\phi(x)D_x F(x)$  otro árbol pequeño, cuyo vértice fantasma puede formar parte o bien de los vertices hojas del primer árbol pequeño, o bien, de los vértices de la configuración de  $F$  (ver figura 3.5 (b)). Los vértices fantasmas se enumeran en orden de aparición. Iterando este procedimiento, obtenemos que las configuraciones de  $(\phi D_x)^n F(x)$  son árboles con  $n$  vértices fantasmas cuyos subíndices crecen a lo largo de cada rama, sus fibras tienen pesos dados por la serie  $\phi$ , y sus raíces forman parte de los vértices de la configuración de  $F$ . Los vértices blancos siempre son hojas. Es decir, en cada vértice de  $F$  hay un árbol del tipo enumerado por  $\mathcal{A}_\phi^1$ , pero con vértices fantasmas en vez de vérti-



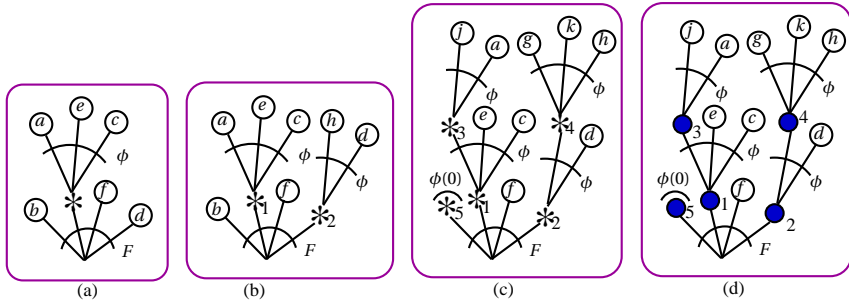


Figura 3.5: Configuraciones típicas de: (a)  $\phi(x)D_x F$ , (b)  $(\phi(x)D_x)^2 F$ , (c)  $(\phi(x)D_x)^5 F$ , (d)  $\frac{t^5}{5!}(\phi(x)D_x)^5 F$ .

ces de color 1 (observar que un vértice blanco solitario también es una configuración enumerada por  $\mathcal{A}_\phi^1$ ). Veamos ahora el significado combinatorio del producto  $\frac{t^n}{n!}(\phi(x)D)^n F(x)$ . Como  $\frac{t^n}{n!}$ , y  $(\phi(x)D)^n F(x)$  son ambas univariadas, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{t^n}{n!}(\phi(x)D)^n F(x)[C, \mathbf{x}] &= \frac{t^n}{n!}[\kappa^{-1}(\bullet)]((\phi(x)D)^n F)[\kappa^{-1}(\circ)] \\ &= \mathbb{I}_{(|\kappa^{-1}(\bullet)|=n)}((\phi(x)D)^n F)[\kappa^{-1}(\circ)]. \end{aligned}$$

Si suponemos que los vértices de  $\kappa^{-1}(\bullet)$  están totalmente ordenados, podemos reemplazar a los  $n$  vértices fantasmas en las configuraciones de  $(\phi(x)D)^n F$  por aquellos, siguiendo el orden en ambos conjuntos de vértices (ver figuras 3.5 (c) y (d)). Así,  $\frac{t^n}{n!}(\phi(x)D)^n F(x)$  enumera las configuraciones de  $F(\mathcal{A}_\phi^1(t, x))$  con exactamente  $n$  vértices de color  $\bullet$ . De allí obtenemos la fórmula de Lie-Groöbner-Taylor.

**Teorema 3.2.** *El operador exponencial  $e^{t\phi(x)D_x}$  actúa sobre una serie formal  $F(x)$  como sigue*

$$e^{t\phi(x)D_x} F(x) = F(\mathcal{A}_\phi^1(t, x)). \tag{3.17}$$

En particular, para  $F(x) = x$  se tiene

$$e^{t\phi(x)D_x} x = \mathcal{A}_\phi^1(t, x).$$

**Ejercicio 3.4.** Demostrar que los coeficientes  $a^\phi(x)$  de la serie

$$\mathcal{A}_\phi^1(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^\phi(x) \frac{t^n}{n!}$$

satisfacen la fórmula recursiva:

$$\begin{cases} a_0^\phi(x) = x \\ a_{n+1}^\phi(x) = \phi(x)D_x a_n^\phi(x). \end{cases} \tag{3.18}$$

Calcular los cinco primeros términos para la solución a la ecuación  $Y' = 1 + Y^2$  y constatar con dibujos el resultado obtenido. ♣

**Ejercicio 3.5.** Sea  $\mathcal{A}_{\phi+}^{\dagger}(t, x) = \mathcal{A}_{\phi}^{\dagger}(t, x) - x$ . Definiendo la serie

$$B^{\phi}(t, x) = e^{\mathcal{A}_{\phi+}^{\dagger}(t, x)},$$

interpretar combinatorialmente los polinomios  $b_n^{\phi}(x)$  de su expansión:

$$B(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{\phi}(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Demostrar la fórmula recursiva:

$$\begin{cases} b_0^{\phi}(x) = 1 \\ b_{n+1}^{\phi}(x) = \phi(x)(b_n^{\phi}(x) + D_x b_n^{\phi}(x)). \end{cases} \quad (3.19)$$

Ayuda:  $e^{t\phi(x)D_x} e^x = e^{\mathcal{A}_{\phi}^{\dagger}(t, x)}$ .

¿Qué familia de polinomios se obtienen para  $\phi(x) = x$ ? ♣

## Capítulo 4

# Pletismo de desplazamiento y ecuaciones diferenciales autónomas

En este capítulo estudiaremos series formales en la variable  $t$  e infinitas variables  $x_0, x_1, x_2, \dots$ :

$$F(t, x_0, x_1, x_2, \dots) = \sum_{m, n_0, n_1, n_2, \dots} f_{m, n_0, n_1, n_2, \dots} \frac{t^m x_0^{n_0} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots}{m! n_0! n_1! n_2! \dots} \quad (4.1)$$

Para escribir de una manera mas compacta este tipo de series usaremos la siguiente notación:  $\mathbf{n}$  denotará el vector de enteros no-negativos  $(n_0, n_1, n_2, \dots)$ , donde siempre supondremos que sólo un número finito sus componentes son distintas de cero. La tupla de  $(x_0, x_1, x_2, \dots)$  se denotará por  $\mathbf{x}$ , y el monomio  $x_0^{n_0} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots$  como  $\mathbf{x}^{\mathbf{n}}$ . El factorial  $\mathbf{n}!$  denotará el producto  $n_0! n_1! n_2! \dots$ .

Así, la serie (4.1) luce como sigue:

$$F(t, \mathbf{x}) = \sum_{m, \mathbf{n}} f_{m, \mathbf{n}} \frac{t^m \mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{m! \mathbf{n}!},$$

donde  $m$  va de cero a infinito, y  $\mathbf{n}$  varía en las tuplas de enteros no-negativos con un número finito de componentes no-nulas. Como en el caso bivariado y univariado, las series de este tipo están dotadas de la topología dada por la topología discreta en cada coeficiente: se tiene la convergencia

$$F_k(t, \mathbf{x}) \rightarrow F(t, \mathbf{x})$$

si para todo par  $(m, \mathbf{n})$ , la sucesión  $f_{m, \mathbf{n}}^{(k)}$  se hace estacionaria e igual a  $f_{m, \mathbf{n}}$  para  $k$  suficientemente grande.

El operador desplazamiento  $S$  actúa sobre este tipo de series formales desplazando en una unidad las variables, de la forma siguiente

$$SF(t, x_0, x_1, x_2, \dots) = F(t, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Es claro que  $x_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow 0$ . Así, para  $\phi(x)$  univariada, se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_k) = \phi(0).$$

Más generalmente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S^k F(t, x_0, x_1, x_2, \dots) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(t, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots) = F(t, 0, 0, 0, \dots). \quad (4.2)$$

## 4.1. Operaciones combinatorias

Para  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{k}$  vectores de enteros como arriba, se define el coeficiente binomial

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} := \prod_{j=0}^{\infty} \binom{n_j}{k_j}.$$

Haciendo un cálculo similar al del caso univariado, el producto de dos series  $F(t, \mathbf{x})$  y  $G(t, \mathbf{x})$  está dado por la fórmula:

$$(F.G)(t, \mathbf{x}) = \sum_{m, \mathbf{n}} \sum_{j, \mathbf{k}} \left( \sum_j \binom{m}{j} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} f_{j, \mathbf{k}} g_{m-j, \mathbf{n}-\mathbf{k}} \right) \frac{t^m \mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{m! \mathbf{n}!}. \quad (4.3)$$

De nuevo, como en el caso bivariado, la clave para entender la combinatoria detrás de las operaciones entre series formales, son los conjuntos coloreados. En este caso tenemos que usar un número infinito de colores, uno para cada variable  $x_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , y un color adicional,  $\bullet$  para la variable  $t$ . Los colores correspondientes a las variables  $x$ 's serán representados con un vértice blanco junto con el número del color correspondiente:  $x_i \equiv \circ_i$ ,  $t = \bullet$ . En los conjuntos coloreados  $(C, \kappa)$  que consideraremos en éste capítulo,  $\kappa$  es una función de  $C$  en el conjunto infinito de colores  $\{\bullet\} \cup \mathbb{N}$ . El cardinal de  $(C, \kappa)$  se define como el vector de las cardinalidades de los conjuntos preimágenes por  $\kappa$ ,

$$|(C, \kappa)| = (|\kappa^{-1}(\bullet)|, |\kappa^{-1}(0)|, |\kappa^{-1}(1)|, |\kappa^{-1}(2)|, \dots).$$

Para  $F(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{R}[[t, x_0, x_1, x_2, \dots]]$  se define  $F[C, \kappa]$  como el coeficiente  $f_{m, \mathbf{n}}$ , con  $(m, \mathbf{n})$  el cardinal de  $(C, \kappa)$ ,

$$F[C, \kappa] = f_{|(C, \kappa)|}.$$

Podemos chequear fácilmente que

$$\begin{aligned} (F + G)[C, \kappa] &= F[C, \kappa] + G[C, \kappa] \\ (F.G)[C, \kappa] &= \sum_{C_1 + C_2 = C} F[C_1, \kappa_{C_1}] G[C_2, \kappa_{C_2}]. \end{aligned}$$

Además las interpretaciones combinatorias de derivadas parciales y la integral parcial son exactamente como en el caso bivariado

$$\begin{aligned} D_{x_i} F[C, \kappa] &= F[C + \{*\}, k^{+i}] \\ F'[C, \kappa] = D_t F[C, \kappa] &= F[C + \{*\}, \kappa^{+\bullet}] \\ \left(\int_0^t F\right)[C, \kappa] &= F[C^{-\bullet}, \kappa_{C^{-\bullet}}]. \end{aligned}$$

Así como la substitución de una serie infinitovariada en  $G(t, \mathbf{x})$ , con  $G(0, \mathbf{0}) = 0$ , en una univariada  $H(x)$ :

$$H(G(t, \mathbf{x})) = \sum_{\pi \in \Pi[C]} H[\pi] \prod_{B \in \pi} G[B, \kappa_B].$$

**Ejemplo 4.1.** La serie  $e^{t \sum_{k=0}^{\infty} x_k}$  tiene la siguiente expansión

$$e^{t \sum_{k=0}^{\infty} x_k} = \sum_{\mathbf{n}} \frac{t^{|\mathbf{n}|} \mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} = \sum_{\mathbf{n}} \frac{t^{|\mathbf{n}|} |\mathbf{n}|! \mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{|\mathbf{n}|! \mathbf{n}!},$$

donde  $|\mathbf{n}| = n_0 + n_1 + n_2 \dots$ . Ella cuenta el número de biyecciones entre vértices de color  $\bullet$  y vértices de cualquier color numérico. ♠

El caso general de la substitución se hace de un sistema de infinito de series

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) = (G_0(t, \mathbf{x}), G_1(t, \mathbf{x}), G_2(t, \mathbf{x}), \dots),$$

en una serie infinito- variada  $F(x_0, x_1, x_2, \dots)$ ,

$$F(G_0(t, \mathbf{x}), G_1(t, \mathbf{x}), G_2(t, \mathbf{x}), \dots) = \sum_{n_0, n_1, n_2, \dots} f_{n_0, n_1, n_2, \dots} \frac{G_0^{n_0} G_1^{n_1} G_2^{n_2} \dots}{n_0! n_1! n_2! \dots}.$$

Esto es similar al caso multivariado, para  $\mathbf{G}$ , un sistema de series tales que  $G_i(0) = 0$  para todo  $i$ , la descripción conjuntista de la substitución debe ser como sigue:

$$F(\mathbf{G}(t, \mathbf{x}))[C, \kappa] = \sum_{\pi \in \Pi[C], \hat{\kappa}: \pi \rightarrow \mathbb{N}} F[\pi, \hat{\kappa}] \prod_{j=0}^{\infty} \prod_{B \in \pi_j} G_j[B, \kappa_B]. \quad (4.4)$$

sólo que la suma, por ser sobre funciones que colorean usando un número infinito de colores, pudiera ser infinita. Para que esta definición tenga sentido para una serie arbitraria  $F$ , la condición necesaria y suficiente es la siguiente:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} G_j(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (4.5)$$

en cuyo caso diremos que  $\mathbf{G}$  es admisible. Veamos primero que la condición es necesaria, por que si tomamos  $F(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j$ ,  $F(\mathbf{G}(t, \mathbf{x})) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j(t, \mathbf{x})$  y por lo tanto  $\mathbf{G}(t, \mathbf{x})$  debe ser sumable. Re-escribiendo la suma en (4.4) obtenemos:

$$F(\mathbf{G}(t, \mathbf{x}))[C, \kappa] = \sum_{\mathbf{n}} \sum_{\{(\pi, \hat{\kappa}) | \mathbf{n}\}} F[\pi, \hat{\kappa}] \prod_{j=0}^{\infty} \prod_{B \in \pi_j} G_j[B, \kappa_B]. \quad (4.6)$$

Como  $G_j \rightarrow 0$ , existe un  $N(C, \kappa)$  tal que si  $j > N(C, \kappa)$ ,  $G_j[B, \kappa_B] = 0$  para todo  $B \subseteq C$ . Luego, podemos restringir las coloraciones internas para que satisfagan la condición:  $\hat{\kappa}(B) < N(C, \kappa)$ , por que la contribución a la suma de las que no la satisfacen en cero. Luego, la suma externa es sobre las tuplas de enteros tales que  $n_j = 0$  para  $j > N(C, \kappa)$  y tales que  $|\mathbf{n}| = n_0 + n_1 + \dots = |\pi| \leq |C|$ . Un número finito evidentemente.

En el caso que nos ocupa, también tenemos la operación adicional  $S$ , cuya descripción conjuntista es como sigue:

$$SF[C, \kappa] = \begin{cases} F[C, s^{-1}\kappa] & \text{si } \kappa(c) \geq 1 \text{ para todo } c \notin \kappa^{-1}(\bullet) \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde

$$(s^{-1}\kappa)(c) = \begin{cases} \bullet & \text{si } \kappa(\bullet) = \bullet \\ \kappa(c) - 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

## 4.2. Fórmula de Lie-Gröbner-Taylor multivariada

Vamos a considerar en este contexto, operadores de la forma:

$$\mathcal{D}^\phi = \sum_{j=0}^{\infty} \phi(x_{j+1}) D_{x_j}. \quad (4.7)$$

Éste tipo de operador está bien definido para series en  $\mathcal{R}[[t, x_0, x_1, x_2, \dots]]$  si  $\phi(0) = 0$ . En dicho caso  $\phi(x_k) \rightarrow 0$  y se puede deducir fácilmente que  $\sum_{j=0}^{\infty} \phi(x_{j+1}) D_{x_j} F(t, \mathbf{x})$  converge para  $F(t, \mathbf{x})$  arbitraria. En caso contrario, tenemos que suponer  $F(t, \mathbf{x})$  depende de un número finito de variables. Es decir, que existe un  $n$  tal que

$$F(t, \mathbf{x}) = F(t, x_0, x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots).$$

En ese caso el operador se transforma en una suma finita.

$$\mathcal{D}^\phi F(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=0}^n \phi(x_{j+1}) D_{x_j} F(t, \mathbf{x}),$$

y  $\mathcal{D}^\phi$  va de  $\mathcal{R}[[t, x_0, x_1, \dots, x_n]]$  en  $\mathcal{R}[[t, x_0, x_1, \dots, x_{n+1}]]$ . Una serie se llama de amplitud acotada si depende de un número finito de variables. Es decir, el espacio de series de amplitud acotada es la unión

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{R}[[t, x_0, x_1, \dots, x_n]] \subset \mathcal{R}[[t, x_0, x_1, x_2, \dots]].$$

En general,  $\mathcal{D}^\phi$  manda series de amplitud acotada en series de amplitud acotada.

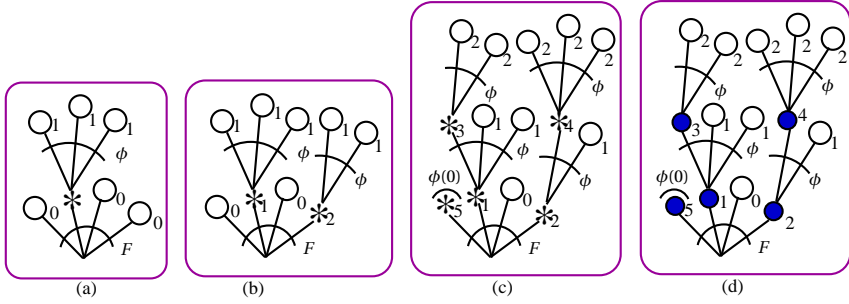


Figura 4.1: Configuraciones típicas de: (a)  $\mathcal{D}^\phi F$ , (b)  $(\mathcal{D}^\phi)^2 F$ , (c)  $(\mathcal{D}^\phi)^5 F$ , (d)  $\frac{t^5}{5!} (\mathcal{D}^\phi)^5 F$ .

Veremos que  $\mathcal{D}^\phi$  generaliza el operador  $\phi(x)D$  a este contexto, de tal modo que es útil para resolver ecuaciones diferenciales autónomas combinadas con la operación desplazamiento de variables, conduciendo a interesantes interpretaciones combinatorias de su solución.

Hagamos primero algunos cálculos combinatorios para motivar los resultados. Si  $F(x)$  es una serie univariada, veamos la acción de  $\mathcal{D}^\phi$  sobre  $F(x_0)$ :

$$\mathcal{D}^\phi F[C, \kappa] = (\phi(x_1)D_{x_0}F)[C, \kappa] = \sum_{C_1+C_2=C} \phi(x_1)[C_1, \kappa_{C_1}]F[C_2 + \{*\}, \kappa_{C_2}^{+0}],$$

los sumandos que contribuyen a la suma deben satisfacer  $\kappa(C_1) = 1$  y  $\kappa(C_2) = 0$ . Las configuraciones de la serie  $(\mathcal{D}^\phi F)(x_0, x_1)$  son como en el caso bivariado del capítulo anterior, excepto que las hojas del árbol pequeño tienen color 1, mientras que los vértices básicos de  $F$  tienen color 0. Las configuraciones de  $((\mathcal{D}^\phi)^2 F)(x_0, x_1, x_2)$  se obtienen o bien añadiendo un árbol pequeño con hojas de color uno colocando un vértice fantasma sobre un nodo de color cero, o bien añadiendo un árbol pequeño con hojas de color 2 colocando un vértice fantasma sobre un nodo de color 1. Iterando este procedimiento (ver figura 4.1), de una manera similar al caso bivariado, se obtiene que las configuraciones de  $(\mathcal{D}^\phi)^n F(x_0)$  son árboles con  $n$  vértices fantasmas cuyos subíndices crecen a lo largo de cada rama, sus fibras tienen pesos dados por la serie  $\phi$ , y sus raíces forman parte de los vértices de la configuración de  $F$ . Todos los vértices no-fantasmas de la configuración de  $F$  tienen color cero. La peculiaridad de éstas estructuras respecto al caso bivariado es que los vértices no-fantasmas en los árboles son siempre hojas cuyo color numérico indica su altura en el árbol (el número de vértices que lo preceden desde la raíz). La serie generatriz infinitovariada nos da una información muy importante, el número de árboles que tienen la misma multiplicidad de hojas clasificadas por su altura.

Denotemos por  $\mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x})$  la serie generatriz (en infinitas variables) de este tipo de árboles, obtenidos al reemplazar los vértices fantasmas por vértices de color  $\bullet$ ,

preservando el orden dado por los vértices fantasmas. Por lo anteriormente visto tenemos la fórmula de Lie-Gröbner-Taylor en este contexto:

$$e^{t\mathcal{D}^\phi} F(x_0) = F(\mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x})). \quad (4.8)$$

Esta fórmula, como antes, esta ligada íntimamente a la solución de ciertas ecuaciones diferenciales autónomas, que llamaremos *pletísticas*. Observar que

$$\mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x}) = e^{t\mathcal{D}^\phi} x_0, \quad (4.9)$$

y por lo tanto

1.  $\mathcal{A}_\phi^\dagger(0, \mathbf{x}) = x_0$ .
2.  $\mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{0}) = 0$ , si  $\phi(0) = 0$ .
3. Al agregar un vértice fantasma minimal de color  $\bullet$  en una estructura enumerada por  $\mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x})$ , éste va a ocupar la raíz y se obtiene una estructura enumerada por  $\phi(\mathcal{A}_\phi^\dagger(t, x_1, x_2, x_3, \dots))$  (Ver figura 4.2). Luego,  $\mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x})$  es una solución de la ecuación diferencial

$$Y' = \phi(SY).$$

La serie

$$S^n \mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x}) = \mathcal{A}_\phi^\dagger(t, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$$

enumera árboles similares a los enumerados por  $\mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x})$ , excepto que los colores numéricos de sus vértices indican su altura más  $n$ . Como el operador desplazamiento conmuta con la derivada, se tiene además

$$(S^k \mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x}))' = S^k (\mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x}))' = S^k (\phi(S \mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x}))) = \phi(SS^k \mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x})).$$

**Teorema 4.1.** *La ecuación diferencial*

$$\begin{cases} Y' & = \phi(SY) \\ Y(0, \mathbf{x}) & = x_k, \end{cases}$$

tiene una única solución  $Y(t, \mathbf{x})$  dada por la serie  $S^k \mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x})$ .

*Demostración.* Ya verificamos que  $S^k \mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x})$  es una solución de la ecuación pletística. La demostración de la unicidad es como en el Teorema 3.1, usando la ecuación integral equivalente:

$$Y = x_k + \int_0^t \phi(SY) du. \quad (4.10)$$



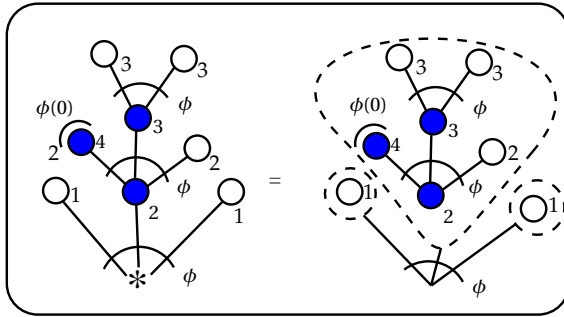


Figura 4.2: Ecuación  $(\mathcal{A}_\phi^1(t, x_0, x_1, \dots))' = \phi(\mathcal{A}_\phi^1(t, x_1, x_2, \dots))$ .

□

**Ejemplo 4.2.** Podemos calcular las aproximaciones de la solución a la ecuación diferencial pletística usando la fórmula recursiva

$$\begin{cases} Y_0 = x_0, \\ Y_n = x_0 + \int_0^t \phi(SY_{n-1}) du. \end{cases}$$

Sin embargo, la fórmula (4.9) es más eficiente para hacer cálculos manuales. Vamos a usarla para encontrar algunos términos en la serie

$$Y(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\mathbf{x}) \frac{t^k}{k!},$$

solución a

$$\begin{cases} Y' = (SY)^2 \\ Y(0, \mathbf{x}) = x_0. \end{cases}$$

Para este caso la fórmula recursiva es

$$a_n = \sum_{j=0}^{n-1} x_{j+1}^2 D_{x_j} a_{n-1}.$$

Partiendo de  $a_0 = x_0$ , tenemos:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1^2 D_{x_0} x_0 = x_1^2 \\ a_2 &= x_2^2 D_{x_1} x_1^2 = 2x_2^2 x_1 \\ a_3 &= (x_3^2 D_{x_2} + x_2^2 D_{x_1}) 2x_2^2 x_1 = 4x_3^2 x_2 x_1 + 2x_2^4 \\ a_4 &= (x_4^2 D_{x_3} + x_3^2 D_{x_2} + x_2^2 D_{x_1}) (4x_3^2 x_2 x_1 + 2x_2^4) = 8x_4^2 x_3 x_2 x_1 + 4x_3^4 x_1 + 12x_3^2 x_2^3. \end{aligned}$$

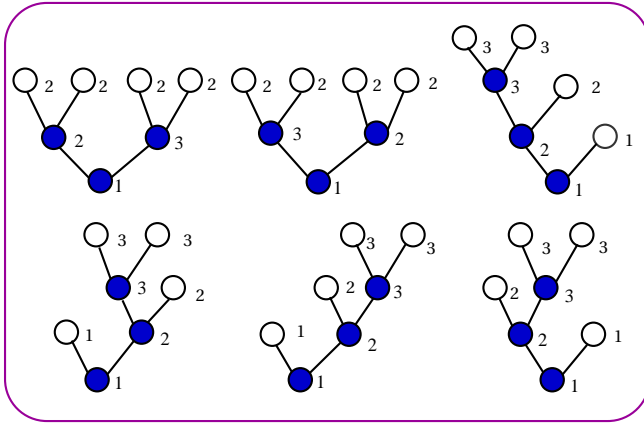


Figura 4.3: Árboles binarios enumerados por el coeficiente  $a_3(\mathbf{x}) = 4x_3^2 x_2 x_1 + 2x_2^4$  de la solución a la ecuación  $Y' = (SY)^2$ . No se muestran las etiquetas de los vertices de color numérico.



En general, los coeficientes  $a_k^\phi(\mathbf{x})$ , de la serie

$$\mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^\phi(\mathbf{x}) \frac{t^k}{k!},$$

solución de la ecuación diferencial autónoma pletística, se obtienen mediante la fórmula recursiva

$$\begin{aligned} a_0^\phi(\mathbf{x}) &= x_0 \\ a_{k+1}^\phi(\mathbf{x}) &= \sum_{j=0}^k \phi(x_{j+1}) D_{x_j} a_k^\phi(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{4.11}$$

**Ejercicio 4.1.** Calcular los 4 primeros términos de la solución a la ecuación diferencial pletística

$$\begin{cases} Y' = (SY)^2 + 1 \\ Y(0) = 0. \end{cases}$$

Interpretar combinatorialmente y observar que la solución  $Y$  es el análogo pletístico de la serie  $Y = \tan(t + \arctan(x))$ .♣

**Ejercicio 4.2.** Sea  $\mathcal{A}_\phi^{\dagger+}(t, \mathbf{x}) = \mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x}) - x_0$ , y sea la serie

$$B^\phi(t, \mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^\phi(\mathbf{x}) \frac{t^n}{n!} = e^{\mathcal{A}_\phi^{\dagger+}(t, \mathbf{x})}.$$

1. Usar la fórmula de Lie-Gröbner-Taylor para obtener

$$B^\phi(t, \mathbf{x}) = e^{-x_0} e^{t\mathcal{Q}^\phi} e^{x_0}. \tag{4.12}$$

2. Deducir la fórmula recursiva para los coeficientes de  $B^\phi(t, \mathbf{x})$ .

$$\begin{aligned} b_0^\phi &= x_0 \\ b_{n+1}^\phi(\mathbf{x}) &= \phi(x_1) b_n^\phi(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^n \phi(x_{j+1}) D_{x_j} b_n^\phi(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{4.13}$$

3. Dar una interpretación combinatoria a la serie  $B^\phi(t, \mathbf{x})$  y a sus coeficientes.



**Ejercicio 4.3.** Verificar que la solución a la ecuación diferencial pletística

$$\begin{cases} Y' = SY \\ Y(0) = x_0 \end{cases}$$

es el análogo pletístico de la exponencial

$$Y(t, \mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n!} = \mathcal{A}_x^\dagger(t, \mathbf{x}).$$

Verificar también que  $B^x(t, \mathbf{x}) = B(t, \mathbf{x})$  es la serie generatriz de los polinomios de Bell,  $b_n(\mathbf{x})$ . De la fórmula (4.13) obtener una fórmula recursiva para dichos polinomios y calcular los 4 primeros. ♣

### 4.3. Pletismo de desplazamiento y fórmula de Lie-Gröbner-Taylor pletística

Llegó el momento de explicar el porqué de la terminología. La operación, pletismo de desplazamiento se define entre dos series formales infinitovariadas, y es un análogo de la sustitución de series formales en una variable. Se trata de substituir cada variable  $x_n$  de  $F$  por la  $G$  desplazada  $n$  veces,  $S^n G$ :

$$(F \boxtimes G)(t, x_0, x_1, x_2, \dots) := F(t, G(t, x_0, x_1, \dots), G(t, x_1, x_2, \dots), \dots) \tag{4.14}$$

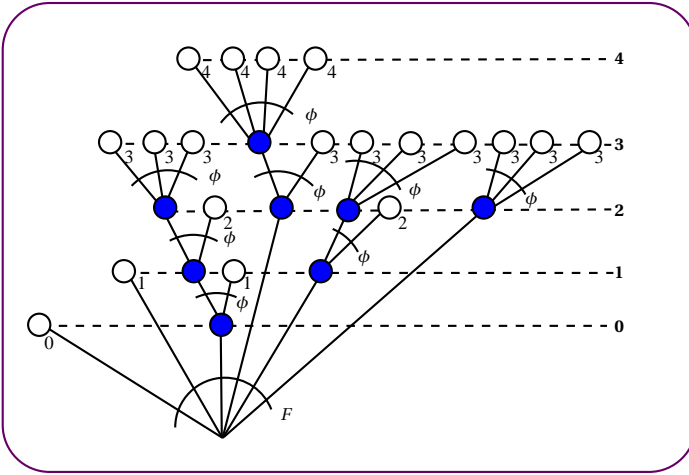


Figura 4.4: Configuración de  $e^{t\mathcal{D}^\phi} F(x_0, x_1, x_2, \dots)$ . No se muestran etiquetas.

De una manera más compacta:

$$(F \boxtimes G)(t, \mathbf{x}) := F(t, G, SG, S^2G, \dots).$$

Desde luego que se requiere la condición de admisibilidad (4.5) sobre la serie  $G$  para garantizar la convergencia de la serie definida por medio de (4.14), la cual es

$$\lim_{j \rightarrow \infty} G_j(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Esta operación de pletismo de traslación fue introducida en [17], y aparece de una manera natural en éste contexto. De hecho, el desplazamiento es un caso especial de pletismo. Se tiene:

$$x_n \boxtimes G(t, x_0, x_1, x_2, \dots) = S^n G(t, x_0, x_1, x_2, \dots) = G(t, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots),$$

y la ecuación diferencial autónoma pletística se puede reescribir así:

$$\begin{cases} Y' = \phi(x_1) \boxtimes Y \\ Y(0) = x_0. \end{cases}$$

La relación con la solución a  $\mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x})$  es más esencial. Con no mucho esfuerzo extra podemos generalizar la fórmula (4.8).

$$e^{t\mathcal{D}^\phi} F(x_0, x_1, \dots, x_n) = F(\mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x}), S\mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x}), \dots, S^n \mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x})) \tag{4.15}$$

Esto por que el efecto de la acción combinatoria del operador  $\frac{t^n}{n!}(\mathcal{D}^\phi)^n$  sobre una variable  $x_k$  consiste en hacer crecer árboles como los enumerados por  $\mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x})$ , pero cuyos colores en los vértices numéricos están trasladados por el valor  $k$ . Es decir, los árboles enumerados por  $S^k \mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x})$  (ver figura 4.4).

Más generalmente, cuando  $\phi(0) = 0$  el operador  $\mathcal{D}^\phi$  está definido en todo el espacio de series formales en infinitas variables, y además,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_\phi^\dagger(t, \mathbf{x}) = 0$ , y tenemos la fórmula de Lie-Gröbner-Taylor pletística.

$$e^{t\mathcal{D}^\phi} F(x_0, x_1, x_3, \dots) = (F \boxtimes \mathcal{A}_\phi^\dagger)(t, \mathbf{x}). \tag{4.16}$$

**Ejercicio 4.4.** Usar la fórmula (4.16) para calcular

$$e^{t\mathcal{D}^x} e^{\sum_{k=0}^\infty x_k}.$$





# Bibliografía

- [1] E.T. Bell, *Exponential numbers*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1934), 411–419.
- [2] F. Bergeron, P. Flajolet, and B. Salvy, *Varieties of increasing trees*, Lecture Notes in Computer Science **581** (1992), 24–48.
- [3] F. Bergeron, L. Leroux, and G. Labelle, *Combinatorial species and tree-like structures*, vol. 67, Encyclopedia of mathematics and applications, 1998.
- [4] Faà Di Bruno, *Note sur un nouvelle formule de calcul différentiel*, Quart. J.M. **1** (1857), 359–60.
- [5] G. Dobinski, *Summirung der reihe  $\sum n^m / n!$  für  $m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$* , Grunert's Archiv **61** (1877), 333–336.
- [6] L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 1746.
- [7] D. Foata and M. P. Schützenberger, *Téorie géométrique des polynomes eulériens*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 138, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, and New York, 1970.
- [8] J. Francon, *Arbres binaires de recherche: Propriétés combinatoires et applications*, RAIRO Informatique Théorique **10** (1976), no. 3, 35–50.
- [9] ———, *Sur le nombre le registres nécessaires à l'évaluation d'une expression arithmétique*, RAIRO Informatique Théorique **18** (1984), no. 4, 355–364.
- [10] I. Gessel, *Generating functions and enumerations of sequences*, Ph.D. thesis, M.I.T., 1977.
- [11] A. Joyal, *Une théorie combinatoire des series formelles*, Adv. Math. **42** (1981), 1–82.
- [12] J. Katriel, *Combinatorial aspects of boson algebra*, Lett Nuovo Cimento **10** (1974), 565–567.

- [13] P.S. Laplace, *Oeuvres complètes de laplace*, vol. VII. 1-2. Théorie analytique des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 14 vols., 1878-1912.
- [14] P. Leroux and G. Viennot, *Combinatorial resolution of systems of differential equations, I. ordinary differential equations*, Combinatoire Énumérative (Gilbert Labelle and Pierre Leroux, eds.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1234, Springer Berlin / Heidelberg, 1986, pp. 210–245.
- [15] P.A. MacMahon, *Combinatory analysis, 2 vols.*, Cambridge University Press, 1915-16 (reproduction Chelsea, 1960).
- [16] M. Méndez, P. Blasiak, and K. A. Penson, *Combinatorial approach to generalized bell and stirling numbers and boson normal ordering problem*, Journal of mathematical physics **46** (2005).
- [17] M. Méndez and O. Nava, *Colored species, c-monoids, and plethysm I*, J. Comb. Theory Ser. A **64** (1993), no. 1, 102–129.
- [18] M. Méndez and A. Rodríguez, *A combinatorial model for q-generalized stirling and bell numbers*, DMTS proc:AJ (2008), 557–570.
- [19] R. Mullin and G. C. Rota, *On the foundations of combinatorial theory: III. theory of binomial enumeration*, Graph Theory and its applications, Harris, Bernard. Academic Press, 1970.
- [20] Plutarch, *Moralia*, vol. IX (introduction by E.L. Minar, Jr.) Loeb Classical Library, Harvard University press, Cambridge, Massachusetts, 1961.
- [21] M. Reed and B. Simon, *Functional analysis*, Methods of modern mathematical physics, vol. I, Academic Press, London, 1980.
- [22] G-C. Rota, D. Kahaner, and A. Odlyzko, *On the foundations of combinatorial theory. VIII. finite operator calculus*, J. Math. Anal. Appl. **42** (1973), 684–760.
- [23] G. C. Rota and M. R. Steven, *The umbral calculus*, Advances in Mathematics **27** (1978), no. 2, 95–189.
- [24] E. Schröder, *Vier combinatorische probleme*, Z. für Math. Physik **15** (1870), 361–376.
- [25] R. Stanley, *Hipparchus, Plutarch, Schröder and Hough*, American Math. Monthly **104** (1997), 344–350.
- [26] J Touchard, *Sur les cycles des substitutions*, Acta Mathematica **70** (1939), no. 1, 243–297.



**Asociación Matemática Venezolana**  
Presidente: Rafael Sánchez Lamonedá

**Consejo Directivo Nacional**

Rafael Sánchez Lamonedá  
Capítulo Capital

Alexander Carrasco  
Capítulo de Centro Occidente

Oswaldo Araujo  
Capítulo de Los Andes

Said Kas-Danouche  
Capítulo de Oriente

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela.

Asociación Matemática Venezolana  
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela  
<http://amv.ivic.gob.ve>

## **Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas**

### **Consejo Directivo**

#### **Director**

Eloy Sira

#### **Subdirector**

Alberto Quintero

#### **Representantes del Ministerio del Poder Popular para la Ciencia, Tecnología e Innovación**

Guillermo Barreto

Juan Luis Cabrera

#### **Representante del Ministerio del Poder Popular para la Educación Universitaria**

Prudencio Chacón

#### **Representantes Laborales**

José Garzaro

Víctor Peña

William Espinoza (Suplente)

Sirvia Ávila (Suplente)

#### **Gerencia General**

Lira Parra

### **Comisión Editorial**

Eloy Sira (Coordinador)

Lucía Antillano

Horacio Bior

Jesús Eloy Conde

María Teresa Curcio

Rafael Gassón

Pamela Navarro

Héctor Suárez

Erika Wagner



