XX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

ECUACIONES DISPERSIVAS NO LINEALES. CASO PERIÓDICO

Felipe Linares

MÉRIDA, VENEZUELA, 2 AL 7 DE SEPTIEMBRE DE 2007

XX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

Ecuaciones dispersivas no lineales.
Caso periódico

Felipe Linares

MÉRIDA, VENEZUELA, 2 AL 7 DE SEPTIEMBRE DE 2007

XX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

Ecuaciones dispersivas no lineales. Caso periódico

Felipe Linares
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
linares@impa.br

MÉRIDA, VENEZUELA, 2 AL 7 DE SEPTIEMBRE DE 2007

XX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana. La XX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, la Corporación Andina de Fomento (CAF), el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), la Fundación TALVEN, el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Facultad de Ciencias y Departamento de Matemáticas) y el Rectorado de la Unversidad Centroccidental Lisandro Alvarado.

1991 Mathematics Subject Classification: 35Q53, (35B10, 35B65).

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Ecuaciones Dispersivas no lineales. Caso periódico
Felipe Linares

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas
Preprensa e impresión: Editorial Texto
Depósito legal lf66020076002492
ISBN 978-980-261-085-3
Caracas, Venezuela
2007

En memoria de Julieta Ramirez y Dolores (Lola) Linares

Prefacio

El objetivo de estas notas es describir brevemente las ecuaciones dispersivas no lineales. Tratamos de dar una noción global de los modelos físicos considerados y presentar algunos los problemas de ínteres y métodos que se han desarrollado recientemente en esta área de las ecuaciones diferenciales parciales.

Escogimos estudiar el caso periódico por no ser encontrado usualmente en la literatura. Parte esencial de estas notas fueron tomadas del articulo [3]. Usaremos como ejemplo el sistema acoplado de ecuaciones de Schrödinger estudiado allí para ilustrar varias ideas utilizadas al resolver el problema de valor inicial de sistemas dispersivos no lineales en el contexto periódico. Un tratamiento más detallado de las ecuaciones dispersivas no lineales puede ser encontrado en [38].

Un conocimiento de análisis real y variable compleja serían los prerequísitos para este curso, aunque las notas son autocontenidas en la medida de lo posible.

En el primer capítulo introducimos el concepto de ecuación de tipo dispersivo. En el Capítulo 2, presentamos algunas nociones básicas de la teoría de las Series de Fourier, distribuciones periódicas y espacios de Sobolev. Una descripción más detallada puede verse en los textos [15], [16], [27] y [45]. Una aplicación al problema de valor inicial es dada en el Capítulo 3. Usamos las Series de Fourier para estudiar los problemas lineales homogéneos y no homegéneos asociado a la ecuación lineal de Korteweg-de Vries. Un recuento de várias propiedades de las ecuaciones dispersivas no lineales es desarrollado en el Capítulo 4. Finalmente, en el Capítulo 5 usamos un sistema acoplado de ecuaciones no lineales de Schrödinger para aplicar las técnicas recientemente desarrolladas en el estudio de problemas de valor inicial asociados a este tipo de sistemas.

Quiero agradecer a Luiz Gustavo Farah (IMPA), Aída González Nieva

(IMPA) y Didier Pilod (IMPA-UFRJ) por haber leido cuidadosamente una versión preliminar de estas notas y por las sugerencias y correcciones hechas que sin duda dieron una mejora sustancial a la presentación final de este texto. También me gustaria agradecer a Jaime Angulo (USP) por insistir con el caso periódico y a Leonardo Mora (ULA-Venezuela) quien me invito a participar en este proyecto.

Rio de Janeiro, Julio de 2007.

Índice general

Capítulo 1

Ecuaciones Dispersivas Lineales

Para introducir la noción de dispersión consideraremos una ecuación diferencial parcial con coeficientes constantes en la forma

$$P\big(\partial_t, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}\big)u(x,t) = 0 \tag{1.1}$$

donde P es un polinomio en las derivadas parciales ∂_t, ∂_{x_1} , ∂_{x_2}, ∂_{x_3} y $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Buscamos soluciones elementales del tipo onda plana para (1.1) en la forma

$$u(x,t) = A\, e^{i(k\cdot x - \omega t)} \tag{1.2}$$

donde A es la amplitud de la onda, $k = (k_1, k_2, k_3)$ es el vector número de onda, ω es la frecuencia, $k \cdot x = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$ con A, k y ω constantes.

Cuando esta onda plana es substituida en (1.1) $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$ y $\frac{\partial}{\partial x_3}$ producen factores $-i\omega$, ik_1, ik_2 e ik_3 respectivamente, y una solución del tipo (1.2) existe si y solamente si ω y k estan relacionados por la ecuación

$$P(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3) = 0. \tag{1.3}$$

Esta ecuación es conocida como la **relación de dispersión**.

Observe que existe una correspondencia directa entre la ecuación (1.1) y la relación de dispersión (1.3) atraves de

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega, \quad \big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\big) \leftrightarrow i(k_1, k_2, k_3). \tag{1.4}$$

O sea la primera ecuación puede ser derivada de la segunda y recíprocamente usando (1.4).

Ejemplo 1.0.1. Considere las siguientes ecuaciones lineales

- Ecuación de la viga
$$v_{tt} - \gamma^2 v_{xxxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \;\; t \in \mathbb{R}.$$
- Ecuación lineal de Schrödinger
$$i\partial_t \varphi + \Delta \varphi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \;\; t \in \mathbb{R}.$$
- Ecuación lineal de Korteweg-de Vries
$$\partial_t w + \alpha \partial_x w + \beta \partial_x^3 w = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Las relaciones de dispersión para estas ecuaciones son respectivamente,

$$\omega^2 - \gamma^2 k^4 = 0,$$
$$\omega - (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = 0$$

y

$$\omega - \alpha k - \beta k^3 = 0.$$

La relación de dispersión caracteriza la evolución de la onda plana. En algunos problemas la relación de dispersión puede escribirse en forma explícita

$$\omega = W(k) = W(k_1, k_2, k_3), \tag{1.5}$$

es decir, en términos de las raíces reales de la ecuación (1.3). Hay un número de soluciones de este tipo, en general con diferentes funciones $W(k)$ llamados **modos**.

Ejemplo 1.0.2. En el caso de la ecuación de la viga la relación de dispersión tiene dos modos $\omega_+ = \gamma k^2$, $\omega_- = -\gamma k^2$.

La cantidad $\theta = k \cdot x - \omega t$ es llamada **fase**. En soluciones tipo onda plana, las superficies de fase $\theta =$ constante son planos paralelos. El gradiente de θ es el vector número de onda cuya dirección es normal a los planos y cuya magnitud κ es el número promedio de crestas por 2π unidades de distancia. Similarmente, $-\partial_t\theta$ es la frecuencia ω, el número promedio de crestas por 2π unidades de tiempo. La longitud de onda es $\lambda = 2\pi/\kappa$ y el período es $\tau = 2\pi/\omega$.

Cualquier superficie de fase se desplaza con velocidad normal ω/κ en la dirección de k. La **velocidad de fase** se define como

$$C_f(k) = \frac{\omega}{\kappa}\,\mathbf{k}, \quad \text{donde } \mathbf{k} \text{ es el vector unitario } \mathbf{k} = \kappa^{-1}k. \tag{1.6}$$

Observe que un vector número de onda diferente lleva a una velocidad de fase diferente, esto caracteriza la dispersión.

Ejemplo 1.0.3. Para las ecuaciones del Ejemplo 1.0.1 tenemos que la velocidad de fase es dada por

$$C_{f\pm}(k) = \frac{\omega_\pm}{k} = \pm\gamma k \quad \text{(ecuación de la viga)}$$

$$C_f(k) = (k_1, k_2, k_3) \quad \text{(ecuación lineal de Schrödinger)}$$

$$C_f(k) = \alpha + \beta\, k^2. \quad \text{(ecuación lineal de Korteweg-de Vries)}$$

Existe otra velocidad de propagación de ondas importante llamada **velocidad de grupo** la cual es definida por

$$C_g(k) = \nabla_k\, \omega. \tag{1.7}$$

La velocidad de grupo difiere de la velocidad de fase como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.0.4. Para las ecuaciones del Ejemplo 1.0.1 tenemos que la velocidad de grupo es dada por

$$C_{g\pm}(k) = \pm 2\gamma k \quad \text{(ecuación de la viga)}$$

$$C_g(k) = 2(k_1, k_2, k_3) \quad \text{(ecuación lineal de Schrödinger)}$$

$$C_g(k) = \alpha + 3\beta\, k^2. \quad \text{(ecuación lineal de Korteweg-de Vries)}$$

La situación física de esta diferencia entre la velocidad de fase y la velocidad de grupo es ilustrada a seguir. Un observador siguiendo una cresta de una onda particular se mueve con la velocidad local de fase pero ve que el número de onda local y la frecuencia cambian, es decir, crestas vecinas se apartan. Un observador que se mueve con la velocidad de grupo ve el mismo número de onda local y frecuencia pero las crestas se mantienen pasandolo.

En el caso unidimensional,

$$\omega = W(k), \quad C_f(k) = \frac{\omega}{k}, \quad C_g(k) = \frac{d\omega}{dk}.$$

Las soluciones (1.2) son **dispersivas** si la velocidad de grupo no es constante ($C_g(k) = \omega'(k) \neq$ constante), esto es $\omega''(k) \neq 0$. Físicamente, cuando el tiempo evoluciona, las ondas diferentes se dispersan en el medio teniendo como resultado que un perfil (single lump) se descompone en un tren de ondas.

En general, la ecuación (1.1) es **dispersiva** si $W(k)$ es real y el determinante

$$\Big|\frac{\partial^2 W(k)}{\partial_{k_i}\partial_{k_j}}\Big| \neq 0.$$

Por el principio de superposición para ecuaciones lineales, la solución general puede obtenerse de (1.2) con la relación de dispersión (1.3). Para el caso unidimensional, la solución general tiene la representación vía la integral

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\, e^{i(k\cdot x - t\omega(k))}\, dk \tag{1.8}$$

donde $F(k)$ es escogida de manera que las condiciones iniciales o de frontera sean satisfechas, siempre que los datos sean físicamente realistas para poder definir la expresión (1.8) llamada, transformada de Fourier.

Ejercicios

1. Encuentre la relación de dispersión, velocidad de fase y velocidad de grupo de las siguientes ecuaciones.

   (i) Ecuación de Boussinesq lineal

   $$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \partial_x^4 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

   (ii) Ecuación de Klein-Gordon

   $$v_{tt} - \alpha^2\, v_{xx} + \beta^2 v = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

   (iii) Ecuación de ondas

   $$\partial_t^2 w - c^2 \Delta w = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

   (iv) Ecuación lineal Zakharov-Kusnetsov

   $$\partial_t v + \partial_x\, \Delta v = 0, \quad , (x, y) \in \mathbb{R}^2, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Capítulo 2

Series de Fourier

En este capítulo estudiaremos la teoria de las series de Fourier que es una de las herramientas fundamentales para desarrollar el estudio de problemas de valores iniciales para las ecuaciones de tipo dispersivo en el caso períodico.

2.1. Definición y Propiedades

Definición 2.1.1. *Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ una función integrable. Sea L la longitud del intervalo $[a, b]$, el k-ésimo* **coeficiente de Fourier** *de f es definido por*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{L} \int_a^b f(x)\, e^{-2\pi i k x/L}\, dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

La **serie de Fourier** *de f es dada (formalmente) por*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\, e^{2\pi i k x/L}. \tag{2.2}$$

Usaremos la notación

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\, e^{2\pi i k x/L}$$

para referirnos a la serie de Fourier correspondiente a f y denotaremos la N-ésima suma parcial por

$$S_N(f) = \sum_{|k|\le N} \widehat{f}\,(k)\, e^{2\pi ikx/L}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Para simplificar la notación de ahora en adelante usaremos $[a,b] = [-\pi,\pi]$ y por lo tanto $L = 2\pi$. Entonces

$$\widehat{f}\,(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

y la serie de Fourier de f

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\,(k)\, e^{ikx}.$$

Las preguntas naturales que aparecen son:

(A) En qué sentido $S_N(f)$ converge a f cuando $N \to \infty$?

(B) Cuándo
$$S_N(f) = \sum_{|k|\le N} \widehat{f}\,(k)\, e^{2\pi kx/L}, \quad N \in \mathbb{N}?$$

Antes de responder a estas preguntas introduciremos a seguir algunas notaciones que seran útiles en el resto de estas notas.

Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, f es periódica de período 2π si $f(x+2\pi) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

La colección de todas las funciones periódicas de período 2π de clase C^k será denotada por $C^k_{\text{per}}([-\pi,\pi])$, $k = 0,1,2,\ldots$.

El espacio $C^k_{\text{per}}([-\pi,\pi])$ junto con la norma

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)}\|_\infty$$

es un espacio de Banach donde $\|\cdot\|_\infty$ es la norma del sup en la recta, esto es,

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| = \sup_{x\in J} |g(x)|$$

donde $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de longitud 2π.

Podemos identificar $C_{\text{per}}([-\pi, \pi])$ con el conjunto $\{f \in C([-\pi, \pi]) : f(-\pi) = f(\pi)\}$, de manera similar podemos identificar $C^k_{\text{per}}([-\pi, \pi])$ con el conjunto $\{f \in C^k([-\pi, \pi]) : \ f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi), \ j = 1, 2, \ldots, k\}$.

Definimos la seminorma

$$\|f\|_{L^p} = \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, dx \Big)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

El espacio $C^k_{\text{per}}([-\ell, \ell])$ con la norma L^p no es un espacio completo.

Comenzaremos con el siguiente resultado que nos dara una respuesta parcial a las preguntas (A) y (B).

Teorema 2.1.1. *Suponga que f es una función integrable en $[-\pi, \pi]$ con $\widehat{f}(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Entonces $f(x_0) = 0$ siempre que f sea contínua en el punto $x_0 \in [-\pi, \pi]$.*

Corolario 2.1.1. *Si f es continua en $[-\pi, \pi]$ y $\widehat{f}(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ entonces $f \equiv 0$.*

Corolario 2.1.2. *Suponga f continua en $[-\pi, \pi]$ y que su serie de Fourier converge absolutamente, i.e. $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < \infty$. Entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente a f, es decir,*

$$\lim_{N \to \infty} S_N(f)(x) = f(x), \quad \textit{uniformemente en } x.$$

Aquí tenemos que observar que existen funciones continuas cuyas series de Fourier son divergentes. (vea [27], [16]).

Qué condiciones en f garantizan la convergencia absoluta de la serie de Fourier? Como veremos en el próximo resultado suavidad en f implicará convergencia absoluta.

Corolario 2.1.3. *Suponga que f es dos veces continuamente diferenciable en $[-\pi, \pi]$. Entonces*

$$\widehat{f}(k) = O\big(\frac{1}{|\,k|^2}\big), \quad \textit{cuando}\, |\,k| \to \infty,$$

de manera que la serie de Fourier de f converge absoluta y uniformemente para f.

Demostración. Suponga $k \neq 0$. Integrando por partes y usando la periodicidad de f tenemos que

$$\begin{aligned} 2\pi \widehat{f}\,(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \\ &= \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-ikx}\, dx \\ &= \frac{1}{(ik)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\, e^{-ikx}\, dx \\ &= -\frac{1}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\, e^{-ikx}\, dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Por lo tanto,

$$\widehat{f}\,(k) = -\frac{1}{k^2}\widehat{f''}(k).$$

El caso $k = 0$ es un ejercicio para el lector. □

Durante la prueba del corolario anterior establecimos una de las propiedades más importantes de la transformada de Fourier, esto es,

$$\widehat{f'}\,(k) = ik\,\widehat{f}\,(k) \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

Observe que si f es diferenciable y $f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{ikx}$, entonces

$$f' \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik\, a_k\, e^{ikx}.$$

También, si f es dos veces diferenciable, entonces

$$f'' \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^2\, a_k\, e^{ikx}.$$

Definición 2.1.2. *Sean $f, g \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi])$. La* **convolución** *de f y g denotada por $f * g$ es definida por*

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y)\, dy. \tag{2.5}$$

Ejemplo 2.1.1.

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\, e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-N}^{N} \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iky} dy \Big) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \Big(\sum_{k=-N}^{N} e^{ik(x-y)} \Big)\, dy \\ &= (f * D_N)(x). \end{aligned} \tag{2.6}$$

D_N es conocido como núcleo de Dirichlet.

Proposición 2.1.1 (Propiedades de la convolución)**.** *Sean f, g funciones en $C_{\text{per}}(-\pi, \pi)$.*

i) $f * g$ *é continua*

ii) $f * g = g * f$

iii) $f * (g + h) = f * g + f * h$

iv) $f * (g * h) = (f * g) * h$

v) $\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$.

2.1.1. Convergencia Puntual

Ahora discutiremos algunos resultados que garantizan la convergencia puntual de las series de Fourier.

Teorema 2.1.2. *Sea f una función integrable en $[-\pi,\pi]$ que es diferenciable en el punto x_0. Entonces*

$$S_N(f)(x_0) \to f(x_0) \quad \textit{cuando } N \to \infty.$$

Este resultado vale si f satisface una condición de Lipschitz en x_0, esto es,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|$$

para algun $M \geq 0$ y todo x.

Todavía si f y f' fueran seccionalmente continuas vale que

$$S_N(f)(x_0) \to \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \quad \text{cuando } N \to \infty.$$

Teorema 2.1.3. *Suponga f, g integrables, periódicas de período 2π y para algun x_0 existe un intervalo abierto I conteniendo x_0 tal que*

$$f(x) = g(x) \qquad \textit{para todo } x \in I.$$

Entonces

$$S_N(f)(x_0) - S_N(g)(x_0) \to 0 \quad \textit{cuando } N \to \infty.$$

Notación.

2.1.2. Convergencia en L^p

Comenzamos recordando la definición de los espacios L^p. Para $1 \leq p < \infty$.

$$L^p([-\pi,\pi]) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ medibles tales que } \|f\|_{L^p} < \infty\}$$

y $L^\infty[-\pi,\pi])$ denota las funciones periódicas f esencialmente acotadas con norma $\|f\|_{L^\infty}$ el supremos esencial de $|f(x)|$.

En el caso particular $p = 2$,

$$\langle f|\, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx \tag{2.7}$$

define un producto interno en $L^p([-\pi,\pi])$, además

$$\|f\|_{L^2} = \langle f|\, f\rangle^{1/2}$$

Con ese producto interno $L^2([-\pi,\pi])$ es un espacio de Hilbert.

Tenemos el siguiente resultado que da condiciones necesarias y suficientes para que las series de Fourier converjan en L^p.

Lema 2.1.1. *$S_N(f)$ converge a f en la norma L^p, $1 \leq p < \infty$, si y solamente si existe c_p independiente de N tal que*

$$\|S_N(f)\|_{L^p} \leq c_p \,\|f\|_{L^p} \tag{2.8}$$

En el caso $1 \leq p < \infty$ la desigualdad (2.8) vale. El caso $p = 1$ no es verdadero.

Teorema 2.1.4. *La transformada de Fourier restringida a $L^2([-\pi,\pi])$ es una biyección entre $L^2([-\pi,\pi])$ y $\ell^2(\mathbb{Z})$. Además, vale la identidad de Parseval,*

$$\|f\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = 2\pi \|\widehat{f}\|_{\ell^2}^2, \tag{2.9}$$

o equivalentemente,

$$\langle f|\, g\rangle = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\; \overline{\widehat{g}(k)} = 2\pi\, \langle \widehat{f}\,|\, \widehat{g}\,\rangle, \quad f, g \in L^2([-\pi,\pi]). \tag{2.10}$$

2.1.3. Métodos de Sumabilidad

Otro método para recuperar la función f de sus coeficientes, es el método de sumabilidad. Los más conocidos son los métodos de sumabilidad de Cesàro y de Poisson. aqui solo describiremos el primero. El método de Poisson puede ser visto en [16],[27],[45].

El método de Cesàro usa la media aritmetica de las sumas parciales.

Más precisamente, seja

$$\begin{aligned}\sigma_N f(x) &= \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k(f)(x)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k(x-y)dy\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)F_N(x-y)\,dy,\end{aligned}$$

donde $F_N(y)$ es el nucleo de Fejer, que es dado por

$$F_N(y) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k(y).$$

Observe que $F_N(y)$ puede escribirse como

$$F_N(y) = \begin{cases} \frac{1}{N+1}\left(\frac{\operatorname{sen}(\frac{N+1}{2}y)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}y)}\right) & x \neq 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \\ N+1 & x = 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

y que satisface las siguientes propiedades

(i) $F_N(y) \geq 0$,

(ii)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(y)\,dy = 1,$$

(iii)
$$\lim_{N\to\infty} \int_{\delta<|y|<\pi} F_N(y)\,dy = 0 \quad \delta > 0.$$

Teorema 2.1.5. *Si $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, o si f es continua y $p = \infty$, entonces*

$$\lim_{N\to\infty} \|\sigma_N f - f\|_{L^p} = 0. \tag{2.11}$$

Corolario 2.1.4.

(i) Los polinomios trigonometricos son densos en L^p, $1 \leq p < \infty$.

(ii) Si f *es integrable y* $\widehat{f}(k) = 0$ *para todo* k, *entonces* f *es identicamente cero.*

2.2. Distribuciones Periódicas

El conjunto de todas las funciones periódicas $\phi : \mathbb{R} \to C$ de clase C^∞ con período 2π es denotado por $\mathcal{P} = C^\infty_{\text{per}}$. El espacio vectorial $\mathcal{P}$ no es completo en relación a las normas C^n_{per} introducidas anteriormente. Podemos todavía definir una distancia natural en $\mathcal{P}$ dada por

$$d(\phi,\psi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_\infty}{1 + \|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_\infty}, \quad \phi,\psi \in \mathcal{P}. \tag{2.12}$$

Observación 2.2.1. *La distancia* d *introduce una métrica en* $\mathcal{P}$. *Además,* $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \phi$ *si y sólo si* $\|\phi_n^{(j)} - \phi^{(j)}\|_\infty \to 0$ *cuando* $n \to \infty$ *para todo* $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.1. $(\mathcal{P}, d)$ *es un espacio métrico completo. Además, si consideramos* $\{\phi_n\} \subset \mathcal{P}$ *y* $\phi \in \mathcal{P}$, *entonces*

$$\phi_n \xrightarrow{d} \phi \quad \Leftrightarrow \quad \|\phi_n^{(j)} - \phi^{(j)}\|_\infty \to 0 \;\; \textit{para todo} \;\; j \geq 0.$$

Con relación a las series de Fourier tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2.1. *Para todo* $\varphi \in \mathcal{P}$, *la* N*-ésima suma parcial de* φ *converge a* φ *en* $\mathcal{P}$.

Definición 2.2.1. *Denotaremos por* $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ *el espacio de las sucesiones rapidamente decrecientes, esto es, el conjunto de las sucesiones complejas* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *tales que*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^j |a_k| < \infty \;\; \forall j = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.13}$$

Si $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ con la distancia

$$\tilde{d}(a,b) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|a-b\|_{\infty,j}}{1+\|a-b\|_{\infty,j}}, \quad a,b \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}). \tag{2.14}$$

con

$$\|a\|_{\infty,j} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} (|a_k||k|^j)\infty.$$

Definición 2.2.2. *Sea $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$. La transformada inversa de Fourier de a es la función*

$$\overset{\vee}{a}(x) = (\mathcal{F}^{-1})(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.15}$$

Teorema 2.2.2. *La transformada de Fourier es una aplicación biyectiva linear entre $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ y $\mathcal{P}$, esto es, un isomorfismo y un homeomorfismo.*

Definición 2.2.3. *Decimos que $\Psi : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{C}$ es una* **distribución periódica** *si*

(1) Ψ es lineal.

(2) Ψ es continua, es decir, si $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$ cuando $j \to \infty$, entonces la sucesión numerica $\Psi(\varphi_j) \to 0$ cuando $j \to \infty$.

Ejemplo 2.2.1. *Es fácil ver que $f \in C_{\text{per}}$ define una distribución periódica Ψ_f por la fórmula*

$$\langle \Psi_f, \varphi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{P}. \tag{2.16}$$

Ejemplo 2.2.2. *Un ejemplo de una distribución que no proviene de la formula* (2.16) *es la conocida delta de Dirac δ_x definida por*

$$\langle \delta_x, \varphi\rangle = \varphi(x), \quad \varphi \in \mathcal{P}. \tag{2.17}$$

Definición 2.2.4. *Decimos que la sucesión $\{\Psi_j\} \subset \mathcal{P}'$ converge a Ψ en $\mathcal{P}'$ si*

$$\langle \Psi_j, \varphi\rangle \to \langle \Psi, \varphi\rangle \ \text{cuando j} \to \infty\ \forall\varphi \in \mathcal{P}.$$

La operación de diferenciación en las distribuciones es definida de tal manera que ellas sean infinitamente diferenciables.

Definición 2.2.5. *Sea $f \in \mathcal{P}'$. Su derivada distribucional $f' \in \mathcal{P}'$ es definida por la relación*

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle, \ \ \varphi \in \mathcal{P}.$$

2.2.1. Series de Fourier en $\mathcal{P}'$

Definición 2.2.6. *La transformada de Fourier de $f \in \mathcal{P}'$ es la función $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathcal{C}$ defnida por la formula*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\langle f, e^{-ik\,x}\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.18}$$

La N-ésima suma parcial de la serie de Fourier asociada a f es dada por

$$S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Note que $S_N(f)$ se entiende como distribución en el sentido de la formula (2.16).

Teorema 2.2.3. *Sea $f \in \mathcal{P}'$. Entonces $S_N(f) \in \mathcal{P}$ para todo $N \in \mathbb{N}$ y $S_N(f) \stackrel{\mathcal{P}'}{\to} f$.*

Corolario 2.2.2. *Sea $\varphi \in \mathcal{P}$ y $f \in \mathcal{P}'$. Entonces,*

$$\langle f, \varphi\rangle = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k). \tag{2.19}$$

Definición 2.2.7. *La sucesión de números complejos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se dice de crecimiento lento si existe $c > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|a_k| \leq c|k|^N \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

El conjunto de todas las sucesiones de crecimiento lento es denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$.

Teorema 2.2.4. *Sea $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$. Entonces existe una única $f \in \mathcal{P}'$ tal que $\widehat{f} = a$. Recíprocamente, si $f \in \mathcal{P}'$ entonces $\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$.*

2.3. Espacios de Sobolev

En esta sección introducimos los espacios de Sobolev periódicos.

Definición 2.3.1. *Sea $s \in \mathbb{R}$, el espacio de Sobolev denotado por $H^s_{\text{per}} = H^s_{\text{per}}([-\pi,\pi])$ es el conjunto de todos los elementos $f \in \mathcal{P}'$ tal que*

$$\|f\|_s^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty. \tag{2.20}$$

En el siguiente teorema resumiremos algunas propiedades de los espacios de Sobolev.

Teorema 2.3.1. *(i) Para todo $s \in \mathbb{R}$, H^s_{per} es un espacio de Hilbert con relación al producto interno*

$$(f|g)_s = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}. \tag{2.21}$$

(ii) Sean $r, s \in \mathbb{R}$, $s \geq r$. Entonces H^s_{per} está continua y densamente inmerso en H^r_{per} y

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s, \ \ \textit{para todo } f \in H^s_{\text{per}}. \tag{2.22}$$

(iii) $(H^s_{\text{per}})'$ el dual topológico de H^s_{per} es isométricamente isomorfo a H^{-s}_{per} para todo $s \in \mathbb{R}$. La dualidad es realizada via el par

$$\langle f, g\rangle = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^s \widehat{f}(k)\,\widehat{g}(k),\ f \in H^s_{\text{per}},\ g \in H^{-s}_{\text{per}}. \tag{2.23}$$

Teorema 2.3.2. *Si k es un entero positivo, entonces $f \in H^k_{\text{per}}$ coincide con el espacio de funciones $f \in L^2_{\text{per}}$ cuyas derivadas (en el sentido de $\mathcal{P}'$), $f^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$, pertenecen a L^2_{per}. En este caso las normas $\|f\|_k$ y $\sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)}\|$ son equivalentes.*

El siguiente resultado conocido como el Lema de Sobolev nos permite relacionar "derivadas débiles" con derivadas en el sentido clásico.

Teorema 2.3.3. *Si $s > \frac{1}{2}$, entonces H^s_{per} está continua y densamente inmerso en C_{per} y*

$$\|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{\ell^1} \leq c\|f\|_s, \quad f \in H^s_{\text{per}} \tag{2.24}$$

Demostración. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la hipótesis $s > 1/2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(1+|k|^2)^{s/2}|\widehat{f}(k)|}{(1+|k|^2)^{s/2}} \\
&\leq \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|k|^2)^s}\Big)^{1/2} \qquad (2.25) \\
&= \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|k|^2)^s}\Big)^{1/2} \|f\|_s < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1$ y así

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\, e^{ikx}$$

converge absolutamente y uniformemente en $[-\pi, \pi]$. Por lo tanto $g \in C_{\text{per}}$. Ahora probaremos que f y g coinciden como distribuciones. Usando el Corolario 2.2.2 y la convergencia uniforme de la serie, tenemos

$$\begin{aligned}
\langle g, \varphi \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\varphi(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\, e^{ikx}\Big)\varphi(x)\, dx \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{ikx}\, dx = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k) \qquad (2.26) \\
&= \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{P},
\end{aligned}$$

así que $f = g$ en el sentido de las distribuciones. La desigualdad (2.24) sigue de la desigualdad (2.25) ya que

$$|f(x)| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| \leq \Big(\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|k|^2)^s}\Big)^{1/2} \|f\|_s \quad \forall x \in [-\pi, \pi]. \tag{2.27}$$

□

La siguiente definición será utíl para probar que H^s_{per} es un álgebra de Banach para $s > 1/2$.

Definición 2.3.2. *Sean $a = \{a_k\}$ y $b = \{b_k\}$ sucesiones de números complejos. La convolución de a y b, $a * b$ se define como la sucesión*

$$(a * b)_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\, b_{k-j} \tag{2.28}$$

siempre que el lado derecho de la igualdad tenga sentido.

Proposición 2.3.1. *Sea $a = \{a_k\} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y $b \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Entonces $a * b \in \ell^2(\mathbb{Z})$ y*

$$\|a * b\|_{\ell^2} \le \|a\|_{\ell^1} \|b\|_{\ell^2}. \tag{2.29}$$

Teorema 2.3.4. *Si $s > \frac{1}{2}$, el espacio H^s_{per} es un algebra de Banach con respecto al producto de funciones. Esto es, si $f, g \in H^s_{\text{per}}$, entonces $fg \in H^s_{\text{per}}$ y vale*

$$\|fg\|_s \le c_s\, \|f\|_s \|g\|_s. \tag{2.30}$$

Ejercicios

1. Pruebe el Teorema 2.1.1 y Corolarios 2.1.1y 2.1.2.

2. Suponga que f es integrable en $[-\pi, \pi]$ pruebe que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - S_N(f)(x) \right|^2 dx \to 0 \quad \text{cuando } N \to \infty.$$

   y

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|^2_{L^2}. \tag{2.31}$$

3. (Riemann-Lebesgue) Si f es integrable en $[-\pi, \pi]$, pruebe $\widehat{f}(k) \to 0$ cuando $|k| \to \infty$.

4. (Criterio de Dini) Si para algun x existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{|t|<\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \infty.$$

Pruebe que

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = f(x).$$

5. Pruebe que el espacio $C^k_{\text{per}}([-L,L])$ con la norma L^p no es un espacio completo.
6. Pruebe la Proposición 2.1.1.
7. Pruebe el Lema 2.1.1.
8. Pruebe el Teorema 2.1.5.
9. Pruebe el Corolario 2.1.4.
10. Muestre que $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ si y sólo si

$$\|a\|_{\infty,j} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} (|a_k||k|^j).$$

11. Pruebe el Teorema 2.3.1.
12. Pruebe el Teorema 2.3.2.
13. Pruebe la Proposición 2.3.1.
14. Pruebe el Teorema 2.3.4.

Capítulo 3

Problemas de Valor Inicial para las Ecuaciones Dispersivas Lineales

Consideraremos una ecuación diferential parcial con coeficientes constantes de tipo dispersivo y estudiaremos la evolución de la solución cuando un dato inicial sea dado, esto es,

$$\begin{cases} P(\partial_t, \partial_x)u = 0, & x \in \mathbb{R}\ (x \in \mathbb{T}),\ t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \phi(x). \end{cases} \tag{3.1}$$

Este problema es llamado **problema de valores iniciales** o **problema de Cauchy**. Estamos interesados en demostrar la existencia de soluciones para el problema (3.1). Una vez esto sea establecido la pregunta natural que aparece es si la solución encontrada es única, nos referimos a este punto como unicidad de la solución. En general los modelos considerados en (3.1) provienen de modelos físicos, como la teoría de ondas de agua, optica, propagación de ondas en física del plasma, etc. Entonces tenemos que estudiar lo que ocurre cuando hay cambios en los datos iniciales y el efecto que se produce en las soluciones correspondientes. Lo ideal sería que pequeños cambios en el dato inicial la solución correspondiente no sufra grandes cambios. Esos tres aspectos sobre soluciones del problema (3.1) pueden resumirse en la siguiente definición.

Definición 3.0.3. *Si existe $T > 0$ para el cual la existencia, unicidad* *y continua dependencia de los datos iniciales, esto es, sea* $\{\phi_n\}$ *una sucesión de funciones en el espacio funcional* $\mathbb{X}$ *y* $\phi \in \mathbb{X}$ *tal que* $\phi_n \xrightarrow{\mathbb{X}} \phi$*, entonces las soluciones* u_n *del problema* (3.1) *con dato inicial* ϕ_n *satisfazen* $u_n(t) \xrightarrow{\mathbb{X}} u(t)$*, donde* u *es la solución con dato inicial* ϕ*, sea garantizado para el problema* (3.1)*, diremos que el problema de valor inicial está* **bien planteado**. *Si* T *es finito diremos que el problema* (3.1) *está* **localmente bien planteado**. *Caso contrario diremos que está* **globalmente bien planteado**.

3.1. Problema Lineal Homogéneo

Comenzaremos definiendo el dominio del operador tres derivadas.

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(D_x^3) &= \{f \in L^2([-\pi,\pi]) : \ f^{(3)} \in L^2([-\pi,\pi])\} \\ &= \{f \in L^2([-\pi,\pi]) : \ \{ik^3\widehat{f}(k)\} \in \ell^2(\mathbb{Z})\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$D_x^3 f = i\frac{d^3}{dx^3}f, \quad f \in \mathrm{Dom}(D_x^3) \tag{3.3}$$

Usando la identidad de Parseval podemos definir el siguiente operdor de multiplicación,

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(M_S) &= \{\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z}) : \{e^{ik^3t}\widehat{f}(k)\} \in \ell^2(\mathbb{Z})\} \\ (M_S\alpha)_k &= e^{ik^3t}\,\alpha_k, \quad k \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \mathrm{Dom}(M_S) \\ &= F_t(D_x^3)f \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde $F_t(k) = e^{tk}$.

Para $f \in \mathrm{Dom}(D_x^3)$ definimos el operador

$$S(t)f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ik^3t}e^{ikx}. \tag{3.5}$$

A continuación estudiaremos el problema de valor inicial asociado a la ecuación linealizada KdV, esto es,

$$\begin{cases} u(\cdot,t) \in C^3_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi]), \ \ t \geq 0 \\ \partial_t u + \partial_x^3 u = 0, \quad \text{em } ([-\pi,\pi] \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in ([-\pi,\pi]. \end{cases} \tag{3.6}$$

Usando transformada de Fourier obtenemos que

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(k,t) + (ik)^3 \widehat{u}(k,t) = 0, \\ \widehat{u}(k,0) = \widehat{f}(k), \end{cases} \tag{3.7}$$

o

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \widehat{u}(k,t) - ik^3 \widehat{u}(k,t) = 0, \\ \widehat{u}(k,0) = \widehat{f}(k), \end{cases} \tag{3.8}$$

cuya solución para cada k y $t > 0$ es dada por

$$\widehat{u}(k,t) = \widehat{f}(k)\, e^{ik^3 t}.$$

Luego una solución formal para el problema (2.10) es dada por

$$u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\, e^{ik^3 t} e^{ikx}. \tag{3.9}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik^3 \widehat{f}(k)\, e^{ik^3 t} e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} -(ik)^3 \widehat{f}(k)\, e^{ik^3 t} e^{ikx} \\ &= -\partial_x^3 u(x,t) \end{aligned} \tag{3.10}$$

esto es,

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = 0.$$

Además,

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\, e^{ikx}$$

pues $f \in C^3_{\text{per}}([-\pi,\pi])$. Nuestro objetivo ahora es reinterpretar el problema de valores iniciales (3.6) como un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial ordinaria en el espacio de Hilbert $L^2([-\pi,\pi])$. Sean entonces $v(t) = u(\cdot,t) = S(t)f$ y $w(t) = \partial_t u(\cdot,t)$. Observe que

$v(t) \in L^2([-\pi,\pi])$. De hecho, usando la identidad de Parseval (2.9), tenemos que

$$\begin{aligned}\|v(t)\|_{L^2}^2 = \|S(t)f\|_{L^2}^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)\, e^{ik^3t}|^2\\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

y por lo tanto $v : [0,\infty) \mapsto L^2([-\pi,\pi])$.

Por otro lado,

$$f \in C^3_{\text{per}}([-\pi,\pi]) \subseteq \text{Dom}(D_x^3)$$

y $w(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} ik^3 \widehat{f}(k)\, e^{ik^3t} e^{ikx}$ converge en $L^2([-\pi,\pi])$ en $t=0$ y por lo tanto $w : [0,\infty) \mapsto L^2([-\pi,\pi])$. Deseamos demostrar que

$$\lim_{h\to\infty} \Big\| \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - w(t) \Big\|_{L^2} = 0. \tag{3.11}$$

Definición 3.1.1. *Si J es un intervalo y $\psi : J \mapsto L^2([-\pi,\pi])$ es una función, decimos que ψ es diferenciable en $t_0 \in J$ en el sentido de $L^2([-\pi,\pi])$ si existe el límite*

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in J}} \frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0} = \frac{d\psi}{dt}(t_0)$$

en la norma $L^2([-\pi,\pi])$.

Usando la identidad de Parseval (2.31) obtenemos

$$\begin{aligned}\Big\| \frac{v(t+h)-v(t)}{h} &- w(t) \Big\|_{L^2}^2\\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big| e^{ik^3t} \widehat{f}(k) \Big\{ \frac{e^{ik^3h}-1}{h} - ik^3 \Big\} \Big|^2\\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big| \widehat{f}(k) \Big(\frac{ik^3}{h} \int_0^h e^{ik^3\tau} d\tau - ik^3 \Big) \Big|^2\\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k) k^3|^2 \Big| \frac{1}{h} \int_0^h (e^{ik^3\tau}-1)\, d\tau \Big|^2.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Como $f \in \mathrm{Dom}(D_x^3)$ para cada $t \geq 0$ y $\epsilon > 0$ podemos escoger $N_\epsilon \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$2\pi \sum_{|k|>N_\epsilon} |\widehat{f}(k)k^3|^2 < \frac{\epsilon^2}{2} \tag{3.13}$$

y $\delta > 0$ tal que si $\delta < t/2$ para $t > 0$ y $|h| < \delta$

$$2\pi\Big(\sum_{|k|\leq N} |\widehat{f}(k)k^3|^2\Big) \max_{|k|<N} \Big|\frac{1}{h}\int_0^h (e^{ik^3\tau} - 1)\, d\tau\Big|^2 \leq \frac{\epsilon^2}{2}. \tag{3.14}$$

Combinando (3.12), (3.13) y (3.14) tenemos que

$$\Big\|\frac{v(t+h) - v(t)}{h} - w(t)\Big\|_{L^2} < \epsilon. \tag{3.15}$$

es decir v es diferenciable con derivada $\frac{dv}{dt}$ en el sentido de $L^2([-\pi,\pi])$ para todo $t \in [0,\infty)$. Por otro lado, de la expansión em series para $w(t)$ vemos que

$$\begin{aligned} w(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik^3(\widehat{S(t)f})(k)\, e^{ikx} \\ &= -\sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^3\widehat{v(t)}(k)\, e^{ikx} \\ &= iD_x^3 v(t). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Resumiendo hemos resuelto el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} v(t) \in \mathrm{Dom}(D_x^3), \text{ para todo}\, t \geq 0 \\ \dfrac{dv}{dt} = iD_x^3 v \\ v(0) = f \in \mathrm{Dom}(D_x^3) \end{cases} \tag{3.17}$$

Como $f \in C^3_{\text{per}}([-\pi,\pi])$ implica que $f \in \mathrm{Dom}(D_x^3)$ sigue que dada $f \in \mathrm{Dom}(D_x^3)$ una función

$$v(t) = S(t)f (:= e^{it\partial_x^3} f), \quad t \geq 0 \tag{3.18}$$

es solución de (3.17). Además el problema (3.17) está bien planteado en $L^2([-\pi,\pi])$. De hecho, tenemos el resultado siguinte.

Teorema 3.1.1. *El problema* (3.17) *está bien planteado en* $L^2([-\pi,\pi])$*, esto es, para cada* $f \in \mathrm{Dom}(D_x^3)$*, existe una única solución* v *de* (3.17)*, además, la solución depende continuamente del dato inicial en el sentido* L^2*, i.e. si* $\{f_n\} \subseteq \mathrm{Dom}(D_x^3)$ *y* $f_n \overset{L^2}{\to} f$*, entonces* $v_n(t) \overset{L^2}{\to} v(t)$ *para todo* $t \geq 0$*, donde* $v_n(t)$ *es la solución de* (3.17) *con condición inicial* f_n*.*

Demostración. Como observamos antes la función (3.18) es solución de (3.17). Veamos primero que la dependencia continua de los datos iniciales se satisface. Usando la identidad de Parseval obtenemos

$$\begin{aligned} \|v_n(t) - v(t)\|_{L^2}^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |e^{ik^3t}(\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k))|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)|^2 \\ &= \|f_n - f\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Por lo tanto si $f_n \overset{L^2}{\to} f$ entonces $v_n(t) \overset{L^2}{\to} v(t)$. Para finalizar probaremos la unicidad. Suponga que $u : [0,\infty) \mapsto L^2([-\pi,\pi])$ es solución de (3.17) entonces aplicando la transformada de Fourier tenemos que

$$\begin{cases} \widehat{u} \in \mathrm{Dom}(M_S), \quad \text{para todo } t \geq 0, \\ \dfrac{d}{dt}\widehat{u}(k,t) = ik^3\widehat{u}(k,t), \quad \text{para todo } t \geq 0, \\ \widehat{u}(k,0) = \widehat{f}(k) \end{cases} \tag{3.20}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Pero para cada $k \in \mathbb{Z}$ el problema (3.20) tiene una única solución, a saber,

$$\widehat{u}(k,t) = \widehat{f}(k)e^{ik^3t} = \widehat{v}(k,t), \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{3.21}$$

Por la unicidad de la transformada de Fourier, $u \equiv v$. □

3.2. Problema Lineal no Homogéneo

En esta sección usaremos la teoría desarrollada para estudiar el problema (3.6) en el siguiente caso llamado problema lineal no homogéneo

$$\begin{cases} u(\cdot,t) \in C^3_{\text{per}}([-\pi,\pi]), \quad t \geq 0 \\ \partial_t u + \partial_x^3 u = F(x,t), \quad \text{ en } [-\pi,\pi]\times(0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in [-\pi,\pi] \end{cases} \tag{3.22}$$

donde F es una función en $C([-\pi,\pi],[0,\infty))$.

Como en el caso lineal el problema sera reduzido a estudiar la ecuación diferencial ordinaria en espacios Hilbert

$$\begin{cases} v(t) \in \text{Dom}(D_x^3), \text{ para todo}\, t \geq 0, \\ \dfrac{dv}{dt} = iD_x^3 v + \tilde{F}(x,t), \\ v(0) = f \in \text{Dom}(D_x^3). \end{cases} \tag{3.23}$$

Teorema 3.2.1. *El problema* (3.23) *está bien planteado en* $L^2([-\pi,\pi])$*, esto es, para cada* $f \in \text{Dom}(D_x^3)$*, y* $\tilde{F} \in C([-\pi,\pi],[0,\infty))$ *existe una única solución* v *de* (3.23)*, además, la solución depende continuamente del dato inicial en el sentido* L^2*, es decir, si* $\{f_n\} \subseteq \text{Dom}(D_x^3)$ *y* $f_n \overset{L^2}{\to} f$*, entonces* $v_n(t) \overset{L^2}{\to} v(t)$ *para todo* $t \geq 0$*, donde* $v_n(t)$ *es la solución de* (3.23) *con condición inicial* f_n*.*

La prueba de este resultado se dejara como ejercicio. El nuevo elemento en la prueba es la fórmula de variación de parámetros o fórmula de Duhamel, esto es, soluciones del problema (3.23) se pueden representar formalmente por la fórmula

$$v(x,t) = S(t)f + \int_0^t S(t-t')F(x,t')\,dt'. \tag{3.24}$$

Ejercicios

1. Pruebe que la solucion $u(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u = F(x,t), \quad x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.25}$$

con $F \in C(\mathbb{R} : \mathcal{P})$, es dada por la fórmula

$$u(x,t) = S(t)f + \int_0^t S(t-t')F(x,t')\,dt' \tag{3.26}$$

donde $S(t)$ fue definido en (3.5).

2. Pruebe el Teorema 3.2.1.

3. Una familia de operadores $\{T_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ definido en un espacio de Hilbert H es llamado un *grupo unitario de operadores* si

   (i) Para todo $t \in \mathbb{R}$, $T_t : H \mapsto H$ es una isometria; lo que implica que
   $$\|T_t f\|_H = \|f\|_H.$$

   (ii) $T_t\,T_{t'} = T_{t+t'}$ con $T_t^{-1} = T_{-t}$.

   (iii) $T_0 = 1$.

   (iv) Fijando $f \in H$, la función $\Phi_f : \mathbb{R} \mapsto H$ definida por $\Phi_f(t) = T_t f$ es una función continua, es decir, describe una curva en H.

   Pruebe que $\{S(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ es un grupo unitario de operadores en H^s_{per}.

4. Use los ejercicios 3.1 y 3.3 para probar que el problema (3.25) está bien colocado para datos en H^s_{per}.

Capítulo 4

Ecuaciones Dispersivas No Lineales

En este capítulo haremos una breve introducción a los modelos dispersivos no lineales usando como ejemplos ecuaciones provenientes de la teoría de ondas de agua. Luego describiremos algunas propiedades intrínsecas en los modelos dispersivos y finalmente discutiremos sobre soluciones de tipo ondas viajeras y cantidades conservadas.

El primer ejemplo es la ecuación de Korteweg-de Vries,

$$v_t + v_{xxx} + vv_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \ \ t \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

donde v es una función real. Esta ecuación modela la propagación de ondas en un canal de aguas rasas. La situación física es la siguiente: se considera un cuerpo de agua de profundidad finita bajo la influencia de la gravedad, acotada inferiormente por una superficie impermeable. Ignorando los efectos de viscosidad y suponiendo que el fluido es incompresible e irrotacional, el movimiento es gobernado por las ecuaciones de Euler con condiciones convenientes de frontera en la superficie rígida y sobre la interface agua-aire. La función v representa la superficie libre. Está ecuación fue deducida por Korteweg y de Vries [36].

La ecuación de Schrödinger cúbica es la ecuación diferencial parcial

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \ \ t \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

donde u es una función compleja. Este modelo aparece en várias situaciones físicas, como óptica, plasma física y ondas de agua. En este último contexto, u representa la amplitud del paquete de ondas que se propaga en una dirección sobre un canal o sobre el oceano.

El tercer ejemplo es la ecuación de Benjamin-Ono, esto es,

$$w_t + Hw_{xx} + ww_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \; t \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

donde H denota la transformada de Hilbert y w es una función real. Esta ecuación aparece en el modelaje de fluidos estratificados y fue deducida por Benjamin [5] y Ono [42]. La función w representa la interface de dos fluidos con densidades ρ_1 y ρ_2, respectivamente. El primero esta limitado superiormente por una superficie fija con profundidad finita, el segundo fluido tiene profundidad infinita.

4.1. Propiedades

Consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} i\partial_t\omega - \phi(-i\nabla)\omega = F(w), & x \in \mathbb{R}^n, \; t \in \mathbb{R} \\ \omega(x,0) = \omega_0(x) \in X. \end{cases} \tag{4.4}$$

donde ϕ es una función real medible y F una función no lineal de ω y posiblemente sus derivadas.

En general, la no linealidad produce algunas obstrucciones como la pérdida de derivadas para aplicar la teoría clásica desarrollada para estudiar el problema de valor inicial, como estimaciones de energía, regularización parabólica, teoría cuasi-lineal de Kato, etc.

Aunque estos métodos clásicos en algunas situaciones producen resultados de buena colocación local los espacios donde son obtenidos estos resultados se realizan exigen mucha regularidad que no nos permite usar las llamadas leyes o cantidades conservadas (sección 4.2.2 abajo). Estas cantidades son importantes para establecer estimaciones “a priori” pero en general se satisfacen en espacios con poca regularidad (L^2, H^1, $\dots$).

Para resolver el problema (4.4), en lugar de considerar el sistema de ecuaciones diferenciales parciales el procedimiento padron es estudiar la ecuación integral equivalente. Siguiendo el argumento usado en el capítulo anterior para estudiar la ecuacion lineal de Korteweg-de Vries no homogénea, es decir, usando la fórmula de Duhamel nosotros podemos escribir la solución de (4.4) como,

$$\omega(x,t) = W(t)\omega_0 + \int_0^t W(t-t')\, F(\omega(t'))\, dt' \tag{4.5}$$

donde $\{W(t)\}$ es el grupo unitario asociado al problema lineal.

En lo que sigue describiremos dos métodos que han sido desarrollados recientemente y que han sido aplicados para obtener resultados óptimos relacionados a la teoría local y global de buena colocación para sistemas del tipo (4.4). Los distinguiremos como método de las estimaciones lineales y el método de las estimaciones no lineales.

4.1.1. Estimaciones Lineales

El método consiste en estudiar y explotar el caracter dispersivo de soluciones del problema lineal asociado. Técnicas propias del Análisis Armónico son usadas para esto.

Consideramos el problema lineal

$$\begin{cases} i\partial_t\omega - \phi(-i\nabla)\omega = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R} \\ \omega(x,0) = \omega_0(x) \in X \end{cases} \tag{4.6}$$

cuya solución es dada por

$$\omega(t) = W(t)\omega_0 = \left(e^{it\phi(\xi)}\widehat{\omega}_0(\xi)\right)^{\vee}.$$

El primer tipo de regularidad que obtenemos para las soluciones de (4.6) proviene de las llamadas **estimaciones de Strichartz** o estimaciones $L^p - L^q$. En el caso particular de la ecuación de Schrödinger fue establecida la siguiente desigualdad por Strichartz [46],

$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |e^{it\Delta} f(x,t)|^{2(n+2)/n}\, dxdt\Big)^{n/2(n+2)} \leq c\|f\|_{L^2}.$$

Lo cual implica que localmente en el tiempo la solución está en un espacio más regular que el espacio del dato inicial. Generalizaciones de este tipo de estimaciones han sido desarrolladas por varios autores como Ginibre y Velo ([20], [21]) y Kenig, Ponce y Vega [34], entre otros. Establecer versiones óptimas de este tipo de estimaciones sigue siendo parte activa de investigación en el área.

El segundo grupo de estimaciones son los llamados **efectos regularizantes de tipo Kato**. Como ejemplo tenemos la observación realizada por T. Kato [30] (vea también Kruzhkov y Faminskii [37]). En su estudio de la buena colocación del problema de valor inicial asociada a la ecuación de Korteweg-de Vries, Kato demostro que las soluciones satisfacen

$$\Big(\int_{-T}^{T}\int_{-R}^{R} |\partial_x v(x,t)|^2\,dxdt\Big)^{1/2} \le C(T,R)\,\|v_0\|_{L^2}.$$

Esta desigualdad dice que localmente la solución de la ecuación KdV es mas suave (una derivada) que su dato inicial. Esta propiedad es intrínsica en las ecuaciones dispersivas y es fundamental para resolver el problema de pérdida de derivadas en una ecuación no lineal. Extensiones de este resultado fueron obtenidas por Constantin y Saut [11], Vega [49] y Sjölin [44].

En particular, si $\phi(\xi) \sim |\xi|^{\alpha}$ se tiene que

$$\Big(\int_{-T}^{T}\int_{|x|\le R} |(-\Delta)^{(\alpha-1)/4}\omega(x,t)|^2\,dxdt\Big)^{1/2} \le C(T,R)\,\|\omega_0\|_{L^2}.$$

Resultados óptimos de este tipo de efectos fueron obtenidos por Kenig, Ponce y Vega [34] para soluciones de problemas lineales homogéneos y no homogéneos.

Para completar el grupo de estimaciones para establecer la existencia de soluciones para la ecuación integral (4.5) necesitamos estimaciones para las **funciones maximales** asociadas a la solución del problema lineal. Más precisamente, estimaciones del tipo

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{[-T,T]} |\omega(x,t)|^p\,dx\Big)^{p/2} \le C(T)\,\|\omega_0\|_{H^s}.$$

Este tipo de estimaciones son tema de investigación en Análisis Armónico independiente del estudio de las ecuaciones diferenciales parciales.

Para ecuaciones de tipo dispersivo resultados importantes han sido establecidos por Kenig y Ruiz [35] y Kenig, Ponce y Vega [33] entre otros.

Una vez que este tipo de estimaciones han sido conseguidas se considera la forma integral equivalente del problema de valores iniciales (4.5) y se le asocia un operador, digamos,

$$\Phi(\omega(t)) = W(t)\omega_0 + \int_0^t W(t-t')F(\omega)(t')\,dt'. \tag{4.7}$$

y se procede a mostrar la existencia de solución para esta ecuación integral vía el principio de contracción en un espacio determinado por las estimaciones anteriores junto con el espacio natural para estudiar las ecuaciones dispersivas, los espacios de Sobolev.

4.1.2. Estimaciones No Lineales

En 1993 Bourgain [7] introdujo el siguiente espacio para estudiar las ecuaciones NLS y KdV,

$$\|f\|_{X_{s,b}} = \Big(\iint \langle\xi\rangle^{2s}\langle\tau+\phi(\xi)\rangle^{2b}\big|\widehat{f}(\xi,\tau)\big|^2 d\tau d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}$$

donde $\langle\cdot\rangle = 1 + |\cdot|$. Estos espacios son conocidos en la literatura como **espacios de Restricción de la Transformada de Fourier** o espacios de Bourgain.

Note que

$$\|f\|_{X_{s,b}} = \|W(-t)f\|_{H_t^b(\mathbb{R},H_x^s)}. \tag{4.8}$$

Debido a la definición de los espacios $X_{s,b}$ tenemos que considerar la ecuación integral (4.5) cortada por una función suave $\psi(t)$ con soporte compacto. Digamos, $\psi(t) \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\psi \equiv 1$ para $|t| \leq 1$ y $\psi(t) \equiv 0$ para $|t| > 2$. Definiendo $\psi_T(t) = \psi(t/T)$, para $T > 0$, queda entonces la ecuación integral,

$$\omega(t) = \psi_T\, W(t)\omega_0 + \psi_T \int_0^t W(t-t')F(\omega)(t')\,dt'.$$

El argumento de prueba es similar al caso lineal y debido a (4.8) solo necesitamos estimar la parte no lineal. En este paso aparece la desigualdad

$$\|\psi_T \int_0^t W(t-t')F(\omega)(t')\,dt'\|_{X_{s,b}} \leq cT^{\theta(b)}\,\|F(\omega)\|_{X_{s,b-1}}.$$

El problema se reduce a obtener estimaciones del tipo

$$\|F(\omega)\|_{X_{s,b-1}} \leq cT^{\alpha(b,b')}\|\omega\|^p_{X_{s,b}}. \tag{4.9}$$

Para establecer esta última desigualdad es importante que el símbolo posea una cierta simetría, como veremos en el próximo capítulo.

Una herramienta muy útil para tratar de demostrar una desigualdad del tipo (4.9) es la llamada **Estimación Bilineal**.

Kenig, Ponce y Vega [31] para la ecuación KdV obtuvieron una estimación del tipo anterior, es decir,

$$\|\partial_x(v^2)\|_{X_{s,b-1}} \leq cT^{\alpha(b,b')}\|v\|^2_{X_{s,b}}$$

vía la forma bilineal

$$B(f,f,s,b) = \langle\xi\rangle^s\langle\tau-\phi(\xi)\rangle^{1-b}|\xi|\times$$
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\xi_1,\tau_1)f(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)\,d\tau_1 d\xi_1}{\langle\xi_1\rangle^s(\langle\tau_1-\phi(\xi_1)\rangle^b\langle\xi-\xi_1\rangle^s\langle(\tau-\tau_1)-\phi(\xi-\xi_1)\rangle^b}\,d\tau_1 d\xi_1.$$

No siempre es posible apenas usar los espacios de Bourgain y las estimaciones bilineales para establecer buena colocación local. El uso de las estimaciones de Strichartz y los efectos regularizantes también entran en juego cuando no es suficiente usar las herramientas anteriores.

La gran diferencia entre este caso que estamos describiendo y el caso periódico es que en el segundo los efectos regularizantes no estan a disposición y también es difícil establecer en varias situaciones estimaciones de Strichartz. Sin embargo, los espacios introducidos por Bourgain en su versión periódica son útiles para el estudio del problema de valor inicial en el caso periódico.

4.2. Ondas Viajeras

Una propiedad muy interesante de las ecuaciones dispersivas no lineales es la de poseer soluciones especiales del tipo $u(x,t)=\phi(x-ct)$ (en el caso unidimensional), donde c es la velocidad de propagación de la "onda". Estas soluciones son llamadas ondas viajeras o ondas solitarias. La existencia de este tipo de soluciones mide de alguna manera el balance entre la no linealidad y la dispersión de la ecuación considerada. A continuación demostraremos la existencia de ondas estacionarias para la ecuación KdV.

Antes de hacer esto observamos que en la teoría de sistemas integrables ("inverse scattering") este tipo de soluciones son llamados de "solitons" cuando la ecuación correspondiente es "completamente integrable", el cual es el caso de la ecuación KdV. Para el lector interesado en este tópico referimos a [1]. Aunque este tópico esta fuera del objetivo de las notas en la última sección de este capítulo comentaremos sobre una propiedad que caracteriza a los sistemas completamente integrables.

Consideramos la ecuación KdV en su forma originalmente deduzida (un cambio de variables transforma esta en la forma dada en (4.1)), es decir,

$$v_t + c_0 v_x + \sigma v_{xxx} + \frac{3c_0}{2h_0} v v_x = 0, \tag{4.10}$$

y buscamos por soluciones de la forma

$$v(x,t) = h_0\, \phi(X), \qquad X = x - ct, \tag{4.11}$$

para alguna función ϕ y una velocidad de onda c constante. Determinaremos ϕ y c substituyendo (4.11) en la ecuación (4.10) y usando que $\sigma = \frac{1}{6} c_0 h_0^2$ obtendremos

$$\frac{1}{6} h_0^2 \phi'' + \frac{3}{4c_0}\phi^2 + \big(1 - \frac{c}{c_0}\big)\phi + B = 0 \tag{4.12}$$

donde B es una constante de integración. Multiplicando esta última ecuación por ϕ' y integrando una vez mas tenemos que

$$\frac{1}{3} h_0^2 (\phi')^2 + \frac{1}{c_0}\phi^3 + 2\big(1 - \frac{c}{c_0}\big)\phi^2 + 4B\phi + D = 0 \tag{4.13}$$

donde D es una constante.

Buscamos una solución tipo onda viajera (solitária) con condiciones de frontera ϕ, ϕ', $\phi'' \to 0$ cuando $|X| \to \infty$. Por lo tanto $B, D = 0$ y (4.13) se vuelve

$$\frac{1}{3} h_0^2 (\phi')^2 + \phi^2(\phi - \rho) = 0$$

donde $\rho = 2(\frac{c}{c_0} - 1)$.

Finalmente, tenemos que

$$X = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\phi'} = \Big(\frac{h_0^2}{3}\Big)^{1/2} \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\phi\sqrt{(\rho - \phi)}},$$

haciendo la substitución $\phi = \rho\,\mathrm{sech}^2\theta$ tenemos que

$$X - X_0 = \Big(\frac{4h_0^2}{3\rho}\Big)^{1/2}\theta$$

para alguna constante de integración X_0. Por lo tanto la solución para $\phi(X)$ es

$$\phi(X) = \rho\,\mathrm{sech}^2\Big[\Big(\frac{3\rho}{4\mathrm{h}_0^2}\Big)^{1/2}(\mathrm{X} - \mathrm{X}_0)\Big]. \tag{4.14}$$

Observe que la solución $\phi(X)$ cresce desde $\phi = 0$ cuando $X \to +\infty$ de manera que alcanza su valor máximo $\phi = \phi_{\max} = \alpha$ en $X = 0$ e decresce simétricamente a $\phi = 0$ cuando $X \to -\infty$, esto implica que $X_0 \equiv 0$.

Por lo tanto la solución final es

$$v(x,t) = \eta_0\,\mathrm{sech}^2\Big[\Big(\frac{3\alpha}{4\mathrm{h}_0^2}\Big)^{1/2}(\mathrm{x} - \mathrm{ct})\Big] \tag{4.15}$$

donde $\eta_0 = \alpha h_0$ y la velocidad de onda es

$$c = c_0\Big(1 + \frac{\alpha}{2}\Big) = c_0\Big(1 + \frac{1}{2}\frac{\eta_0}{h_0}\Big).$$

Para finalizar esta sección debemos mencionar que el estudio de existencia, unicidad, estabilidad (orbital) e inestabilidad de las ondas viajeras ha sido de gran interes en años recientes. En el próximo capítulo comentaremos algunos resultados en esta dirección para el modelo considerado allí. El lector puede consultar [2], [3], [5], [6], [22], [24], [25], [47], [50].

4.2.1. Ondas Periódicas

En el caso periódico también es posible obtener soluciones de tipo onda viajera. Asícomo veremos abajo, soluciones explícitas en general aparecen en términos de las funciones elipticas de Jacobi. El estudio de existencia y estabilidad de las ondas periódicas presenta una dificultad mayor que el caso continuo (vea [2], [3]).

Consideramos la ecuación de Korteweg-de Vries en la forma (4.10). Como en la sección anterior hacemos $v(x,t) = h_0\, f(X)$, con $X = x - ct$, y substituimos en (4.10), lo cual produce

$$\frac{h_0^2}{3}(f')^2 = -\frac{1}{c_0}f^3 + \alpha f^2 - 4Bf - D = F(f). \tag{4.16}$$

Buscamos soluciones reales acotadas para $f(X)$. Como $(f')^2 \geq 0$ y varia monotonamente hasta f' ser cero, los ceros de la cúbica $F(f)$ son cruciales. Para obtener soluciones acotadas todos los tres ceros f_1, f_2, f_3 deben ser reales. Sin pérdida de generalidad, escogemos $f_1 = 0$ y $f_2 = \alpha$. El tercer cero debe ser negativo asíque ponemos $f_3 = \alpha - \beta$ con $0 < \alpha < \beta$. Luego la ecuación para $f(X)$ es:

$$\frac{h_0^2}{3}\big(\frac{df}{dX}\big)^2 = f(f-\alpha)(f-\alpha-\beta)$$

o

$$\sqrt{\frac{3}{h_0^2}}\, dX = -\frac{df}{[f(f-\alpha)(f-\alpha-\beta)]^{1/2}} \tag{4.17}$$

donde $c = c_0\big(1 + \frac{2\alpha-\beta}{2}\big)$. Colocando $\alpha - f = p^2$ en (4.16) obtenemos

$$\sqrt{\frac{3}{h_0^2}}\, dX = \frac{dp}{[(\alpha-p^2)(\beta-p^2)]^{1/2}}. \tag{4.18}$$

Luego substituyendo $p = \sqrt{\alpha q}$ obtenemos

$$\Big(\frac{3\beta}{4h_0^2}\Big)^{1/2} X = \int_0^q \frac{dq}{[(1-q^2)(1-m^2q^2)]^{1/2}} \quad \text{donde} \quad m = \big(\frac{\alpha}{\beta}\big)^{1/2}. \tag{4.19}$$

La integral en (4.19) es una integral elíptica de primer tipo, y por lo tanto q puede ser expresada en términos de la función Jacobiana $\mathrm{sn}(\cdot)$, esto es,

$$q = \mathrm{sn}\Big[\Big(\frac{3\beta}{4h_0^2}\Big)^{1/2} X, m\Big]$$

donde m es el módulo de la función Jacobiana $\mathrm{sn}(z,m)$. En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
f(X) &= \alpha\big[1-\mathrm{sn}^2\Big(\frac{3\beta}{4h_0^2}\Big)^{1/2}X\big]\\
&= \alpha\,\mathrm{cn}^2\Big[\Big(\frac{3\beta}{4h_0^2}\Big)^{1/2}X\Big]
\end{aligned}
$$

donde $\mathrm{cn}(z,m)$ es también una función Jacobiana elíptica de módulo m y $\mathrm{cn}^2(z)=1-\mathrm{sn}^2(z)$.

De la identidad (4.19) deducimos que el período P es dado por

$$
\begin{aligned}
P &= 2\Big(\frac{4h_0^2}{3\beta}\Big)^{1/2}\int_0^1 \frac{dq}{[(1-q^2)(1-m^2q^2)]^{1/2}}\\
&= \frac{4h_0}{\sqrt{3\beta}}\,K(m) := \lambda
\end{aligned}
$$

donde $K(m)$ es la integral elíptica completa de primer tipo definida por

$$
K(m)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{(1-m\,\mathrm{sen}^2\theta)^{1/2}}
$$

y λ denota la longitud de la onda **cnoidal**.

Observación 4.2.1. *Dos casos límites son de especial interes*

(i) $m\to 1$, *es decir,* $\alpha\to\beta$, *en este caso* $\mathrm{cn}(z)\to\mathrm{sech}(z)$. *Entonces la solución onda cnoidal se aproxima a la solución onda solitária obtenida anteriormente.*

(ii) $m\to 0$ *(*$\alpha\to 0$*), en este caso* $\mathrm{sn}(z)\to\mathrm{sen}\,z$ *y* $\mathrm{cn}(z)\to\cos z$. *Por lo tanto*

$$
f(X)=\alpha\,\cos^2\Big[\Big(\frac{3\beta}{4h_0^2}\Big)^{1/2}X\Big]
$$

y

$$
U=c_0(1-\frac{\beta}{2})
$$

Usando $\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1$ *tenemos*

$$
f(X)=\frac{\alpha}{2}\big[1+\cos\big(\frac{\sqrt{3\beta}}{h_0}\big)X\big]
$$

y haciendo $k = \frac{\sqrt{3\beta}}{\sqrt{h_0}}$ *se sigue que*

$$f(X) = \frac{\alpha}{2}\big[1 + \cos(kx - \omega t)\big]$$

donde $\omega = Uk = \cos k(1 - \frac{1}{6}k^2h_0^2)$ *recuperando la teoría lineal clásica.*

4.2.2. Leyes de Conservación

En esta sección describiremos otra propiedad compartida por soluciones de sistemas dipersivos no lineales. El hecho de una ecuación tener esta propiedad es importante para el estudio de la existencia global de soluciones, como también el estudio de la estabilidad orbital de ondas viajeras en caso que la ecuación las posea. Usaremos la ecuación KdV como ejemplo.

Considere la ecuación

$$T_t + X_x = 0 \tag{4.20}$$

donde T denota la densidad y X el flujo.

Si T y X son integrables en $-\infty < x < \infty$ y $X \to 0$ cuando $|x| \to \infty$ podemos integrar (4.20) y obtener

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} T\,dx = -X\,\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} T\,dx = \text{constante}$$

y la densidad es conservada.

Considere ahora la ecuación KdV en la forma canónica

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{4.21}$$

Observe que la ecuación (4.21) puede ser escrita como

$$(u)_t + (-3u^2 + u_{xx})_x = 0$$

entonces $T = u$ y $X = -3u^2 + u_{xx}$. Por lo tanto si u es periódica o u y sus derivadas decaen muy rápido para 0 cuando $|x| \to \infty$, obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u\,dx = 0.$$

Conservación de la masa

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\,dx = \text{constante}.$$

La segunda ley para la ecuación (4.21) puede ser obtenida multiplicando por u de manera que,

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + (-2u^3 - uu_x - \frac{1}{2}u_x^2)_x = 0,$$

deducimos que

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2\,dx = \text{constante}$$

esto es, la conservación de energía.

La ecuación KdV posee un número infinito de leyes de conservación. (vea [41])

Ejercicios

1. Encuentre soluciones del tipo $u(x,t) = e^{i\gamma t}\varphi(x)$ con φ una función real, para la ecuación no lineal de Schrödinger,
$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + u\bar{u} = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}. \tag{4.22}$$

2. Muestre que el flujo generado por la ecuación no lineal de Schrödinger,
$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \lambda\,|u|^{\alpha-1}u = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{4.23}$$
deja invariante las siguientes cantidades:

i)
$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2\,dx,$$

ii)
$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x,t)|^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+1}|u(x,t)|^{\alpha+1}\,dx.$$

Capítulo 5

Problemas de Valor Inicial para las Ecuaciones Dispersivas No Lineales

En este capitulo aplicaremos las técnicas descritas brevemente en en capítulo anterior para el estudio de la buena colocación local y global del problema a valores iniciales asociado al sistema acoplado

$$\begin{cases} iw_t + rw_{xx} - \theta w + \bar{w}v = 0, \\ i\sigma v_t + sv_{xx} - \alpha v + \frac{1}{2}\, w^2 = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

5.1. Modelo

Para motivar el estudio de este sistema vamos en seguida a describir el modelo dado por el sistema de ecuaciones diferenciales parciales en (5.1).

El interes por propiedades no lineales de materiales ópticos ha crescido en años recientes entre físicos e matemáticos. Ha sido sugerido que explotando la respuesta no lineal del material, la capacidad bit-rate de las fibras ópticas se puede incrementar substancialmente lo que permitiría una gran mejoría en la velocidad y en la economia de manipulación y transmisión de datos.

En materiales no centro simétricos, es decir, materiales que no poseen inversión de simétria a nivel molecular, el orden menor de los efectos no lineales se originan de la susceptibilidad de segundo orden $\chi^{(2)}$; esto significa que la respuesta no lineal de la materia al campo eléctrico es cuadrática (vea [13], [29]). No linealidades cuadráticas son conocidas (por tiempo largo) por ser responsables por fenómenos tales como generación de las llamadas segundas armónicas (duplicación de frecuencia), como por ejemplo la luz laser con frecuencia ω puede ser parcialmente convertida a luz de frecuencia 2ω al pasar através de un cristal con respuesta $\chi^{(2)}$ (vea [40]). Por lo tanto, tales materiales son de importancia en interaciones de ondas paramétricas, en procesamiento de señales (ultra-fast all-optical), como también en comunicaciones de larga distancia (vea [17], [40] para más información sobre $\chi^{(2)}$ en fisíca e ingeniería).

El fenómeno de interes en dos dimensiones, espacio + tiempo, (propagación de pulsos en fibras) es descrito por el siguiente sistema acoplado de dos ecuaciones de Schrödinger no lineales

$$\begin{cases} iw_t + rw_{xx} - \theta w + \bar{w}v = 0, \\ i\sigma v_t + sv_{xx} - \alpha v + \frac{1}{2}\, w^2 = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Este sistema es obtenido de las ecuaciones básicas $\chi^{(2)}$ de la generación de segundas harmónicas (SHG) del tipo I (ver [40]). Las funciones complejas $w = w(x,t)$ y $v = v(x,t)$ representan los paquetes de las amplitudes de la primera y segunda armónica de una onda optica, respectivamente. De esta manera, (5.2) describe la interacción entre estas armónicas. Tenemos $r, s = \pm 1$. Los signos de r y s son determinados por los signos de la dispersion /difracçion (casos temporal/espacial, respectivamente). La constante σ mide las razones (relaciones) de la dispersión/difracción. Los parámetros θ e α son constantes reales (sin dimensión), con α incorporando el "wave-vector mismatch" entre las dos armónicas ([4], [8]).

Un tema (issue) importante en comunicación óptica en un regimen no lineal es entender las llamadas "ondas solitarias": ondas paradas (standing) o ondas viajantes, que son soluciones localizadas para (5.2) de la forma

$$w(x,t) = e^{i\gamma t}\phi(x), \qquad v(x,t) = e^{2i\gamma t}\psi(x) \tag{5.3}$$

donde $\phi, \psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Cuando especificamos las condiciones de frontera $\phi, \psi \to 0$ cuando $|x| \to +\infty$, estas soluciones son llamadas "*pulsos*". Estamos interesados en "*pulsos periódicos*", es decir, ϕ, ψ que satisfacen las condiciones de frontera periódicas $\phi^{(n)}(0) = \phi^{(n)}(L)$, $\psi^{(n)}(0) = \psi^{(n)}(L)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y un período fijo L.

En el caso $r = s = 1$ y $\theta, \alpha > 0$, el cual es el regimen más interesante desde el punto de vista de la física y la ingenieria, los pulsos satisfacen las equaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} -\phi'' + \theta_0\phi - \phi\psi = 0, \\ -\psi'' + \alpha_0\psi - \frac{1}{2}\,\phi^2 = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

con

$$\theta_0 = \theta + \gamma, \ \text{ y } \ \alpha_0 = \alpha + 2\sigma\gamma.$$

Un hecho conocido es que para los valores $\theta_0 = \alpha_0 = \pm 1$ y $\phi = \pm\sqrt{2}\psi$, el sistema (5.4) posee soluciones exatas reales de tipo pulso, esto es,

$$\phi(x) = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{sech}^2\Big(\frac{x}{2}\Big), \qquad \psi(x) = \pm\frac{3}{2}\operatorname{sech}^2\Big(\frac{x}{2}\Big), \tag{5.5}$$

(vea [8], [29]). En [10], usando métodos del cálculo de variaciones (el teorema del paso de la montaña y argumentos del tipo concentración y compacidad), fue probada la existencia de pulsos para todo valor de $\alpha_0 > 0$ y $\theta_0 = 1$. Con relación a la *forma* de las soluciones para (5.4), algunos resultados numéricos ([14], [12], [10], [8]) y analíticos ([10], [47]) han sido obtenidos. Una descripción del perfil de las soluciones para (5.4) fue dada en [47] usando la teoría de bifurcación homoclínica (framework). En este estudio fue mostrada la existencia y unicidad excepto por reflección ($(\phi, \psi) \mapsto (-\phi, \psi)$), de soluciones que poseen un número multiple de "humps" (peaks or troughs), llamados "*multipulsos*" o "*N-pulsos*", para valores $\alpha_0 < \theta_0$ e α_0 suficientemente próximos de θ_0. Estas soluciones son generadas de una bifurcación homoclínica que aparece próximo a un (escenario) de autovalor semi simple. Para $\alpha_0 \geqq \theta_0$ y α_0 próximo a θ_0, también fue demostrado que soluciones del tipo multipulsos no existen (vea [14], [47] para simulaciones numéricas sobre la existencia de multipulsos). También observamos que en [47] fue establecida la existencia de una rama C^1 de 1-pulsos para (5.4) parametrizada por α_0, para α_0 próximo a 1, el cual contiene la solución explícita (5.5) para $\alpha_0 = 1$. En [48], fue estudiada la estabilidad y la inestabilidad de la órbita generada por los 1-pulsos o multipulsos (ϕ, ψ) de (5.4) (encontrados en [47]), digamos,

$$\mathcal{O}_{(\phi,\psi)} = \{(e^{is}\phi(x + x_0), e^{2is}\psi(x + x_0))|\ x_0, s \in \mathbb{R}\}. \tag{5.6}$$

Haciendo uso de la teoría de Grillakis, Shatah y Strauss [24],[25] fueron derivadas condiciones para mostrar la estabilidad no lineal o inestabilidad de los 1-pulsos. Además, aplicando un críterio de inestabilidad introducido por Grillakis [23] (vea también Grillakis [22] y Jones [28]), fue demostrado el hecho notable que soluciones N-pulsos son inestables para el flujo del sistema acoplado de ecuaciones no lineales de Schrödinger (5.2).

En el caso periódico el estudio fue desarrollado en [3] por Angulo y Linares. Además del resultado de buena colocación local que describiremos luego, los siguientes resultados relativos a las ondas solitarias fueron obtenidos:

- Existencia de una familia no trivial de soluciones periódicas para (5.4) en el regimen $\theta_0 = \alpha_0$. De manera más precisa, para $\theta > 0$ fijo, bajo las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} &\text{i)}\ \ \gamma > \frac{4\pi^2}{L^2} - \theta, \\ &\text{ii)}\ \ \alpha,\, \sigma > 0 \ \text{ tal que } \ \alpha + 2\sigma\gamma = \theta + \gamma, \\ &\text{iii)}\ \ \phi = \sqrt{2}\,\psi, \end{aligned} \tag{5.7}$$

se obtiene $\psi = \psi_\gamma$ satisfaciendo la ecuación diferencial

$$\psi''(\xi) - (\theta + \gamma)\psi(\xi) + \psi^2(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{5.8}$$

tal que

$$\gamma \in \Big(\frac{4\pi^2}{L^2} - \theta, +\infty\Big) \mapsto \psi_\gamma \in H^1_{per}([0, L])$$

es una rama suave de soluciones. Mas, el perfil de cada ψ_γ es una **onda cnoidal**, esto es,

$$\psi(\xi) = \psi(\xi; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \beta_2 + (\beta_3 - \beta_2)\mathrm{cn}^2\Big[\sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{6}}\,\xi; k\Big], \tag{5.9}$$

donde $\mathrm{cn}(\cdot; k)$ representa una función eliptica de Jacobi de *modulo* k, los β_i's son funciones suaves de γ con $\beta_1 < 0 < \beta_2 < \beta_3$, $\Sigma\beta_i = 3(\theta + \gamma)/2$ y

$$k^2 = \frac{\beta_3 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_1}.$$

Esta familia de soluciones para (5.9) son pulsos periódicos positivos, que son pares y monotonamente decrecientes entre los máximos $\psi(0) = \beta_3$ (humps) y los mínimos positivos $\psi(\frac{L}{2}) = \beta_2$ (troughs).

- Con relación a la estabilidad no lineal de la órbita (5.6), se prueba que esta es estable en $H^1_{per}([0,L]) \times H^1_{per}([0,L])$ por el flujo periódico de el sistema (5.2). Estos resultados son derivados de la teoría de Grillakis, Shatah y Strauss ([24]) y la teoría de Floquet aplicada al problema de autovalores periódicos para la forma Jacobiana de la ecuación de Lamé

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Lambda}{dx^2} + [\rho - 12k^2 \operatorname{sn}^2(x;k)]\Lambda = 0 \\ \Lambda(0) = \Lambda(2K), \quad \Lambda'(0) = \Lambda'(2K), \end{cases} \tag{5.10}$$

donde $\operatorname{sn}(\cdot;k)$ es una ecuación elíptica de Jacobi y $K = K(k)$ la integral elíptica completa de primer tipo.

- También es provado que la órbita

$$\mathcal{S}_{(\phi,\psi)} = \{(\sqrt{2}e^{i\gamma s}\psi_\gamma(x), e^{2i\gamma s}\psi_\gamma(x)) |\ s \in \mathbb{R}\}, \tag{5.11}$$

es inestable en $H^1_{per}([0,2L]) \times H^1_{per}([0,2L])$.

5.2. Problema de Valores Iniciales

Con relación a la buena colocación del PVI asociado al sistema (5.2) vamos a establecer la teoría local y global en los espaços $H^s([0,L]) \times H^s([0,L])$ para $s \geq 0$. Para demostrar la teoría local usaremos los espacios $X_{s,b}$ introduzidos por Bourgain en [7] y las estimaciones bilineales introducidas por Kenig, Ponce y Vega [31] para estudiar el PVI asociado a la ecuación de Korteweg-de Vries. Mas precisamente, usaremos el método empleado por Kenig, Ponce y Vega [32] para estudiar las siguientes ecuaciones de Schrödinger no lineales,

$$\partial_t u = i\partial_x^2 u + N_j(u,\overline{u}), \qquad x \in \mathbb{R}\ (\mathbb{T}),\ t \in \mathbb{R}, \tag{5.12}$$

donde la no linealidad $N_j(u,\overline{u})$, $j = 1,2,3$, es un polinómio cuadrático, es decir, $N_1(u,\overline{u}) = u^2$, $N_2(u,\overline{u}) = u\overline{u}$, e $N_3(u,\overline{u}) = \overline{u}^2$.

En estas notas estamos interesados en las nolinealidades N_1 y N_2. Para explicar os resultados em [32] relacionados a estas nolinealidades necesitamos de la siguiente definición.

Definición 5.2.1. *Sea $\mathcal{A}$ el espacio de funciones f tal que*

(i) $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

(ii) $f(x, \cdot) \in \mathcal{S}$ *para cada* $x \in \mathbb{T}$.

(iii) $f(\cdot, t) \in C^{\infty}(\mathbb{T})$ *para cada* $t \in \mathbb{R}$.

Para $s, b \in \mathbb{R}$ definimos el espacio $Y_{s,b}$ como o completamiento de $\mathcal{A}$ con relación a la norma

$$\|F\|_{Y_{s,b}} = \|\langle n\rangle^s \langle \tau - n^2\rangle^b \widehat{F}(n, \tau)\|_{\ell^2_n L^2_\tau}. \tag{5.13}$$

Para $F \in Y_{s,b}$ considere los operadores bilineares

$$B_1(F, F) = F^2 \tag{5.14}$$

y

$$B_2(F, F) = F\overline{F}. \tag{5.15}$$

Kenig, Ponce y Vega en [31] demostraron que dado $s \in (-1/2, 0]$ existe $b \in (1/2, 1)$ tal que

$$\|B_1(F, F)\|_{Y_{s,b-1}} \leq c\|F\|^2_{Y_{s,b}} \tag{5.16}$$

y que para $s < -1/2$ y cualquier $b \in \mathbb{R}$ la estimación(5.16) falla.

Por otro lado, dado cualquier $s < 0$ e $b \in \mathbb{R}$ ellos probaron que la estimación

$$\|B_2(F, F)\|_{Y_{s,b-1}} \leq c\|F\|^2_{Y_{s,b}} \tag{5.17}$$

falla y es valida para $s \geq 0$.

Estas estimaciones producen resultados de buena colocación optimos para os problemas periódicos asociados a (5.12) para datos iniciales en $H^s(\mathbb{T})$, $s > -1/2$ cuando la naolinealidad es N_1 y en $H^s(\mathbb{T})$, $s \geqq 0$, para la nolinealidad N_2.

Cuando $\sigma = 1$, podemos reproduzir las estimaciones (5.16) y (5.17) para cualquier $s \geq 0$ y algun $b \in (1/2, 1)$ para el sistema (5.2). Estas son las estimaciones principales para obtener los resultados locales. Observemos que para $\sigma \neq 1$ puede probarse las estimaciones (5.16) y (5.17) para $s > -1/2$ y algun $b \in (1/2, 1)$. Este hecho no será demostrado en estas notas.

Para probar los resultados globales $H^s(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})$, $s \geq 0$ será suficiente usar la teoría local y la ley de conservación.

$$\mathcal{F}(t) := \int \left[|w(x,t)|^2 + 2\sigma|v(x,t)|^2\right] dx = \mathcal{F}(0) \tag{5.18}$$

5.3. Teoría Local de Buena Colocación

En esta sección demostraremos el resultado local para el problema periódico

$$\begin{cases} iw_t + w_{xx} - \theta\, w + \overline{w}v = 0, & x \in [0,L],\ t \in \mathbb{R}, \\ i\sigma v_t + v_{xx} - \tilde{\alpha}\, v + \frac{1}{2}w^2 = 0, \\ w(x,0) = w_0(x),\ \ v(x,0) = v_0(x) \end{cases} \tag{5.19}$$

donde $\theta, \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$, en los espacios de Sobolev periódicos $H^s([0,L]) \times H^s([0,L])$. Para simplificar el analisis usaremos $L = 2\pi$.

Primero escribimos el sistema (5.19) como

$$\begin{cases} iw_t + w_{xx} - \theta\, w + \overline{w}v = 0, & x \in [0,L],\ t \in \mathbb{R}, \\ iv_t + a\, v_{xx} - \alpha\, v + \frac{a}{2}w^2 = 0, \\ w(x,0) = w_0(x),\ \ v(x,0) = v_0(x) \end{cases} \tag{5.20}$$

donde $a = 1/\sigma$ y $\alpha = \tilde{\alpha}/\sigma$.

Luego consideramos el sistema equivalente de ecuaciones integrales asociado a (5.20). Sea ψ una función $C_0^\infty(\mathbb{R})$ con suporte $\operatorname{supp}\psi \subset (-2,2)$ tal que $\psi(t) = 1$, para $t \in [-1,1]$. Sea $\psi_T(\cdot) = \psi(\cdot/T)$.

$$\begin{cases} w(t) = \psi_1 W(t) w_0 - i\,\psi_T \int_0^t W(t-t')\overline{w}\, v(t')\, dt' \\ v(t) = \psi_1 V(t) v_0 - \dfrac{ia}{2}\,\psi_T \int_0^t V(t-t') w^2(t')\, dt', \end{cases} \tag{5.21}$$

donde $W(t)=e^{it(\partial_x^2-\theta)}$ y $V(t)=e^{it(a\partial_x^2-\alpha)}$ son los generadores de Schrödinger (grupos unitarios) correspondientes al problema lineal definidos como

$$W(t)\phi=\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-it(k^2+\theta)}\widehat{\phi}(k)e^{ikx} \tag{5.22}$$

y

$$V(t)\phi=\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-it(ak^2+\alpha)}\widehat{\phi}(k)e^{ikx}. \tag{5.23}$$

En este caso particular necesitamos de la siguiente definición similar a la Definición 5.2.1

Definición 5.3.1. *Sea $\mathcal{A}$ el espacio de las funciones f tales que*

(i) $f:[0,L]\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$.

(ii) $f(x,\cdot)\in\mathcal{S}$ *para cada* $x\in[0,L]$.

(iii) $f(\cdot,t)\in C^\infty([0,L])$ *para cada* $t\in\mathbb{R}$.

Para $s\in\mathbb{R}$ se define el espacio $X_{s,b}$ como siendo la completación de $\mathcal{A}$ en relación a la norma

$$\|f\|_{X_{s,b}}=\|\langle n\rangle^s\langle\tau+n^2+\theta\rangle^b\,\widehat{f}(n,\tau)\|_{\ell^2_nL^2_\tau}. \tag{5.24}$$

Similarmente, para $s\in\mathbb{R}$ e $a>0$ definimos el espacio $X^a_{s,b}$ como la completación de $\mathcal{A}$ en relación a la norma

$$\|f\|_{X^a_{s,b}}=\|\langle n\rangle^s\langle\tau+a\,n^2+\alpha\rangle^b\widehat{f}(n,\tau)\|_{\ell^2_nL^2_\tau}. \tag{5.25}$$

Observación 5.3.1. *Observe que la definición de los espacios $X_{s,b}$ y $X^a_{s,b}$ es tal que*

$$\|w\|_{X_{s,b}}=\|W(-t)w\|_{H^b_tH^s_{\text{per}}} \tag{5.26}$$

y

$$\|v\|_{X^a_{s,b}}=\|V(-t)v\|_{H^b_tH^s_{\text{per}}}. \tag{5.27}$$

La teoría local está contenida en el siguiente teorema.

Teorema 5.3.1. *Sea $s\geq 0$, $a>0$ y $b>1/2$. Para cualquier par $(w_0,v_0)\in H^s([0,L])\times H^s([0,L])$, existe $T=T(\|(w_0,v_0)\|_{H^s\times H^s})>0$,* *y una única solución de problema* (5.20) *de la forma* $(\varphi_T w,\, \varphi_T v)$ *con* $(w,\, v) \in X_{s,b} \times X^a_{s,b}$ *en el intervalo de tiempo* $[-T, T]$ *tal que*

$$(w, v) \in C([-T, T] : H^s([0, L]) \times H^s([0, L])). \tag{5.28}$$

Mas, para cualquier $T' \in (0, T)$*, la aplicación* $(w_0, v_0) \mapsto (w(t), v(t))$ *es Lipschitz de una vecindad* $\mathcal{W}$ *de* $H^s([0, L]) \times H^s([0, L])$ *en* $C([-T, T] : H^s([0, L]) \times H^s([0, L])) \cap X_{s,b} \times X^a_{s,b}$*.*

Observación 5.3.2. *Si* $a \neq 1$ *el resultado en Teorema 5.3.1 vale para* $s > -1/2$*.*

5.4. Lemas Preliminares

Para establecer el Teorema 5.3.1 precisaremos de vários lemas preliminares. Comenzamos con el resultado siguiente.

Lema 5.4.1. *Sea* $s \in \mathbb{R}$*,* $b > 1/2$*, entonces*

$$\|\psi_1 W(t) w_0\|_{X_{s,b}} \leq c\, \|w_0\|_{H^s}, \tag{5.29}$$

y

$$\|\psi_1 V(t) v_0\|_{X^a_{s,b}} \leq c\, \|v_0\|_{H^s}, \tag{5.30}$$

donde $W(t)$ *y* $V(t)$ *fueron definidos en* (5.22) *y* (5.23)*, respectivamente, y* $\gamma > 0$*.*

Demostración. De la definición de los espacios $X_{s,b}$ podemos deducir que

$$\|\psi_1\, W(t) u_0\|_{X_{s,b}} = \|\psi_1\, u_0\|_{H^s_x H^b_t} = \|\psi_1\|_{H^b_t} \|u_0\|_{H^s_x}, \tag{5.31}$$

esto prueba (5.29).

La prueba de la estimación (5.30) sigue el mismo argumento. □

En lo que sigue usaremos la siguiente notación: Sea $\{W(t)\}$ el grupo unitario definido en (5.22)

$$-iW *_R f := -i\varphi_T \int_0^t W(t - t') f(t')\, dt' \tag{5.32}$$

y

$$(Lf)(t) := \varphi_T \int_0^t f(t')\, dt' \tag{5.33}$$

Observación 5.4.1. *Sean X y H espacios de funciones y X' and H' sus espacios duales respectivamente. Note que si $\|f\|_X = \|W(-t)f\|_H$, entonces*

$$\| -iW *_R f\|_X \le c\,\|f\|_{X'} \tag{5.34}$$

es equivalente a

$$\|(Lf)(t)\|_H \le c\,\|f\|_{H'}. \tag{5.35}$$

Lema 5.4.2.

(i) Sea $b' \le 0 \le b \le b'+1$, $T \le 1$. Entonces

$$\|Lf\|_{H_t^b} \le c\,\{T^{1-b+b'}\|f\|_{H_t^{b'}} + T^{1/2-b}\|\langle\tau\rangle^{-1}1_{\{|\tau|T\ge 1\}}\widehat{f}\|_{L^1_\tau}\} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}\|\varphi_T\,(W *_R f)\|_{X_{s,b}} \le c\sqrt{2}\;\{&T^{1-b+b'}\|f\|_{X_{s,b'}}\\ &+ T^{1/2-b}\|\langle n\rangle^{2s}\langle\tau+n^2+\theta\rangle^{-1}\widehat{f}\|_{\ell^2_n L^1_\tau}\}\end{aligned} \tag{5.37}$$

con c igual en (5.36) y (5.37).

(ii) Suponiendo que $b' > -1/2$. Entonces

$$\|Lf\|_{H_t^b} \le c\,T^{1-b+b'}\|f\|_{H_t^{b'}} \tag{5.38}$$

$$\|\varphi_T\,(W *_R f)\|_{X_{s,b}} \le c\;T^{1-b+b'}\|f\|_{X_{s,b'}} \tag{5.39}$$

con la misma constante c en (5.38) y (5.39).

Observación 5.4.2. *Estimaciones similares son validas cuando substituimos $W(t)$ por el grupo unitario $V(t)$ y $X_{s,b}$ por $X^a_{s,b}$.*

Demostración. Defina $J(t) = (Lf)(t)$, la transformada de Fourier de J en relación a t es dada por (ver ejercicio 5.3)

$$\widehat{J}(\tau) = c\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t')\,\frac{\widehat{\varphi}_T(\tau-\tau') - \widehat{\varphi}_T(\tau)}{\tau'}\,d\tau'. \tag{5.40}$$

Escribimos $f = f_+ + f_-$ con

$$\widehat{f}_+(\tau) = \widehat{f}(\tau)\, 1_{\{|\tau|T>1\}} \ \text{ y } \ \widehat{f}_-(\tau) = \widehat{f}(\tau)\, 1_{\{|\tau|T<1\}}$$

y respectivamente $J = J_+ + J_-$.

Reescribimos J_- como

$$\widehat{J}_-(\tau) = c \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \widehat{f}_-(\tau')\, (\widehat{\varphi}_T)'(\tau - \lambda t')\, d\lambda\, dt'. \tag{5.41}$$

Multiplicando (5.41) por $\langle\tau\rangle^b$, usando que

$$\langle\tau\rangle^b \le c\big(\langle t'\rangle^b + |\tau - \lambda t'|^b\big),$$

y tomando la norma L^2 obtenemos

$$\begin{aligned}
\|J_-\|_{H_t^b} &\le c\,\big(\|\int_{\mathbb{R}}\int_0^1 \langle t'\rangle^b \widehat{f}_-\, \widehat{\varphi}'_T(\tau - \lambda t')\, d\lambda\, dt'\|_{L^2_\tau} \\
&\qquad + \|\int_{\mathbb{R}}\int_0^1 |\tau - \lambda t'|^b \widehat{f}_-\, \widehat{\varphi}'_T(\tau - \lambda t')\, d\lambda\, dt'\|_{L^2_\tau}\big) \\
&\le c\int_0^1 \lambda^{-1}\|(\langle\lambda^{-1}\cdot\rangle^b \widehat{f}_-(\lambda^{-1}\cdot)) * \widehat{\varphi}'_T\|_{L^2}\, d\lambda \\
&\qquad + c\int_0^1 \lambda^{-1}\|\widehat{f}_-(\lambda^{-1}\cdot) * (|\cdot|^b \widehat{\varphi}'_T)\|_{L^2}\, d\lambda \\
&\le c\int_0^1 \lambda^{-1}\|\langle\lambda^{-1}\cdot\rangle^b \widehat{f}_-(\lambda^{-1}\cdot)\|_{L^1}\|\widehat{\varphi}'_T\|_{L^2}\, d\lambda \\
&\qquad + c\int_0^1 \lambda^{-1}\|\widehat{f}_-(\lambda^{-1}\cdot)\|_{L^1}\||\cdot|^b \widehat{\varphi}'_T\|_{L^2}\, d\lambda \\
&\le c\,\big(\|\langle t'\rangle^b \widehat{f}_-\|_{L^1_\tau}\|\,\widehat{\varphi}'_T\|_{L^2_\tau} + \|\widehat{f}_-\|_{L^1_\tau}\||\tau|^b\,\widehat{\varphi}'_T(\tau - \lambda t')\|_{L^2_\tau}\big),
\end{aligned} \tag{5.42}$$

donde hemos usado las desigualdades de Minkowskii y Young.

Las propiedades del soporte de $\widehat{f}_-$ y la homegeneidad implican

$$\|J_-\|_{H_t^b} \le c\,T^{3/2-b}\big(\|\widehat{\varphi}_1'\|_{L^2_\tau} + \||\tau|^b\widehat{\varphi}_1'\|_{L^2_\tau}\big)\,\|\widehat{f}_-\|_{L^1_\tau}. \tag{5.43}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y usando las propiedades del suporte de $\widehat{f}_-$, sigue que

$$\|\widehat{f}_-\|_{L^1_\tau} \le cT^{b'-1/2}\,\|f_-\|_{H_t^{b'}}. \tag{5.44}$$

Combinando (5.43) y (5.44) tenemos

$$\|J_-\|_{H_t^b} \le c\,T^{1-b+b'}\,\|f_-\|_{H_t^{b'}}. \tag{5.45}$$

para cualquier $b' < 1/2$ y en particular para cualquier $b' \le 0$.

Ahora estimaremos J_+. Escribimos $J_+ = J_1 + J_2$ donde

$$\begin{aligned}\widehat{J}_+(\tau) &= \widehat{J}_1(\tau) + \widehat{J}_2(\tau)\\ &= c\,(\tau^{-1}\widehat{f}_+) * \widehat{\varphi}_T + c\,\widehat{\varphi}_T\int \tau^{-1}\widehat{f}_+(\tau)\,d\tau\end{aligned} \tag{5.46}$$

Para estimar J_1 usamos la desigualdad de Young, homogeneidad y las propiedades del suporte de $\widehat{f}_+$. Así tenemos que,

$$\begin{aligned}\|J_1\|_{H_t^b} &\le c\big(\|\widehat{\varphi}_T\|_{L^1_\tau}\|\langle\tau\rangle^b\tau^{-1}\widehat{f}_+\|_{L^2_\tau} + \||\tau|^b\widehat{\varphi}_T\|_{L^1_\tau}\|\tau^{-1}\widehat{f}_+\|_{L^2_\tau}\big)\\ &\le c\,\Big(\|\widehat{\varphi}_1\|_{L^1_\tau}\sup_{|\tau|\ge T^{-1}}|\tau|^{-(1-b+b')}\\ &\qquad + \||\tau|^b\widehat{\varphi}_1\|_{L^1_\tau}\,T^{-b}\sup_{|\tau|\ge T^{-1}}|\tau|^{-(1-b')}\Big)\|f\|_{H_t^{b'}}\\ &\le c\,T^{1-b+b'}\,\|f\|_{H_t^{b'}}.\end{aligned} \tag{5.47}$$

para todo $b' \ge b-1$.

Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned}\|J_2\|_{H_t^b} &= c\,\|\varphi_T\|_{H_t^b}\Big|\int \tau^{-1}\widehat{f}_+(\tau)\,d\tau\Big|\\ &\le c\,T^{1/2-b}\|\varphi_1\|_{H_t^b}\|\tau^{-1}\widehat{f}_+\|_{L^1_\tau}.\end{aligned} \tag{5.48}$$

Reuniendo la informacion en (5.45), (5.47) y (5.48) tenemos (5.36).

Para probar (5.38) observamos que para $b' > 1/2$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y propiedades del soporte de $\widehat{f}_+$ implican que

$$\|\tau^{-1}\widehat{f}_+\|_{L^1_\tau} \leq c\,T^{1/2+b'}\,\|f\|_{H_t^{b'}}. \tag{5.49}$$

Esta última desigualdad junto con (5.48), (5.45) y (5.47) producen la desigualdad (5.38).

Las desigualdades (5.37) y (5.39) se obtienen aplicando (5.36) , (5.38) y la observación 5.4.1 para n fijo, multiplicando por $\langle n\rangle^{2s}$ y tomando la norma ℓ^2_n. □

Como comentamos anteriormente cuando $b > 1/2$ es claro que $X_{s,b} \subset C(\mathbb{R} : H^s)$ (por la identidad (5.26) y el lema de Sobolev. Si $b \leq 1/2$ esto no es cierto y tenemos que encontrar un substituto para este resultado. Aqui aparece el espacio X_s definido en via

$$\|f\|_{X_s} = \| = \|\langle n\rangle^s\langle\tau + n^2 + \theta\rangle^{-1}\widehat{f}(\tau)\|^2_{\ell^2_n(L^1_\tau)}. \tag{5.50}$$

Lema 5.4.3. *Sea $f \in X_s$, entonces $W *_R f \in C(\mathbb{R} : H^s)$.*

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos suponer $s = 0$. Como $W(\cdot)$ es un grupo unitario fuertemente continuo en ℓ^2, es suficiente probar la continudad en ℓ^2 de $W^{-1}W *_R f$ para $f \in X_0$. Que es equivalente a la continuidad en L^2 de $F(t) = \int_0^t f(t')\,dt'$ para $\langle\tau\rangle^{-1}\widehat{f}(\tau) \in \ell^2_n(L^1_\tau)$.

Usando a transformada de Fourier podemos escribir

$$F(t) = \int (e^{it\tau} - 1)\,\tau^{-1}\,\widehat{f}(\tau)\,d\tau. \tag{5.51}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\|F(t) - F(t')\|^2_{\ell^2_n} \\
&= 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int (e^{it\tau} - e^{it'\tau})\tau^{-1}\,\widehat{f}(\tau)(e^{-it\tau'} - e^{-it'\tau'})\tau'^{-1}\,\overline{\widehat{f}(\tau')}\,d\tau d\tau' \\
&\leq c\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int \text{mín}(|t-t'|, \langle\tau\rangle^{-1})\ \text{mín}(|t-t'|, \langle\tau'\rangle^{-1})|\widehat{f}(\tau')\widehat{f}(\tau)|\,d\tau\,d\tau' \\
&\leq c\,\|\langle\tau\rangle^{-1}\widehat{f}(\tau)\|^2_{\ell^2_n(L^1_\tau)}.
\end{aligned} \tag{5.52}$$

El integrando en la penultima desigualdad en (5.52) tiende a cero puntualmente en ξ, τ, τ' cuando $|t-t'|\to 0$ y es acotado uniformemente en $t-t'$ por la expresión obtenida despues de retirar $|t-t'|$ en los minimos, la cual es integrable como muestra la última desigualdad en (5.52). Por tanto, del teorema de la convergencia dominada se sigue que $\|F(t)-F(t')\|^2_{\ell^2_n}$ tiende a cero cuando $|t-t'|\to 0$. $\square$

El siguiente lema nos permite extraer regularidad adicional.

Lema 5.4.4. *Sea $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ como en (5.20) y $\psi_T(t):=\psi(\frac{t}{T})$ para $0<T\le 1$. Entonces, si $1/2>b>b'\ge 0$ o $0\ge b>b'>-1/2$, la siguiente desigualdad se satisface:*

$$\|\psi_T f\|_{X_{s,b'}}\le cT^{b-b'}\,\|f\|_{X_{s,b}}. \tag{5.53}$$

Demostración. Primero suponemos $1/2>b>b'\ge 0$. Entonces para $g\in H_t^b$ usamos la regla de Leibniz generalizada y el lema de Sobolev con $b-b'=1/p$ y $b=1/q$ y $1/p+1/p'=1/q+1/q'=1/2$ para obtener

$$\begin{aligned}\|\psi_T g\|_{H_t^{b'}}&\le c\,(\|\psi_T\|_{L_t^p}\|g\|_{H_t^{b',p'}}+\|\psi_T\|_{H_t^{b',q}}\|g\|_{L_t^q})\\&\le c\,(\|\psi_T\|_{L_t^p}+\|\psi_T\|_{H_t^{b',q}})\|g\|_{H_t^b}\\&\le c\,T^{b-b'}\|g\|_{H_t^b}.\end{aligned}\tag{5.54}$$

Para $f\in X_{s,b}$ y $W(t)=\exp(it(\partial_x^2-\theta))$ se sigue de (5.54),

$$\begin{aligned}\|\psi_T f\|_{X_{s,b'}}&=\|W(\cdot)\psi_T f\|_{H_t^{b'}(\mathbb{R},H_x^s)}\\&=\|\psi_T W(\cdot)f\|_{H_t^{b'}(\mathbb{R},H_x^s)}\\&\le c\,T^{b-b'}\|W(\cdot)f\|_{H_t^b(\mathbb{R},H_x^s)}\\&=c\,T^{b-b'}\|W(\cdot)f\|_{X_{s,b}}\end{aligned}\tag{5.55}$$

Intercambiando b y b' el caso $0\ge b>b'>-1/2$ sigue usando dualidad. $\square$

5.5. Estimaciones Bilineales

Las estimaciones claves para tratar los términos no lineales son las llamadas estimaciones bilineales. A continuación estableceremos las particulares en nuestro ejemplo.

Lema 5.5.1. *Para* $s \geq 0$ *y* $a > 0$ *tenemos*

$$\| \overline{w}\, v\|_{X_{s,-1/2}} \leq c\, \|w\|_{X_{s,1/2}} \|v\|_{X^a_{s,1/2}}. \tag{5.56}$$

y

$$\|w^2\|_{X^a_{s,-1/2}} \leq c\, \|w\|^2_{X_{s,1/2}}. \tag{5.57}$$

Observación 5.5.1. *Si* $a \neq 1$ *la estimación* (5.56) *es satisfecha para* $s > -1/2$. *Para cualquier* $a > 0$, *la estimación* (5.57) *se satisface para* $s > -1/2$.

Como en [32] el próximo corolario sigue de la prueba del Lema 5.5.1.

Corolario 5.5.1. *Sea* $b > 1/2$ *con* $1 - b,\ b' > 3/8$, *entonces*

$$\| \overline{w}\, v\|_{X_{s,1-b}} \leq c\, \|w\|_{X_{s,b'}} \|v\|_{X^a_{s,b'}}, \tag{5.58}$$

y

$$\|w^2\|_{X^a_{s,1-b}} \leq c\, \|w\|^2_{X_{s,b'}}. \tag{5.59}$$

El siguiente lema es útil en la prueba del Lema 5.5.1 ([32]).

Lema 5.5.2. *Si* $\gamma > 1/2$. *Entonces*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\, \tau\in\mathbb{R}} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1 + |\tau \pm n_1(n-n_1)|)^\gamma} < \infty. \tag{5.60}$$

Demostración. Escribimos la expresión (5.60) como

$$\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1 + |\tau \pm n_1(n-n_1)|)^\gamma} = \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1 + |(n_1-\alpha^\pm)(n_1-\beta^\pm)|)^\gamma} \tag{5.61}$$

donde $\alpha = \alpha^\pm(n,\tau)$ e $\beta = \beta^\pm$ son las raices del polinomio

$$\tau \pm (n_1(n-n_1)) = 0. \tag{5.62}$$

Existen a lo máximo 10 n_1's tales que $|n_1 - \alpha| \leq 2$ o $|n_1 - \beta| \leq 2$. El resto de los n_1's satisfacen

$$(1 + |(n_1-\alpha)(n_1-\beta)|) \geq \frac{1}{2}(1 + |n_1-\alpha|)(1 + |n_1-\beta|). \tag{5.63}$$

Por lo tanto aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en (5.60) obtenemos el resultado. $\square$

Prueba del Lema 5.5.1. A seguir demostraremos la estimación bilineal (5.56). La desigualdad (5.57) quedará como ejercicio para el lector.

Como

$$\widehat{\overline{w}v}(n,\tau) = \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\overline{w}}(n-n_1,\tau-\tau_1)\widehat{v}(n_1,\tau_1)\,d\tau_1. \tag{5.64}$$

Sea

$$\begin{aligned} f(n,\tau) &= \langle n\rangle^s \langle \tau + an^2+\alpha\rangle^{1/2}|\widehat{v}(n,\tau)|,\\ g(n,\tau) &= \langle n\rangle^s \langle \tau - n^2-\theta\rangle^{1/2}|\widehat{\overline{w}}(n,\tau)| \end{aligned} \tag{5.65}$$

tal que

$$\begin{aligned} |\widehat{\overline{w}v}(n,\tau)|^2 \leq \Big|\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} &\frac{g(n-n_1,\tau-\tau_1)}{\langle n-n_1\rangle^s\langle \tau-\tau_1-(n-n_1)^2-\theta\rangle^{1/2}}\\ &\times \frac{f(n_1,\tau_1)}{\langle n_1\rangle^s\langle \tau_1+an_1^2+\alpha\rangle^{1/2}}\,d\tau_1\Big|^2. \end{aligned} \tag{5.66}$$

Entonces

$$\begin{aligned} &\|\,\overline{w}\,v\|_{X_{s,-1/2}} \leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\langle \tau+n^2+\theta\rangle}\times\\ &\Big|\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(n-n_1,\tau-\tau_1)}{\langle n-n_1\rangle^s\langle \tau-\tau_1-(n-n_1)^2-\theta\rangle^{1/2}}\times\\ &\qquad\frac{f(n_1,\tau_1)}{\langle n_1\rangle^s\langle \tau_1+an_1^2+\alpha\rangle^{1/2}}\,d\tau_1\Big|^2\Big)^{1/2}\\ &\leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\langle \tau+n^2+\theta\rangle}\times\\ &\Big|\sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|f(n_1,\tau_1)g(n-n_1,\tau-\tau_1)|^2\,d\tau_1\Big)^{1/2}\times\\ &\times\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau_1}{\langle n\rangle^{2s}\langle n-n_1\rangle^{2s}\langle \tau_1+an_1^2+\alpha\rangle\langle \tau-\tau_1-(n-n_1)^2-\theta\rangle}\Big)^{1/2}\Big|^2\Big)^{1/2} \end{aligned} \tag{5.67}$$

$$\leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n_1\rangle^{2s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\langle \tau + n^2 + \theta\rangle} \times$$

$$\big(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \big(\int_{-\infty}^{\infty} |f(n_1,\tau_1)g(n-n_1,\tau-\tau_1)|^2\, d\tau_1\big) \times$$

$$\big(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_1}{\langle n_1\rangle^{2s}\langle n-n_1\rangle^{2s}\langle \tau_1 + an_1^2 + \alpha\rangle\langle \tau - \tau_1 - (n-n_1)^2 - \theta\rangle}\big)\Big)^{1/2}$$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{Z},\, \tau\in\mathbb{R}} A(n,\tau,a)\|f\|_{\ell^2_n L^2_\tau}\|g\|_{\ell^2_n L^2_\tau}$$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{Z},\, \tau\in\mathbb{R}} A(n,\tau,a)\, \|w\|_{X_{s,1/2}}\|v\|_{X^a_{s,1/2}},$$

donde

$$A(n,\tau,a) := \frac{\langle n\rangle^s}{\langle \tau + n^2 + \theta\rangle^{1/2}} \times$$

$$\Big(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_1}{\langle n_1\rangle^{2s}\langle n-n_1\rangle^{2s}\langle \tau_1 + an_1^2 + \alpha\rangle\langle \tau - \tau_1 - (n-n_1)^2 - \theta\rangle}\Big)^{1/2}. \tag{5.68}$$

Por lo tanto es suficiente probar que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\, \tau\in\mathbb{R}} A(n,\tau,a) \leq c \tag{5.69}$$

para obtener la estimación (5.56).

Lema 5.5.3. *Sea $s \geq 0$, entonces*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\, \tau\in\mathbb{R}} A(n,\tau,a) \leq c. \tag{5.70}$$

Primero consideramos $a \neq 1$.
Usando el hecho que $s \geq 0$ tenemos

$$A(n,\tau,a) \leq \frac{c}{\langle \tau + n^2 + \theta\rangle^{1/2}} \times$$

$$\Big(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_1}{\langle \tau_1 + an_1^2 + \alpha\rangle\langle \tau - \tau_1 - (n-n_1)^2 - \theta\rangle}\Big)^{1/2}.$$

Haciendo el cambio de variables $x = \tau_1 + an_1^2 + \alpha$, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_1}{\langle \tau_1 + an_1^2 + \alpha\rangle\langle \tau - \tau_1 - (n-n_1)^2 - \theta\rangle}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\langle x\rangle\langle x - (\tau - n^2 + 2nn_1 - (1-a)n_1^2 + \alpha - \theta)\rangle} \\ &\leq \frac{\ln(2 + |\tau - n^2 + n_1(2n-(1-a)n_1) + \alpha - \theta|)}{1 + |\tau - n^2 + n_1(2n-(1-a)n_1) + \alpha - \theta|}. \end{aligned} \tag{5.71}$$

Tomando $\gamma > 1/2$, la desigualdad anterior implica que

$$\begin{aligned} &\sup_{n\in\mathbb{Z},\tau\in\mathbb{R}} A(n,\tau,a) \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{Z},\tau\in\mathbb{R}} \Big(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{\ln(2 + |\tau - n^2 + n_1(2n-(1-a)n_1) + \alpha - \theta|)}{1 + |\tau - n^2 - n_1(2n-(1-a)n_1) + \alpha - \theta|}\Big)^{1/2} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{Z},\tau\in\mathbb{R}} \Big(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{\ln(2 + |\tau - n^2 + n_1(2n-(1-a)n_1) + \alpha - \theta|)}{(1 + |\tau - n^2 + n_1(2n-(1-a)n_1) + \alpha - \theta|)^{1-\gamma}} \\ &\quad \times \frac{1}{(1 + |\tau - n^2 + n_1(2n-(1-a)n_1) + \alpha - \theta|)^{\gamma}}\Big)^{1/2} \\ &\leq c \sup_{n\in\mathbb{Z},\tau\in\mathbb{R}} \Big(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1 + |\tau - n^2 + n_1(2n-(1-a)n_1) + \alpha - \theta|)^{\gamma}}\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 5.5.2 se sigue (5.70) y en consecuencia la estimación (5.56).

Ahora consideramos el caso $a = 1$. En este caso usamos un argumento de dualidad para obtener (5.56). Haciendo uso de (5.65), la estimación (5.56) es equivalente a

$$\begin{aligned} &\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{h(n,\tau)}\, d\tau}{\langle \tau + n^2 + \theta\rangle} \times \\ &\Big(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(n-n_1, \tau-\tau_1) f(n_1,\tau_1)}{\langle n-n_1\rangle^s \langle \tau - \tau_1 - (n-n_1)^2 - \theta\rangle^{1/2} \langle n_1\rangle^s \langle \tau_1 + n_1^2 + \alpha\rangle^{1/2}}\, d\tau_1 \\ &\qquad \leq \sup_{n_1\in\mathbb{Z},\, \tau_1\in\mathbb{R}} A_1(n_1,\tau_1) \|f\|_{\ell^2_n L^2_\tau} \|g\|_{\ell^2_n L^2_\tau} \|h\|_{\ell^2_n L^2_\tau}. \end{aligned} \tag{5.72}$$

En consecuencia solo necesitamos probar que

$$\sup_{n_1\in\mathbb{Z},\,\tau_1\in\mathbb{R}} A_1(n_1,\tau_1) \le c, \tag{5.73}$$

donde

$$\begin{aligned} A_1(n_1,\tau_1) &:= \frac{1}{\langle n_1\rangle^s\langle \tau_1+n_1^2+\alpha\rangle^{1/2}}\times \\ &\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\langle n\rangle^{2s}\,d\tau}{\langle n-n_1\rangle^{2s}\langle \tau+n^2+\theta\rangle\langle \tau-\tau_1-(n-n_1)^2-\theta\rangle}\Big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{5.74}$$

Como $s\ge 0$ sigue que

$$\begin{aligned} A_1(n_1,\tau_1) &= \frac{1}{\langle n_1\rangle^s\langle \tau_1+n_1^2+\alpha\rangle^{1/2}}\times \\ &\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\langle n\rangle^{2s}\,d\tau}{\langle n-n_1\rangle^{2s}\langle \tau+n^2+\theta\rangle\langle \tau-\tau_1-(n-n_1)^2-\theta\rangle}\Big)^{1/2} \\ &\le \frac{c}{\langle \tau_1+n_1^2+\alpha\rangle^{1/2}}\times \\ &\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\langle \tau+n^2+\theta\rangle\langle \tau-\tau_1-(n-n_1)^2-\theta\rangle}\Big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{5.75}$$

Cambiando variables $z=\tau+n^2+\theta$, tenemos que

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\langle \tau+n^2+\theta\rangle\langle \tau-\tau_1-(n-n_1)^2-\theta\rangle} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\langle z\rangle\langle z-(\tau_1+2n^2-2nn_1+n_1^2+2\theta)\rangle} \\ &\le \frac{\ln(2+|\tau_1+n_1^2+2n(n-n_1)+2\theta|)}{1+|\tau_1+n_1^2+2n(n-n_1)+2\theta|}. \end{aligned} \tag{5.76}$$

Por lo tanto para $\gamma > 1/2$, la desigualdad anterior implica

$$\begin{aligned}
&\sup_{n_1\in\mathbb{Z},\tau_1\in\mathbb{R}} A_1(n_1,\tau_1)\\
&\le \sup_{n_1\in\mathbb{Z},\tau_1\in\mathbb{R}} \Big(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{\ln(2+|\tau_1+n_1^2+2n(n-n_1)+2\theta|)}{1+|\tau_1+n_1^2+2n(n-n_1)+2\theta|}\Big)^{1/2}\\
&\le c \sup_{n_1\in\mathbb{Z},\tau_1\in\mathbb{R}} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|\tau_1+n_1^2+2n(n-n_1)+2\theta|)^{\gamma}}\Big)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{5.77}$$

El Lema 5.5.2 entonces produce el resultado. Esto termina la demostración del Lema 5.5.1. □

A continuación realizaremos la prueba de la teoria local

Demostración del Teorema 5.3.1. Definimos el espacio métrico de funciones

$$\mathcal{X}_M := \{(w,v) \in X_{s,b} \times X^a_{s,b} : \ |\!|\!|(w,v)|\!|\!| = \|w\|_{X_{s,b}} + \|v\|_{X^a_{s,b}} \le M\}. \tag{5.78}$$

Para $(w,v) \in \mathcal{X}_M$ definimos los operadores

$$\begin{cases} \Phi_1(w,v)(t) = \psi_1 W(t)w_0 + i\,\psi_T \int\limits_0^t W(t-t')\overline{w}\, v(t')\,dt' \\ \Phi_2(w,v)(t) = \psi_1 V(t)v_0 + \frac{i\sigma}{2}\,\psi_T \int\limits_0^t V(t-t')u^2(t')\,dt'. \end{cases} \tag{5.79}$$

Aplicando los Lemas 5.4.1, 5.4.2 y el Corolario 5.5.1 tenemos

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(w,v)\|_{X_{s,b}} &\le c\|w_0\|_{H^s} + c\,T^{\gamma}\|w\|_{X_{s,b}}\|v\|_{X^a_{s,b}} \\ &\le c\|w_0\|_{H^s} + cT^{\gamma}M^2 \end{aligned} \tag{5.80}$$

y

$$\begin{aligned} \|\Phi_2(w,v)\|_{X^a_{s,b}} &\le c\|v_0\|_{H^s} + c\,T^{\gamma}\|w\|^2_{X_{s,b}} \\ &\le c\|v_0\|_{H^s} + cT^{\gamma}M^2. \end{aligned} \tag{5.81}$$

Escogiendo $M \ge 2c(\|w_0\|_{H^s} + \|v_0\|_{H^s})$ y T tal que $cT^{\gamma}M < 1/2$ tenemos que la aplicación $(\Phi_1(w,v),\Phi_2(w,v)) : \mathcal{X}_M \mapsto \mathcal{X}_M$ está bien definida. Análogamente, se puede probar que $(\Phi_1(w,v),\Phi_2(w,v))$ es una contracción en el espacio $\mathcal{X}_M$. Del principio de contracción podemos deducir la existencia de un unico punto fijo para $(\Phi_1(w,v), \Phi_2(w,v))$ lo cual resuelve el problema. Para finalizar la prueba usamos argumentos clásicos que dejaremos como ejercicio. $\square$

5.6. Resultado Global

Debido a las leyes de conservación junto con el resultado del Teorema 5.3.1 podemos probar el siguiente resultado global.

Teorema 5.6.1. *Sea $(w_0, v_0) \in H^s([0,L]) \times H^s([0,L])$, $s \geq 0$. Entonces las soluciones $(w(t), v(t))$ dadas en el Teorema 5.3.1 se pueden extender a cualquier intervalo de tiempo.*

Demostración. El resultado es deducido usando la cantidad conservada

$$\int \left(|w(x,t)|^2 + 2\sigma |v(x,t)|^2\right) dx = \int \left(|w_0(x)|^2 + 2\sigma |v_0(x)|^2\right) dx. \quad (5.82)$$

y el Teorema 5.3.1. $\square$

5.7. Ejercicios

1. Pruebe la observación (5.3.1).
2. Pruebe la observación (5.4.1)
3. Pruebe la fórmula (5.40)
4. Pruebe la desigualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\langle y \rangle \langle y - \tau + a \rangle} \leq \frac{\ln(2 + |\tau + a|)}{1 + |\tau + a|}. \quad (5.83)$$

5. Pruebe la estimacion bilineal (5.57).
6. Pruebe que la aplicación (5.79) en la prueba del Teorema 5.3.1 es una contracción en el espacio métrico correspondiente.
7. Pruebe la unicidad en el Teorema 5.3.1.
8. Pruebe que la aplicación dato–solución en Teorema 5.3.1 es Lipschitz.

Bibliografía

[1] J. M. Ablowitz and P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 149. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[2] J. Angulo, *Non-Linear stability of periodic travelling-wave solutions to the Schrödinger and the modified Korteweg-de Vries*, Pre-print (2004).

[3] J. Angulo and F. Linares, *Periodic pulses of Coupled Nonlinear Schrödinger Equations in Optics*, Indiana University Mathematical Journal, **56**, no. 2 (2007), 847–877.

[4] O. Bang, C. B. Claussen and Y. S. Kivshar, *Spatial solitons and induced Kerr effects in quase-phase-matched quadratic media*, Phys. Rev. Lett. **197** (1995), 4749-4752.

[5] T. B. Benjamin, *Internal waves of permanent form in fluids of great depth*, J. Fluid Mech. **29** (1967), 559–592.

[6] J. L. Bona, *On the stability theory of solitary waves*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **344** (1975), no. 1638, 363–374.

[7] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations, II. The KdV equation,* Geometric and Funct. Anal., **3** (1993), 107-156, 209–262.

[8] A. Buryak and Y. S. Kivshar, *Solitons due to second harmonic generation*, Phys. Lett. A **78** (1997), 407-412.

[9] P. F. Byrd and M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, 2^{nd} *ed.*, Springer-Verlag: New York and Heidelberg, (1971).

[10] A. R. Champneys, P. J. McKenna and A. C. Yew, *Multiple solitary-waves due to second harmonic generation in quadratic media* , J. Nonlinear Sci. **9** (1999), 33–52.

[11] P. Constantin and J-C. Saut, *Local somoothing properties of dispersive equations*, J. Amaer. Math. Soc. **1** (1989), 413–446.

[12] L-C. Crasovan, F. Lederer, D. Mazilu and D. Mihalache *Multiple-humped bright solitary waves in second-order nonlinear media* , Opt. Eng. **35** (1996), 1616–1623.

[13] R. De Salvo, D.J. Hagan, M. Sheik-Bahae, G. Stegeman, H. Vanherzeele and E.W. Van Stryland *Self-Focusing and Defocusing by Cascaded Second Order Nonlinearity in KTP*, Opt. Lett. **17**, 28 (1992), 28–30.

[14] P. D. Drummond, H. He and M. J. Werner, *Simultaneus solitary-wave solutions in a non-linear parametric waveguide*, Phys. Rev. E **54** (1996), 896–911.

[15] H. Dym and H. P. McKean, *Fourier series and integrals*, New York : Academic Press, 1972.

[16] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate studies in Mathematics, Providence, R.I. American Mathematical Society, 2001.

[17] P. Ferro and S. Trillo, *Periodical waves, domain walls, and modulations instability in dispersive quadratic nonlinear media*, Phys. Rev. E. **51** (1995), 4994–4997.

[18] P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters and G. Weinreich, *Generation of optical harmonics*, Phys. Rev. Lett. **7** (1961), 118–119.

[19] J. Ginibre, Y. Tsutsumi and G. Velo, *On the Cauchy problem for the Zakharov system*, J. Funct. Anal. 151 (1997), no. 2, 384–436.

[20] J. Ginibre and G. Velo, *Scattering theory in the energy space for the class of nonlinear Schrödinger equations*, J. Math Pures at Appl. **64** (1985), 363–401.

[21] J. Ginibre and G. Velo, *On the class of nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 1–32, 33–72.

[22] M. Grillakis, *Linearized instability for nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon equations*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 747-774.

[23] M. Grillakis, *Analysis of the linearization around a critical point of an infinite-dimensional Hamiltonian system*, Comm. Pure Appl. Math. **43** (1990), 299-333.

[24] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I*, J. Funct. Anal. **74** (1987), 160-197.

[25] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II*, J. Funct. Anal. **94** (1990), 308-348.

[26] E. L. Ince, The periodic Lamé functions. *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **60** (1940), 47–63.

[27] R. Iório and V. Iório, *Fourier analysis and partial differential equations*, Cambridge. New York, Cambridge University Press, 2001.

[28] C. K. R. T. Jones, *instability of standing waves for nonlinear Schrödinger type equations*, Ergod. Th.& Dynam. Sys. 8^* (1998), 119-138.

[29] Y. N. Karamzin and A. P. Sukhorukov, *Nonlinear interaction of diffracted light beams in a medium with quadratic nolinearity: mutual focusing of beams and limitation on the efficiency of optical frequency converters*, JETP Lett. **20**, (1974), 339–342.

[30] T. Kato, *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Advance in Math. Supplementary Studies, Studies in Appl. Math. **8** (1983), 93–128.

[31] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Quadratic forms for the 1-D semilinear Schrödinger equation*, Transactions AMS **348** (1996), 3323–3353.

[32] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices*, Duke Math. J., **71** (1993), 1-21.

[33] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Small solutions to nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré **110** (1993), 255–288.

[34] C. E. Kenig, G. Ponce and L.Vega, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 33–69.

[35] C. E. Kenig and A. Ruiz, *A strong type (2,2) estimate for the maximal function associated to the Schrödinger equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **230** (1983), 239–246.

[36] D. J. Korteweg and G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Philos. Mag. **39** (1895), 422–443.

[37] S. Kruzhkov and A. Faminskii, *A generalized solutions for the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation*, Math. USRR, Sbornik **48** (1984), 93–138.

[38] F. Linares and G. Ponce, *Introduction to nonlinear dispersive equations*, Publicações Matemáticas, Rio de Janeiro : IMPA, 2004.

[39] W. Magnus and S. Winkler, *Hill's Equation.* Interscience, Tracts in Pure and Appl. Math. **20**, Wiley: NY. (1976).

[40] C. R. Menyuk, R. Schiek and L. Torner, *Solitary waves due to $\chi^{(2)}$: $\chi^{(2)}$ cascading*, J. Opt. Soc. Amer. B **11** (1994), 2434–2443.

[41] R. M. Miura, *The Korteweg-de Vries equation: a survey of results*, SIAM Rev. **18** (1976), no. 3, 412–459.

[42] H. Ono, *Algebraic solitary waves in stratified fluids*, J. Phys. Soc. Japan **39** (1975), 1082–1091.

[43] S. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics: Analysis of Operator*, v. IV, Academic Press, (1975).

[44] P. Sjölin, *Regularity of solutions to the Schrödinger equations*, Duke Math. J. **55** (1987), 699–715.

[45] E. Stein and R. Shakarchi, *Fourier analysis: an introduction*, Princeton, N.J. Princeton University Press, 2003.

[46] R. S. Strichartz, *Restriction of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations*, Duke Math. J. **44** (1977), 705–714.

[47] A. C. Yew, *Multipulses of nonlinearly coupled Schrödinger equations*, J. Diff. Equations **173** (2001), 92–137.

[48] A. C. Yew, *Stability analysis of multipulses in nonlinearly-coupled Schrödinger equations*, Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), 1079–1124.

[49] L. Vega, *The Schrödinger equation: pointwise convergence to the initial data*, Proc. Amer. Math. Soc **102** (1988), 874–878.

[50] M. I. Weinstein, *Existence and dynamic stability of solitary wave solutions of equations arising in long wave propagation*, Comm. Partial Differential Equations **12** (1987), no. 10, 1133–1173.

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro, cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de la matemática en Venezuela.

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela
http://amv.ivic.ve/